BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS GRAMAIN

# Solutions indéfiniment dérivables et solutions presque-périodiques d'une équation de convolution

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 104 (1976), p. 401-408

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__401_0>

*Bull. Soc. math. France,*
104, 1976, p. 401-408.

# SOLUTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES ET SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES D'UNE ÉQUATION DE CONVOLUTION

PAR

FRANÇOIS GRAMAIN

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — Soit $\mu = \sum_{k=1}^{s} a_k \, \delta_{\alpha_k}$ une mesure complexe. Sous des hypothèses nécessaires sur les zéros de $\hat{\mu}$ et des hypothèses de type arithmétique sur les $a_k$ et $\alpha_k$, on montre que toute solution $C^\infty$ de l'équation de convolution $\mu \star f = 0$ est presque périodique au sens de Bohr. La preuve repose sur un résultat de Yves Meyer (Lemme 1) puis sur des considérations géométriques et un théorème de Baker sur des formes linéaires en des logarithmes de nombres algébriques.

## 1. Résultats et première réduction

THÉORÈME. — *Soit $s$ un entier $\geqslant 2$, et $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ un ensemble de nombres algébriques réels engendrant un* **Z***-module libre de rang 2. Soit $\mu = \sum_{k=1}^{s} a_k \, \delta_{\alpha_k}$ la mesure complexe de support $A$ chargeant le point $\alpha_k$ de la masse $a_k$ algébrique sur* **Q**. *Si les zéros de*

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi\alpha_k z)$$

*sont tous réels et simples, alors toute solution $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ de l'équation $f \star \mu(x) = \sum_{k=1}^{s} a_k f(x-\alpha_k) \equiv 0$ est presque-périodique (au sens de Bohr).*

La condition sur les zéros de $\hat{\mu}$ est nécessaire, car si elle n'est pas vérifiée, il existe une solution de l'équation de convolution $\mu \star f = 0$ qui est une exponentielle-polynôme non bornée. Une telle solution est indéfiniment dérivable, mais n'est pas presque-périodique. D'autre part, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse de type arithmétique.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le résultat suivant dû à Yves MEYER [2].

LEMME 1. — *Soit $\mu$ une mesure complexe portée par une partie finie de* **R**. *Si les zéros $z \in \mathbf{C}$ de $\hat{\mu}(z)$ sont tous réels, alors il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que toute solution continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de $f \star \mu = 0$ soit $O(|x|^m)$ à l'infini.*

Ce lemme permet de se ramener à montrer que l'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$ est un ensemble à étranglement lent.

DÉFINITION. — *Une partie* $\Lambda$ *de* $\mathbf{R}$ *est dite à étranglement lent si et seulement s'il existe deux constantes positives* $C$ *et* $N$ *telles que*

$$\lambda \text{ et } \lambda' \in \Lambda, \quad \lambda \neq \lambda' \text{ et } \lambda \neq 0 \text{ entraîne } |\lambda - \lambda'| \geqslant \frac{C}{|\lambda|^N}.$$

On a alors le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* $\mu$ *une mesure complexe portée par une partie finie de* $\mathbf{R}$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les zéros* $z \in \mathbf{C}$ *de* $\hat{\mu}(z)$ *sont tous réels et simples, et leur ensemble* $\Lambda$ *est à étranglement lent.*

(ii) *Toute solution* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ *de* $f \star \mu = 0$ *est presque-périodique.*

Dans la démonstration du lemme 2, on notera $C$ toutes les constantes absolues positives, quand il n'y aura pas de confusion possible.

