DOMINIQUE DUMONT
DOMINIQUE FOATA

Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 433-451
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__433_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 433-451.

UNE PROPRIÉTÉ DE SYMÉTRIE DES NOMBRES DE GENOCCHI

par

DOMINIQUE DUMONT et DOMINIQUE FOATA

[Université Louis-Pasteur, Strasbourg]

RÉSUMÉ. — Nous obtenons un raffinement des nombres de Genocchi en sommes de coefficients symétriques, ainsi qu'une interprétation combinatoire de ces coefficients.

1. Introduction

Les *nombres de Genocchi* G_{2n} $(n \geqslant 1)$ sont des entiers positifs qu'on peut définir au moyen de leur fonction génératrice exponentielle (ou plus exactement de celle des nombres $(-1)^n\, G_{2n}$) :

$$2\,u/(e^u+1) = u+\textstyle\sum_{n\geqslant 1}(u^{2n}/(2\,n)\,!)(-1)^n G_{2n}.$$

Ce sont les entiers les plus proches des *nombres de Bernoulli* B_{2n} $(n \geqslant 1)$ dans le sens suivant : ces derniers sont des nombres rationnels donnés, par exemple, par leur fonction génératrice exponentielle

$$u/(e^u-1) = 1-u/2+\textstyle\sum_{n\geqslant 1}(u^{2n}/(2\,n)\,!)(-1)^{n+1}\,B_{2n}.$$

Or d'après le petit théorème de Fermat et le théorème de von Staudt-Clausen (*cf.* CARLITZ [2], ou HARDY et WRIGHT [6], p. 91) on montre aisément que, pour tout entier a, l'expression $a\,(a^{2n}-1)\,B_{2n}$ est un entier pour tout $n \geqslant 1$. Le plus petit entier a, pour lequel cette expression est non triviale, est $a = 2$, et on obtient précisément les nombres de Genocchi :

$$G_{2n} = 2\,(2^{2n}-1)\,B_{2n} \qquad (n \geqslant 1).$$

Les premières valeurs de ces deux suites de nombres sont données dans le tableau I.

TABLEAU I

n	1	2	3	4	5	6	7
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	38227
B_{2n}	1/6	1/30	1/42	1/30	5/66	691/2730	7/6

Le but de cet article est de démontrer les deux théorèmes 1 *a* et 2 suivants.

THÉORÈME 1 *a*. — *Soit* $(F_n(x, y, z))_{n \geqslant 1}$ *la suite des polynômes en les trois variables* x, y, z *définis par la relation de récurrence*

$$F_1(x, y, z) = 1, \tag{1}$$

$$F_n(x, y, z) = (x+z)(y+z)F_{n-1}(x, y, z+1) - z^2 F_{n-1}(x, y, z) \qquad (n \geqslant 2).$$

Alors, pour tout $n \geqslant 1$, *le polynome* $F_n(x, y, z)$ *est symétrique en les trois variables* x, y, z. *De plus*

$$F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2} \qquad (n \geqslant 1). \tag{2}$$

Il est clair que les coefficients des polynômes $F_n(x, y, z)$ sont des entiers positifs ou nuls. Le théorème donne donc un raffinement des nombres de Genocchi en coefficients symétriques. Posons en effet

$$F_n(x, y, z) = \sum_{1 \leqslant i, j, k} a_{n, i, j, k}\, x^{i-1} y^{j-1} z^{k-1} \qquad (n \geqslant 1).$$

En identifiant les coefficients dans (1), on déduit la relation de récurrence suivante sur les $a_{n, i, j, k}$:

$$a_{1,1,1,1} = 1, \qquad a_{1, i, j, k} = 0 \quad \text{si } (i, j, k) \neq (1, 1, 1), \tag{3}$$

pour $n \geqslant 2$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$.

$$a_{n, i, j, k} = \sum_{k-1 \leqslant l \leqslant n-1} \binom{l-1}{k-1} a_{n-1, i-1, j-1, l} + \binom{l-1}{k-2} (a_{n-1, i-1, j, l} + a_{n-1, i, j-1, l}) + \binom{l-1}{k-3} a_{n-1, i, j, l}. \tag{4}$$

On a donc une forme équivalente du théorème 1.

THÉORÈME 1 *b*. — *Soit* $a_{n, i, j, k}$ $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$ *la suite d'entiers définie par* (3) *et* (4). *Alors, pour tout triplet* (i, j, k) *et toute permutation*

(i', j', k') de (i, j, k), on a

$$a_{n,i',j',k'} = a_{n,i,j,k}.$$

De plus

$$G_{2n+2} = \sum\nolimits_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} a_{n,i,j,k}.$$

Les premières valeurs des coefficients $a_{n,i,j,k}$ sont données dans le tableau II.

Nous démontrerons le théorème 1 *a* au paragraphe 2. C'est une extension d'un résultat antérieur dû à Carlitz [2], Riordan et Stein [7].

Le résultat principal de notre article est de fournir une *interprétation combinatoire* pour les coefficients $a_{n,i,j,k}$. Celle-ci est consignée dans le théorème 2 ci-dessous. Cette interprétation nous permet aussi de donner une preuve *géométrique* de la symétrie des coefficients $a_{n,i,j,k}$. La notion fondamentale que nous introduisons pour cette étude est celle d'*application excédante surjective*, que nous regardons suivant trois critères, nombre de points saillants, fixes et maximaux. Comme il est classique dans ce genre d'étude, les transformations introduites sur les classes d'applications sont de nature « planaire », et la difficulté est de les caractériser par des données « linéaires ». Nous n'échapperons pas à cette difficulté lors de la construction de nos transformations Φ et Ψ aux propositions 3.1 et 4.10. Pour terminer cette introduction, nous donnons les notations utilisées, ainsi que l'enchaînement des paragraphes 3, 4 et 5.