Vérifions que (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ une fonction positive de support contenu dans $]-1, 1[$ telle que $\psi(0) = 1$. On a $f \star \mu = 0$, donc le spectre de $f$ est contenu dans l'ensemble $\Lambda$ des zéros de $\hat{\mu}$. Soit $\lambda \neq 0$ un point du spectre de $f$ et $h \in ]0,1[$ tel que $]\lambda - h, \lambda + h[ \cap \Lambda = \{\lambda\}$. Posons $\varphi(x) = \psi((x-\lambda)/h)$. Alors

$$\hat{f}(\lambda) = \langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} \hat{\varphi}(x) f(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} h \exp(-2i\pi\lambda hx)\, \hat{\psi}(hx) f(x)\, dx.$$

Si $h = 1$, cette intégrale est, en module, majorée par une constante, car $f$ est à croissance lente, et $\hat{\psi}$ à décroissance rapide. Si $h < 1$, on utilise la croissance de $f$ donnée par le lemme 1, soit $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^m$, et la décroissance de $\hat{\psi}$, par exemple $|\hat{\psi}(hx)| \leqslant C/h^{m+2}(1+|x|)^{m+2}$, pour obtenir $|\hat{f}(\lambda)| \leqslant C/h^{m+1}$.

La condition d'étranglement lent permet de choisir $h \geqslant C/|\lambda|^N$. On a donc, dans tous les cas, $|\hat{f}(\lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^K$, où $K > 0$ est indépendant de $f$.

Ordonnons $\Lambda$ en une suite strictement croissante $\lambda_n$, $n \in \mathbf{Z}$, telle que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_{-1} < 0$. La croissance de $\hat{\mu}$ prouve qu'on a alors $|\lambda_n| \geqslant C|n|$. Les coefficients de Fourier de toute solution continue $f$ de $f \star \mu = 0$ vérifient $|\hat{f}(\lambda_n)| \leqslant C(1+|\lambda_n|)^K$. Supposons que $f$ est de classe $\mathscr{C}^{K+2}$, et appliquons l'inégalité précédente à $g$, dérivée d'ordre $K+2$ de $f$, qui vérifie

la même équation de convolution. On obtient $|\hat{f}(\lambda_n)| \leqslant C(1+|\lambda_n|)^{-2}$, ce qui assure la convergence absolue de la série de Fourier de $f$.

La preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i) est immédiate. Si $\Lambda$ n'est pas à étranglement lent, il existe deux suites $\lambda_j$ et $\lambda'_j$ tendant vers l'infini, de points de $\Lambda$ tels que $|\lambda_j - \lambda'_j| \leqslant 2^{-j}/|\lambda_j|^j$. Soit alors $f(x) = \sum_{j\geqslant 0} \exp(i\lambda_j x) - \exp(i\lambda'_j x)$.

Toutes les séries dérivées convergent uniformément sur tout compact : La fonction $f$ est une solution $\mathscr{C}^\infty$ de $f \star \mu = 0$, mais elle n'est pas presque-périodique, et le lemme 2 est démontré.

La nécessité d'hypothèses de type arithmétique est alors justifiée par le résultat suivant : Si $\mu = (\delta_1 - \delta_0) \star (\delta_\alpha - \delta_0)$ avec $\alpha \notin \mathbf{Q}$, $\Lambda$ est à étranglement lent si, et seulement si, $\alpha$ n'est pas un nombre de Liouville.

Venons-en à la preuve du théorème. Une homothétie sur la variable permet de se ramener au cas où le $\mathbf{Z}$-module engendré par $A$ est $\mathbf{Z} \oplus \omega\,\mathbf{Z}$ (avec $\omega$ algébrique réel irrationnel), et il suffit de prouver le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Soit $s$ un entier $\geqslant 2$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ un ensemble de nombres algébriques réels engendrant le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z} \oplus \omega\,\mathbf{Z}$ libre de rang 2. Soit $a_1, \ldots, a_s$ des nombres algébriques non nuls. Si les zéros de*

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi\alpha_k z)$$

*sont réels et simples, alors ils forment un ensemble à étranglement lent.*

Toute la suite est consacrée à la démonstration de cette proposition. Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

LEMME 3. — *Soit $P \in \mathbf{C}[X, Y]$ un polynôme. L'intersection de la variété de $\mathbf{C}^2$, définie par $P(X, Y) = 0$ avec le bord distingué*

$$\partial D = \{X \in \mathbf{C};\ |X| = 1\} \times \{Y \in \mathbf{C};\ |Y| = 1\}$$

*du bidisque unité $D$, soit est finie, soit contient une courbe de $\partial D$.*

*Démonstration.* — Posons $X = X_1 + iX_2$ et $Y = Y_1 + iY_2$. En séparant le réel de l'imaginaire, on se ramène à étudier les solutions réelles d'un système polynômial réel du type suivant :

$$\begin{cases} Q(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = R(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = 0, \\ X_1^2 + X_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 = 1. \end{cases}$$

On peut paramétrer le cercle unité $\{X_1^2 + X_2^2 = 1\}$ (resp. $\{Y_1^2 + Y_2^2 = 1\}$) privé du point $(-1, 0)$ par

$$X_1 = \frac{1-U^2}{1+U^2}, \qquad X_2 = \frac{2U}{1+U^2}\left(\text{resp. } Y_1 = \frac{1-V^2}{1+V^2},\ Y_2 = \frac{2V^2}{1+V^2}\right).$$

Or $X = -1$, joint à $P(X, Y) = 0$ et $|Y| = 1$, fournit soit un nombre fini de solutions en $Y$, soit une courbe de $\partial D$. On peut donc se ramener à un nouveau système polynômial $Q_1(U, V) = R_1(U, V) = 0$. Si ce système a une infinité de solutions, elles forment une variété algébrique qui correspond à une partie de $\partial D$ contenant une courbe.

Notons $\overline{\mathbf{Q}}$ le corps des nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$, et $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ le corps des nombres algébriques réels. On a le résultat suivant :

LEMME 4. — *Soit* $P \in \overline{\mathbf{Q}}[X, Y]$ *un polynôme tel que le système*

$$\begin{cases} P(X, Y) = 0, \\ |X| = |Y| = 1 \end{cases}$$

*ait un nombre fini de solutions* $(X, Y) \in \mathbf{C}^2$. *Alors ces solutions sont algébriques* ($X$ *et* $Y \in \overline{\mathbf{Q}}$).

*Démonstration.* — Comme dans la démonstration précédente, séparons le réel de l'imaginaire. On obtient un système polynômial à coefficients dans $\mathbf{A}$ du type

$$\begin{cases} P(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = Q(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = 0, \\ X_1^2 + X_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 = 1, \end{cases}$$

et n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles.

*Premier cas :* $X = -1$. — On est ramené à un système

$$P(Y_1, Y_2) = Q(Y_1, Y_2) = Y_1^2 + Y_2^2 - 1 = 0$$

n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles. La valeur $Y = -1$ fournit éventuellement une solution algébrique. En posant

$$Y_1 = \frac{1 - V^2}{1 + V^2} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{2V}{1 + V^2},$$

on se ramène à un système $P(V) = Q(V) = 0$ ayant un nombre fini de solutions réelles. Les coefficients des polynômes sont dans $\mathbf{A}$, donc les solutions en $V$ sont algébriques, et il en est de même de $Y$.

*Deuxième cas :* $X \neq -1$ et $Y \neq -1$. — On paramètre $X$ et $Y$ comme dans la preuve du lemme 3, et on obtient le système polynômial

$$P(U, V) = Q(U, V) = 0$$

à coefficients dans $\mathbf{A}$ et n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles. En décomposant $P$ et $Q$ en produits de polynômes irréductibles, on se

ramène à un nombre fini de systèmes du même type avec $P$ et $Q$ irréductibles. Deux cas se présentent :

(*a*) $P \neq Q$ ou, plus précisément, $(P, Q) = 1$. — Soit $(u_0, v_0)$ une solution avec $u_0$ transcendant. Alors $v_0$ est algébrique sur $\mathbf{A}(u_0)$, donc $P(u_0, V)$ et $Q(u_0, V)$ sont des multiples du polynôme minimal de $v_0$. Comme $u_0$ est transcendant, $P(U, V)$ et $Q(U, V)$ auraient un diviseur commun non trivial, ce qui est exclu par l'