Une application de l'intervalle $[2n] = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ dans lui-même est dite *excédante* si, pour tout x appartenant à $[2n]$, on a $x \leqslant f(x)$. Soit $n \geqslant 1$. Nous notons A_n l'ensemble de toutes les applications *excédantes* définies sur $[2n]$, et *surjectives* sur le sous-ensemble des entiers pairs $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$. Soient f un élément de A_n, et x un élément de $[2n]$. Un couple $(x, f(x))$ est dit un *point saillant* de f si

$$1 \leqslant y < x \quad \text{implique } f(y) < f(x).$$

En particulier, $(1, f(1))$ est toujours un point saillant. Un couple $(x, f(x))$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$. Un couple $(x, f(x))$ est un *point maximal* de f si $1 \leqslant x \leqslant 2n-1$ et $f(x) = 2n$. Pour une raison qui apparaîtra par la suite, on ne compte pas le point $(2n, f(2n) = 2n)$ parmi les points maximaux, mais on le compte parmi les points fixes. Si $(x, f(x))$ est un point du graphe de f, nous dirons que x est la *position* du point, et $f(x)$ la *valeur* du point.

On désigne par $I(f)$ le nombre de points saillants de f, par $J(f)$ le nombre de ses points fixes, et par $K(f)$ le nombre de ses points maximaux.

THÉORÈME 2. — *Pour chaque* $n \geqslant 1$, *la fonction génératrice du vecteur* (I, J, K) *sur* A_n *est égale à* $x\,y\,z\,F_n(x, y, z)$. *Autrement dit, on a*

$$\sum \{ x^{I(f)} y^{J(f)} z^{K(f)} : f \in A_n \} = xyz\,F_n(x, y, z).$$

Il résulte des théorèmes 1 *a* et 2 que

$$G_{2n+2} = \operatorname{card} A_n \qquad (n \geqslant 1).$$

En fait, ce résultat a déjà été prouvé par le premier auteur [4] dans l'article où il a donné les premières interprétations combinatoires des nombres de Genocchi. Il résulte également du théorème 1 *a* que la distribution du vecteur (I, J, K) est symétrique. Dans les paragraphes 3 et 4, nous prouvons cette propriété de symétrie directement. Nous montrons, en effet, au paragraphe 3, que si $a_{n,i,j,k}$ est le nombre d'éléments f de A_n ayant $I(f) = i$ points saillants, $J(f) = j$ points fixes, et $K(f) = k$ points maximaux, alors $a_{n,i,j,k}$ satisfait à la relation de récurrence (3) et (4). Pour établir la propriété de symétrie, nous prouvons, au paragraphe 4, la relation de récurrence (5) suivante, qu'on obtient simplement en échangeant les rôles de i et de k dans la relation (4) :

$$(5) \quad a_{n,i,j,k} = \sum_{i-1 \leqslant l \leqslant n-1} \binom{l-1}{i-1} a_{n-1,l,j-1,k-1} + \binom{l-1}{i-2} (a_{n-1,l,j,k-1} + a_{n-1,l,j-1,k}) + \binom{l-1}{i-3} a_{n-1,l,j,k}.$$

Au paragraphe 5, nous donnons la construction de deux involutions $f \to f'$ et $f \to f''$ de l'ensemble A_n telles que :

— pour la première : $I(f') = J(f)$, $J(f') = I(f)$, $K(f') = K(f)$;

— pour la seconde : $I(f'') = I(f)$, $J(f'') = K(f)$, $K(f'') = J(f)$.

Enfin, des tables numériques sont reproduites à la fin de l'article.

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur CARLITZ pour l'intérêt qu'il a montré pour ces résultats, ainsi que pour leur avoir communiqué une note intéressante comportant des formules explicites pour $F_n(x, y, z)$ [3].

2. La conjecture de Gandhi

GANDHI [5] a proposé la conjecture suivante sur les nombres de Genocchi. Soit $(P_n(z))_{n \geqslant 0}$ la suite de polynômes en la variable z définie par la relation de récurrence

$$(6) \quad \begin{cases} P_0(z) = 1, \\ P_n(z) = z^2 P_{n-1}(z+1) - (z-1)^2 P_{n-1}(z) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

GANDHI a conjecturé que, pour tout $n \geqslant 0$, on avait

$$(7) \qquad G_{2n+2} = P_n(1).$$

CARLITZ [2] d'une part, RIORDAN et STEIN [7] d'autre part, ont prouvé l'exactitude de cette conjecture. Si l'on pose

$$(8) \qquad Q_n(z) = P_{n-1}(z+1) \qquad (n \geqslant 1),$$

on obtient une suite de polynômes $(Q_n(z))_{n \geqslant 1}$ définie par la relation de récurrence

$$(9) \quad \begin{cases} Q_1(z) = 1, \\ Q_n(z) = (z+1)^2 Q_{n-1}(z+1) - z^2 Q_n(z) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

Puisque $P_n(1) = P_{n-1}(2) = Q_n(1)$, la relation (7) donne

$$(10) \qquad G_{2n+2} = Q_n(1) \qquad (n \geqslant 1).$$

Si l'on compare (1) et (9), il est clair que l'on a

$$(11) \qquad Q_n(z) = F_n(1, 1, z) \qquad (n \geqslant 1).$$

Par conséquent, (2) est une conséquence de (10) et (11). Pour terminer la démonstration du théorème 1 a, il suffit donc d'établir la symétrie des polynômes $F_n(x, y, z)$. On peut opérer comme suit. La relation (1) étant symétrique en (x, y), il suffit de prouver que $F_n(x, y, z)$ satisfait également à la relation de récurrence suivante, où l'on a simplement échangé x et z dans (1) :

$$(12) \quad \begin{cases} F_n(x, y, z) = (x+y)(x+z) F_{n-1}(x+1, y, z) - x^2 F_{n-1}(x, y, z) \\ \qquad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

D'abord, la relation (1) donne immédiatement

$$F_2(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Soit maintenant $n \geqslant 3$, et supposons que (12) a été établie pour tous les entiers m tels que $m < n$. Alors,

$$\begin{aligned} F_n(x, y, z) &= (x+y)(y+z) F_{n-1}(x, y, z+1) - z^2 F_{n-1}(x, y, z) \\ &= (x+y)(y+z)\big[(x+y)(x+z) F_{n-2}(x+1, y, z+1) \\ &\qquad\qquad - x^2 F_{n-2}(x, y, z+1)\big] \\ &\quad - z^2\big[(x+y)(x+z) F_{n-2}(x+1, y, z) - x^2 F_{n-2}(x, y, z)\big]. \end{aligned}$$

En associant le premier et le troisième terme d'une part, le second et le quatrième d'autre part, et en utilisant (1), nous en déduisons que $F_n(x, y, z)$ satisfait également à (12).

3. Surjections excédantes

Soient $n, i, j, k \geqslant 1$. On note $A_{n,i,j,k}$ l'ensemble des surjections excédantes f de $[2n]$ sur $\{2, 4, \ldots, 2n\}$ telles que $I(f) = i$, $J(f) = j$, $K(f) = k$. On pose également

$$A_{n,.,.,k} = \bigcup_{i,j \geqslant 1} A_{n,i,j,k} \qquad \text{et} \qquad A_{n,i,.,.} = \bigcup_{j,k \geqslant 1} A_{n,i,j,k}.$$

Le but de ce paragraphe est de démontrer que l'entier card $A_{n,i,j,k}$, qu'on va poser égal à $a_{n,i,j,k}$, satisfait à la relation de récurrence (4), ce qui, comme nous l'avons noté dans l'introduction, revient à prouver le théorème 2. Pour k, $l \geqslant 1$, nous notons $\binom{[l+1]}{k-1}$ l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur $k-1$ contenues dans l'intervalle $[l+1]$, c'est-à-dire des suites $(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1})$ telles que

$$1 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} \leqslant l+1.$$

Pour $k = 1$, l'ensemble $\binom{[l+1]}{0}$ contient seulement la suite vide. On a donc

$$\operatorname{card}\binom{[l+1]}{k-1} = \binom{l+1}{k-1}.$$

Dans le reste du paragraphe, nous supposons $n \geqslant 2$.

Construction d'une bijection :

$$\Phi : \; f \to ((c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}), g)$$

de $A_{n,.,.,k}$ *sur* $\bigcup_{k-1 \leqslant l \leqslant n-1} \binom{[l+1]}{k-1} \times A_{n-1,.,.,l}$.

Soit f un élément quelconque de A_n. Nous définissons l'application g de $[2n-2]$ dans lui-même par la relation

$$g(x) = \min(2n-2, f(x)) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2n-2.$$

Il est clair que g est une surjection excédante de $[2n-2]$ sur $\{2, 4, \ldots, 2n-2\}$ c'est-à-dire un élément de A_{n-1}. Posons $l = K(g)$, et numérotons les positions des points maximaux de g dans l'ordre croissant :

$$1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_l = 2n-3.$$

Posons en outre $t_{l+1} = 2n-2$. Si $f(x) = 2n$, l'entier x est nécessairement un élément de $\{t_1, t_2, \ldots, t_l, t_{l+1}, 2n-1, 2n\}$. Posons $k = K(f)$, et numérotons les positions des points maximaux de f dans l'ordre croissant également :

$$1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_{k-1} < s_k = 2n-1.$$

Par conséquent, $\{s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}\}$ est une partie de $\{t_1, t_2, \ldots, t_{l+1}\}$, mais c'est une partie *stricte*, car f étant surjective, il existe nécessairement au moins un élément t_p $(1 \leqslant p \leqslant l+1)$ tel que

$$f(t_p) = g(t_p) = 2n-2.$$

On a donc l'inégalité stricte

$$k-1 < l+1.$$

D'autre part, en dénombrant les valeurs prises par g, on trouve

$$2n-2 = \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \operatorname{card} g^{-1}(2i) = l+1+\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-2} \operatorname{card} g^{-1}(2i)$$

par définition de l. Comme g est surjective, on a

$$\operatorname{card} g^{-1}(2i) \geqslant 1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2.$$

On en tire l'inégalité

$$(2n-2)-(l+1) \geqslant n-2,$$

soit $l \leqslant n-1$.

En résumé, $k-1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Définissons enfin la suite $(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1})$ par l'équation

$$s_i = t_{c_i} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Par construction, on a bien

$$1 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} \leqslant l+1.$$

(Si $k = 1$, la suite $(c_1, \ldots, c_{k-1})$ est la suite vide.)

Exemple :

$$n = 4,$$
$$x = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8,$$
$$f(x) = 6\ 2\ 4\ 8\ 6\ 8\ 8\ 8, \qquad k = 3,$$
$$g(x) = 6\ 2\ 4\ 6\ 6\ 6, \qquad l = 3,$$
$$(t_1, t_2, \ldots, t_{l+1}) = (1, 4, 5, 6); (s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}) = (4, 6) = (t_2, t_4)$$

et

$$(c_1, \ldots, c_{k-1}) = (2, 4).$$

PROPOSITION 3.1. — *L'application* Φ *est bijective.*

Preuve. — Pour montrer que l'application Φ ainsi construite est bijective, nous déterminons son inverse Φ^{-1}. Soit g un élément de $A_{n-1, \ldots, l}$ $(k-1 \leqslant l \leqslant n-1)$. Soit $(c_1, \ldots, c_{k-1})$ un élément de $\binom{[l+1]}{k-1}$. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_l$ les positions des points saillants de g, et $t_{l+1} = 2n-2$. On définit $f = \Phi^{-1}(g)$ comme suit :

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} f(x) &= 2n \quad \text{si} \quad x = t_{c_1}, t_{c_2}, \ldots, t_{c_{k-1}}, \quad 2n-1, \quad 2n \\ &= g(x) \quad \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2n-2 \quad \text{et} \quad x \neq t_{c_1}, t_{c_2}, \ldots, t_{c_{k-1}}. \end{aligned}$$

Comme $k-1 < l+1$, l'ensemble $\{c_1, \ldots, c_{k-1}\}$ est une partie stricte de $[l+1]$; il existe donc au moins un t_p tel que

$$f(t_p) = g(t_p) = 2n-2.$$

Ainsi, l'application f est surjective sur $\{2, 4, \ldots, 2n\}$, excédante, et on a $K(f) = k$. Par conséquent, les conditions (13) suffisent à définir sans ambiguïté f dans $A_{n, \ldots, k}$. Comme en outre elles sont nécessaires pour que $\Phi(f) = g$, l'application Φ est bien bijective.

Q. E. D.

PROPOSITION 3.2. — *Soit f un élément de A_n, et soit*

$$\Phi(f) = ((c_1, \ldots, c_{k-1}), g).$$

Posons $k = K(f)$ et $l = K(g)$. Alors :

(i) *Une condition nécessaire et suffisante pour que $J(g) = J(f)$ (resp. $J(g) = J(f)-1$) est que $c_{k-1} = l+1$ (resp. $c_{k-1} < l+1$).*

(ii) *Une condition nécessaire et suffisante pour que $I(g) = I(f)$ (resp. $I(g) = I(f)-1$) est que $c_1 = 1$ (resp. $c_1 > 1$).*

Preuve :

(i) Comme les applications f et g coïncident sur tous les points de valeur inférieure ou égale à $2n-4$, elles ont les mêmes points fixes de valeur inférieure ou égale à $2n-4$. En outre, f a un point fixe de valeur $2n$, mais pas g. Il reste à comparer leurs points fixes de valeur $2n-2$. Or, g a toujours un point fixe de valeur $2n-2$, à savoir $(2n-2, g(2n-2))$.

Si $c_{k-1} < l+1$, on a aussi $f(2n-2) = 2n-2$, donc f a aussi un point fixe de valeur $2n-2$. En récapitulant, $J(g) = J(f)-1$.

Si $c_{k-1} = l+1$, on a $f(2n-2) = 2n$, donc f n'a pas de point fixe de valeur $2n-2$. D'où $J(g) = J(f)$.

(ii) De même qu'en (i), f et g ont les mêmes points saillants de valeur inférieure ou égale à $2n-4$. En outre, f a un point saillant de valeur $2n$, à savoir $(s_1, f(s_1))$, mais pas g. Enfin, g a un point saillant de valeur $(2n-2)$, à savoir $(t_1, g(t_1))$.

Si $c_1 > 1$, on a aussi $f(t_1) = 2n-2$, et il est clair que $(t_1, f(t_1))$ est un point saillant de f. D'où $I(g) = I(f)-1$.

Si $c_1 = 1$, on a $f(t_1) = 2n$ et, si $f(x) = 2n-2$, on a aussi $g(x) = 2n-2$. De là $x > t_1$, et f ne peut pas avoir de point saillant de valeur $2n-2$. D'où $I(g) = I(f)$.

Q. E. D.

COROLLAIRE 3.3. — *La suite* $(a_{n,i,j,k})$ *satisfait à la récurrence* (3), (4)

Preuve. — D'abord, on a $a_{1,1,1,1} = 1$, car A_1 contient le seul élément f tel que $f(1) = f(2) = 2$.

D'après les propositions 3.1 et 3.2, l'ensemble $A_{n,i,j,k}$ $(n \geqslant 2)$ est appliqué bijectivement par Φ sur la réunion des ensembles suivants :

$$\cup\{((c_1, \ldots, c_{k-1}), g) : 1, l+1 \notin \{c_1, \ldots, c_{k-1}\}, g \in A_{n-1,i-1,j-1,l}\},$$

$$\cup\{((c_1, \ldots, c_{k-1}), g) : 1 < c_1 \leqslant c_{k-1} = l+1, g \in A_{n-1,i-1,j,l}\},$$

$$\cup\{((c_1, \ldots, c_{k-1}), g) : 1 = c_1 \leqslant c_{k-1} < l+1, g \in A_{n-1,i,j-1,l}\},$$

$$\cup\{((c_1, \ldots, c_{k-1}), g) : 1 = c_1 \leqslant c_{k-1} = l+1, g \in A_{n-1,i,j,l}\},$$

où l décrit l'intervalle $[k-1, n-1]$.

En écrivant que $\operatorname{card} A_{n,i,j,k} = \operatorname{card} \Phi(A_{n,i,j,k})$, on obtient précisément (4).

Q. E. D.

4. Points saillants doublés

Dans ce paragraphe, nous introduisons une nouvelle construction combinatoire pour prouver directement l'identité (5). Le rôle central sera joué par la notion de point saillant doublé, que nous introduisons dans la définition 4.3.

Dans tout ce qui suit, f désigne un élément de $A_{n,i,.,.}$, et l'on suppose $n \geqslant 2$.

LEMME 4.1. — *Un point $(x, f(x))$ ne peut être à la fois fixe et saillant.*

Preuve. — En effet, si $f(x) = x$, x est pair, $x = 2k$, mais alors $f(2k-1) \geqslant 2k$ et $(x, f(x))$ ne peut être saillant.

Q. E. D.

LEMME 4.2. — *Si $(x, f(x))$ n'est pas saillant et si* $f(x) \geqslant 3$, alors $x \geqslant 3$.

Preuve. — En effet, $(1, f(1))$ est toujours saillant. Et si $f(2) \geqslant 3$, comme 2 doit être une valeur prise par f, on a $f(1) = 2$, et $(2, f(2))$ est alors saillant.

Q. E. D.

Afin d'introduire la définition suivante, nous numérotons les i points saillants de f dans l'ordre *décroissant* :

$$2n > s_1 > s_2 > \ldots > s_{i-1} > s_i = 1.$$

DÉFINITION 4.3 :

(i) Un point saillant de position s_k ($k \geqslant 2$) est dit *doublé* si la valeur $f(s_k)$ est atteinte par f sur l'intervalle ouvert $]s_k, s_{k-1}[$. On considère également le point $(s_1, f(s_1))$ comme doublé, $2n$ étant atteint par f sur $]s_1, 2n]$.

(ii) Si $(s_k, f(s_k))$ est un point saillant doublé, on définit son *doublon* comme le point $(s'_k, f(s'_k))$, où s'_k est le plus petit entier x de l'intervalle $]s_k, s_{k-1}[$ (resp. $]s_1, 2n]$) tel que $f(x) = f(s_k)$.

LEMME 4.4. — *Si $k \geqslant 2$ et $(s_k, f(s_k))$ est un point saillant non doublé, on a $f(s_k) \geqslant s_{k-1}$.*

Preuve. — En effet, s_k étant non doublé, $f(s_k) > f(s_{k-1}-1)$. De plus, f étant excédante, $f(s_{k-1}-1) \geqslant s_{k-1}-1$. D'où $f(s_k) > s_{k-1}-1$.

Q. E. D.

Considérons à présent l'ensemble des points saillants doublés de f. Il est non vide, puisqu'il contient $(s_1, 2n)$. Soit $(s_p, f(s_p))$ son élément ayant *la plus petite valeur* $f(s_p)$. Les points saillants de position $s_{p+1}, s_{p+2}, \ldots, s_i$ sont tous non doublés. Le lemme 4.4 suggère donc de poser la définition suivante.

DÉFINITION 4.5. — Pour tout f dans $A_{n,i,\ldots}$, on définit l'application h sur $[3, 2n]$ comme suit :

$$h(x)=f(x) \quad \text{si} \quad x \geqslant 3 \quad \text{et} \quad x \neq s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{i-1}, \tag{14}$$

$$h(s_k)=f(s_{k+1}) \quad \text{si} \quad s_k \geqslant 3 \quad \text{et} \quad p \leqslant k \leqslant i-1. \tag{15}$$

Exemple 4.6. — $n = 8$, $i = 5$:

$$x = \mathit{1}\ 2\ \mathit{3}\ 4\ \mathit{5}\ 6\ 7\ \mathit{8}\ \ 9\ \ 10\ 11\ \mathit{12}\ \mathit{13}\ 14\ 15\ 16,$$

$$f(x) = \mathit{4}\ 2\ \mathit{8}\ 6\ \mathit{10}\ 6\ 8\ \mathit{12}\ 10\ 12\ 12\ \mathit{14}\ \mathit{16}\ 14\ 16\ 16.$$

Ainsi $(s_i, s_{i-1}, \ldots, s_2, s_1) = (1, 3, 5, 8, 12, 13)$.

On a $p = 3$, $(s_p, f(s_p)) = (8, 12)$. D'où

$$x = 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ \ 9\ \ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16,$$

$$h(x) = 4\ 6\ 8\ 6\ 8\ 10\ 10\ 12\ 12\ 14\ 16\ 14\ 16\ 16.$$

PROPOSITION 4.7. — *Lorsque $p = i$, on a :*

(i) $f(2) = 2$;

(ii) *h est la restriction de f à* $[3, 2n]$.

Preuve :

(i) Si $f(1) > 2$, alors $f(2) = 2$, car 2 est une valeur de f. Si $f(1) = 2$, comme $(1, f(1))$ est doublé (car $s_i = s_p = 1$), le point $(2, f(2))$ ne peut être que son doublon, donc $f(2) = 2$.

(ii) Si $p = i$, tout x de $[3, 2n]$ vérifie la condition (14).

Q. F. D.

THÉORÈME 4.8. — *Soit h, définie par* (14) *et* (15). *Alors*

(i) *h est excédante;*

(ii) *h est surjective sur* $\{4, 6, \ldots, 2n\}$;

(iii) *si $(s_k, f(s_k))$ est un point saillant de f tel que* $s_k \geqslant 3$, *alors* $(s_k, h(s_k))$ *est un point saillant de h;*

(iv) *h a les mêmes points fixes que la restriction de f à* $[3, 2n]$.

Preuve :

Cas où $p = i$.

Les propriétés (i), (iii) et (iv) sont évidentes. En outre, d'après la proposition 4.7 (i), on a $f(2) = 2$. Le seul problème en suspens est de savoir si lorsque $f(1) > 2$, la valeur $f(1)$ est atteinte ailleurs sur $[3, 2n]$ par f. La réponse est affirmative, car le doublon de $(1, f(1))$ est alors de position au moins égale à 3.

Cas où $p \leqslant i-1$:

(i) Dans la situation décrite en (14), on a

$$h(x) = f(x) \geqslant x.$$

Si $x = s_k \geqslant 3$ $(p \leqslant k \leqslant i-1)$, le point $(s_{k+1}, f(s_{k+1}))$ est saillant et non doublé. D'après le lemme 4.4, on a donc $f(s_{k+1}) \geqslant s_k$, soit :

$$h(s_k) \geqslant s_k.$$

(ii) Soit $f(x)$ une valeur de f superieure à 3. Il suffit de montrer que h atteint cette valeur. Supposons d'abord $(x, f(x))$ non saillant. D'après le lemme 4.2, on a $x \geqslant 3$. On est encore dans la situation (14) et

$$h(x) = f(x).$$

Reste à examiner le cas de $(x, f(x))$ saillant. Notons $(s'_p, f(s'_p))$ le doublon de $(s_p, f(s_p))$, et considérons la suite de positions décroissantes

$$s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s'_p, s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{i-2}.$$

Comme $s_i = 1$, on a $s_{i-2} \geqslant 3$. Pour obtenir la valeur prise par h en chacune de ces positions, il faut appliquer (14) aux entiers $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s'_p$, et (15) aux entiers $s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{i-2}$. On trouve pour les premiers $f(s_1), f(s_2), \ldots, f(s_{p-1}), f(s'_p)$ $(= f(s_p))$, et pour les seconds $f(s_{p+1})$, $f(s_{p+2}), \ldots, f(s_{i-1})$.

Il reste seulement à prouver que $f(s_i)$ est atteinte par h lorsque $f(s_i) \geqslant 3$. Or si $f(1) \geqslant 3$, on a $f(2) = 2$, et donc $s_{i-1} \geqslant 3$. On doit donc appliquer (15) à s_{i-1}, et l'on trouve $h(s_{i-1}) = f(s_i)$.

(iii) Tout d'abord, sur l'intervalle $[s_p+1, 2n]$ les applications f et h coïncident. Elles ont donc les mêmes points saillants, de position $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$.

Soit maintenant $(s_k, f(s_k))$ un point saillant de f vérifiant $s_k \geqslant 3$ et $p \leqslant k \leqslant i-1$. Montrons que

$$3 \leqslant x < s_k \quad \text{implique} \quad h(x) < h(s_k).$$

Si $s_{k+1} < x < s_k$, on a $h(x) = f(x) < f(s_{k+1}) = h(s_k)$, car $(s_{k+1}, f(s_{k+1}))$ est un point saillant non doublé. A ce stade la preuve est achevée pour le cas $k = i-1$. Si $k \leqslant i-2$, il faut encore considérer deux éventualités :

(*a*) $x = s_{k+1} \geqslant 3$;

(*b*) $x < s_{k+1}$.

Pour (*a*), on a $h(x) = f(s_{k+2}) < f(s_{k+1}) = h(s_k)$, et pour (*b*) les relations $h(x) \leqslant f(x) < f(s_{k+1}) = h(s_k)$. Le point $(s_k, h(s_k))$ est donc saillant pour h.

(iv) Soit $(x, f(x))$ un point fixe de la restriction de f à $[3, 2n]$. D'après le lemme 4.1, il n'est pas saillant. Comme $x \geqslant 3$, on est dans la situation (14). D'où $h(x) = f(x) = x$, et $(x, f(x))$ est aussi fixe pour h.

Réciproquement, si $(y, h(y))$ est fixe pour h, il n'est pas saillant pour h, donc non plus pour f d'après (iii). D'après (14), on a donc $f(y) = h(y) = y$; d'où $(y, h(y))$ est fixe pour f.

Q. E. D.

Pour $n \geqslant 2$, on note A'_{n-1} l'ensemble des surjections excédantes de $[3, 2n]$ sur $\{4, 6, \ldots, 2n\}$. D'après le précédent théorème, l'application h, définie par (14) et (15), est dans A'_{n-1}. Si elle a l points saillants, nous les ~~numérotons,~~ comme ceux de f, dans l'ordre *décroissant*

$$2n-1 \geqslant t_1 > t_2 > \ldots > t_{l-1} > t_l = 3.$$

On écrit encore

$$I(h) = l \qquad \text{et} \qquad h \in A'_{n-1, l, \cdot, \cdot}.$$

On pose, en outre, $t_{l+1} = 2$.

PROPOSITION 4.9. — *Soit h définie par* (14) *et* (15). *Alors*

(i) $(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}) = (t_1, t_2, \ldots, t_{p-1})$;

(ii) *L'ensemble* $\{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\}$ *est une partie stricte de* $\{t_1, t_2, \ldots, t_{l+1}\}$. *En particulier, t_p n'est pas dans* $\{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\}$.

Preuve. — La partie (i) est une conséquence du théorème 4.8 (iii) et du fait que f et h coïncident sur $[s_p+1, 2n]$.

Avant d'établir (ii) montrons d'abord qu'on a l'inclusion large

$$(16) \qquad \{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\} \subset \{t_1, t_2, \ldots, t_{l+1}\}.$$

Si $i = 1$, la précédente inclusion est triviale. Supposons $i \geqslant 2$. Si $s_{i-1} \geqslant 2$, le théorème 4.8 (iii) implique que s_{i-1} appartient à

$\{ t_1, t_2, \ldots, t_l \}$; sinon, on a $s_{i-1} = 2 = t_{l+1}$, et s_{i-1} est donc dans $\{ t_1, t_2, \ldots, t_{l+1} \}$. Enfin, si $i \geqslant 3$, on a forcément $s_{i-2} \geqslant 3$. L'ensemble $\{ s_1, s_2, \ldots, s_{i-2} \}$ est donc contenu dans $\{ t_1, t_2, \ldots, t_l \}$. La relation (16) est donc bien établie.

Soit $(s'_p, f(s'_p))$ le doublon de $(s_p, f(s_p))$. Naturellement s'_p n'est pas dans $\{ s_1, s_2, \ldots, s_{i-1} \}$. Si l'on montre que $s'_p = t_p$, on aura du même coup démontré que l'inclusion (16) est stricte et aussi la partie (ii). Distinguons, une nouvelle fois, les cas :

(*a*) $p \leqslant i-1$;

(*b*) $p = i$.

(*a*) On a toujours $i \geqslant 2$ et $s'_p \geqslant 3$. Prenons $x < s'_p$. Si $x \neq s_p$, alors $f(x) < f(s'_p)$; d'où

$$h(x) \leqslant f(x) < f(s'_p) = h(s'_p).$$

Si $x = s_p$, alors $f(x) = f(s'_p)$; d'où $h(x) = f(s_{p+1}) < f(s'_p) = h(s'_p)$. Le point $(s'_p, h(s'_p)$ est donc saillant pour h. Par ailleurs, h ne possède pas d'autre point saillant sur $[s'_p, t_{p-1}]$, puisque f et g coïncident sur un tel intervalle. On a donc bien $s'_p = t_p$.

(*b*) D'après la proposition 4.7, on a $f(2) = 2$. Si $f(1) > 2$, alors $s'_p \geqslant 3$. On est donc ramené au cas (*a*). Si $f(1) = 2$, alors $s'_p = 2$. D'où $s_{p-1} = t_{p-1} = 3$ et $l = p-1$. On a encore $t_p = t_{l+1} = 2 = s'_p$.

Q. E. D.

Construction d'une bijection :

$$\Psi : \; f \to ((d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}), h)$$

de $A_{n\, i, \ldots}$ *sur* $\bigcup_{i-1 \leqslant l \leqslant n-1} \binom{[l+1]}{i-1} \times A'_{n-1\, l, \ldots}$.

L'application h est définie par (14) et (15), la suite $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1})$ par les équations

$$t_{d_k} = s_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant i-1).$$

D'après la proposition 4.9, la suite $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1})$ est définie de façon unique. On a, en particulier

$$1 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_{i-1} \leqslant l+1.$$
$$i-1 \leqslant l \leqslant n-1$$

et

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{p-1}) = (1, 2, \ldots, p-1).$$

Ces relations montrent que p est le plus petit entier qui n'appartient pas à la suite $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1})$.

Reprenons l'exemple 4.6. On a

$$I(h) = l = 7,$$

$$(t_{l+1}, t_l, \ldots, t_1) = (2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13)$$

et

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}) = (1, 2, 4, 5, 7).$$

L'entier $p = 3$ est le plus petit entier non contenu dans $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1})$.

PROPOSITION 4.10. — *L'application* Ψ *est bijective.*

Preuve. — Pour montrer que Ψ est bijective, considérons, l étant donné $(i-1 \leqslant l \leqslant n-1)$, un couple $((d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}), h)$ où

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}) \in \binom{[l+1]}{i-1} \quad \text{et} \quad h \in A'_{n-1, l, \ldots}.$$

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_l$ les positions des points saillants de h, et p le plus petit entier n'apparaissant pas dans $(d_1, d_2, \ldots, d_{i-1})$. Posons $t_{l+1} = 2$, puis $(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}) = (t_{d_1}, t_{d_2}, \ldots, t_{d_{i-1}})$, et enfin $s_i = 1$.

On définit l'antécédent f de la façon suivante :

(a) si $x \geqslant 3$ et $x \neq s_p, s_{p+1}, \ldots, s_{i-1}$, alors $f(x) = h(x)$;

(b) si $p < l+1$, alors $f(s_p) = h(t_p)$; si $p = l+1$, alors $f(s_p) = 2$;

(c) si $p+1 \leqslant k \leqslant i-1$, alors $f(s_k) = h(s_{k-1})$;

(d) *cas où* $p \leqslant i-1$:

si $s_{i-1} \geqslant 3$, alors $f(s_i) = h(s_{i-1})$ et $f(2) = 2$;

si $s_{i-1} = 2$, alors $f(s_i) = 2$;

(d') *cas où* $p = i$:

$f(s_i) = f(s_p)$ est donnée au (b), et $f(2) = 2$.

D'une part, les conditions (a), (b), (c), (d) et (d') suffisent à définir f sans ambiguïté. D'autre part, il découle du théorème 4.8 qu'elles sont nécessaires pour que $\Psi(f) = ((d_1, \ldots, d_{i-1}), h)$. Donc Ψ est bien bijective.

Q. E. D.

PROPOSITION 4.11. — *Soient* $f \in A_{n,i,\ldots}$ *et* $\Psi(f) = ((d_1, \ldots, d_{i-1}), h)$.

(i) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $J(h) = J(f)$ (*resp.* $J(h) = J(f)-1$) *est que* $d_{i-1} = l+1$ (*resp.* $d_{i-1} < l+1$).

(ii) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $K(h) = K(f)$ (*resp.* $K(h) = K(f)-1$) *est que* $d_1 = 1$ (*resp.* $d_1 > 1$).

Preuve :

(i) D'après le théorème 4.8 (iv) h a les mêmes points fixes que f sauf éventuellement $(2, f(2))$. Donc $J(h) = J(f)$ ou $J(f)-1$, et $J(h) = J(f)$ si, et seulement si, $f(2) \neq 2$. Or $f(2) \neq 2$ si, et seulement si, $s_{i-1} = 2$, donc si, et seulement si, $d_{i-1} = l+1$.

(ii) Les points maximaux de f sont situés sur l'intervalle $[s_1, 2n-1]$. Or, sur cet intervalle, f et h coïncident, sauf éventuellement en s_1. Donc $K(h) = K(f)$ ou $K(f)-1$, et $K(h) = K(f)$ si, et seulement si $t_1 = s_1$, donc si, et seulement si, $d_1 = 1$.

Q. E. D.

COROLLAIRE 4.12. — *La suite* $(a_{n,i,j,k})$ *satisfait à la récurrence* (3), (5).

Preuve. — On sait que $a_{1,1,1,1} = 1$. En outre, d'après les propositions 4.10 et 4.11, l'ensemble $A_{n,i,j,k}$ $(n \geqslant 2)$ est appliqué bijectivement par Ψ sur la réunion des ensembles

$$\cup \{((d_1, \ldots, d_{i-1}), h) : 1 < d_1 \leqslant d_{i-1} < l+1,\ h \in A'_{n-1,l,j-1,k-1}\},$$
$$\cup \{((d_1, \ldots, d_{i-1}), h) : 1 < d_1 \leqslant d_{i-1} = l+1,\ h \in A'_{n-1,l,j,k-1}\},$$
$$\cup \{((d_1, \ldots, d_{i-1}), h) : 1 = d_1 \leqslant d_{i-1} < l+1,\ h \in A'_{n-1,l,j-1,k}\},$$
$$\cup \{((d_1, \ldots, d_{i-1}), h) : 1 = d_1 \leqslant d_{i-1} = l+1,\ h \in A'_{n-1,l,j,k}\},$$

l'entier l décrivant l'intervalle $[i-1, n-1]$.

Or on a $a_{n,i,j,k} = \text{card}\, A'_{n\ i,j,k} = \text{card}\, A_{n,i,j,k}$ (il suffit de faire une translation d'indices pour mettre en bijection $A_{n,i,j,k}$ et $A'_{n,i,j,k}$). En écrivant que card $A_{n,i,j,k} = \text{card}\ \Psi(A_{n,i,j,k})$, on obtient précisément (5).

Q. E. D.

5. Involutions

Soit $1 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} \leqslant l+1$. L'application

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}) \to (c'_1, c'_2, \ldots, c'_{k-1}),$$

où $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_{k-1}) = (l+2-c_{k-1}, l+2-c_{k-2}, \ldots, l+2-c_1)$

est une involution de l'ensemble $\binom{[l+1]}{k-1}$. Prenons f dans A_n. Si $n = 1$, posons $f' = f'' = f$. Si $n \geqslant 2$, $I(f) = i$ et $K(f) = k$, considérons les suites

(17) $$f \xrightarrow{\Phi} ((c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}), g) \to ((c'_1, c'_2, \ldots, c'_{k-1}), g') \xrightarrow{\Phi^{-1}} f',$$

(18) $$f \xrightarrow{\Psi} ((d_1, d_2, \ldots, d_{i-1}), h) \to ((d'_1, d'_2, \ldots, d'_{i-1}), h'') \xrightarrow{\Psi^{-1}} f'',$$

où on a défini les involutions $g \to g'$ de A_{n-1} et $h \to h''$ de A'_{n-1} par induction sur n, et où Φ et Ψ sont les bijections définies en 3.1 et 4.10. On définit ainsi, par induction sur n, deux involutions de A_n, $f \to f'$ et $f \to f''$.

Proposition 5.1. — *Les involutions $f \to f'$ et $f \to f''$ de A_n ont les propriétés suivantes :*

(i) $I(f') = J(f)$, $J(f') = I(f)$, $K(f') = K(f)$;

(ii) $I(f'') = I(f)$, $J(f'') = K(f)$, $K(f'') = J(f)$.

Preuve. — C'est une simple conséquence des propositions 3.2 et 4.11. Supposons par exemple (i) vrai pour $n-1$, et prenons f dans $A_{n,j,i,k}$. Si par exemple $1 = c_1 \leqslant c_{k-1} < l+1$, g appartient à $A_{n-1,i,j-1,l}$. Par hypothèse de récurrence, g' appartient à $A_{n-1,j-1,i,l}$. Et comme $1 < c'_1 \leqslant c'_{k-1} = l+1$, f' appartient à $A_{n,j,i,k}$. Tous les autres cas se traitent de la même manière, et on en déduit que (i) est vrai pour n.

Q. E. D.

Exemple. — Voici comment on construit f' et f'' à partir d'un élément f de A_4

$I\ J\ K$	$x =$	1 2 3 4 5 6 7 8	$c_1, \ldots, c_{k-1}$	$l+1$
3 2 3	$f(x) =$	4 2 6 8 6 8 8 8		
2 2 3	$g(x) =$	4 2 6 6 6 6	2,4	4
1 2 2		4 2 4 4	2,3	3
1 1 1		2 2	1	2
			$c'_1, \ldots, c'_{k-1}$	
1 1 1		2 2	2	2
2 1 2		2 4 4 4	1,2	3
2 2 3		2 6 6 4 6 6	1,3	4
2 3 3	$f'(x) =$	2 8 6 4 8 6 8 8		

$I\ J\ K$	$x =$	1 2 3 4 5 6 7 8	$d_1, \ldots, d_{l-1}$	$l+1$	p
3 2 3	$f(x) =$	4 2 6 8 6 8 8 8			
3 1 2	$h(x) =$	4 6 6 8 8 8	2,3	4	1
2 1 2		6 8 8 8	1,3	3	2
1 1 1		8 8	2	2	1
			$d\ , \ldots, d'_{l-1}$		
1 1 1		8 8	1	2	2
2 2 1		6 6 8 8	1,3	3	2
3 2 1		4 6 6 6 8 8	2,3	4	1
3 3 2	$f''(x) =$	4 2 6 8 6 6 8 8			

TABLEAU II

n	$i\ j\ k$	$a_{n,i,j,k}$	$i\ j\ k$	$a_{n,i,j,k}$	$i\ j\ k$	$a_{n,i,j,k}$
1	1 1 1	1				
2	1 2 2	1				
3	1 2 3	1	1 3 3	1	2 2 2	2
	2 2 3	2				
4	1 2 3	1	1 2 4	2	1 3 3	4
	1 3 4	3	1 4 4	1	2 2 2	2
	2 2 3	8	2 2 4	6	2 3 3	12
	2 3 4	3	3 3 3	6		
5	1 2 3	3	1 2 4	8	1 2 5	6
	1 3 3	16	1 3 4	24	1 3 5	11
	1 4 4	22	1 4 5	6	1 5 5	1
	2 2 2	6	2 2 3	32	2 2 4	48
	2 2 5	22	2 3 3	84	2 3 4	74
	2 3 5	18	2 4 4	36	2 4 5	4
	3 3 3	126	3 3 4	60	3 3 5	6
	3 4 4	12				

6. Tables

Le tableau II donne les premières valeurs des coefficients $a_{n,i,j,k}$. En raison de la symétrie, seules les valeurs $a_{n,i,j,k}$ avec $i \leqslant j \leqslant k$ apparaissent dans le tableau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARLITZ (L.). — The Staudt-Clausen theorem, *Math. Magazine*, t. 34, 1961, p. 131-146.

[2] CARLITZ (L.). — A conjecture concerning Genocchi numbers, *Koninkl. norske Vidensk. Selsk. Sk.*, t. 9, 1972, p. 1-4.

[3] CARLITZ (L.). — Communication privée, 1974.

[4] DUMONT (D.). — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke math. J.*, t. 41, 1974, p. 305-318.

[5] GANDHI (J. M.). — A conjectured representation of Genocchi numbers, *Amer. math. Monthly*, t. 77, 1970, p. 505-506.

[6] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). — *An introduction to the theory of numbers*, 3rd édition. — Oxford, at the Clarendon Press, 1954.

[7] RIORDAN (J.) and STEIN (P.). — Proof of a conjecture on Genocchi numbers, *Discrete Math.*, t. 5, 1973, p. 381-388.

(Texte reçu le 13 octobre 1975.)

Dominique DUMONT et Dominique FOATA,
Département de Mathématique,
Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg.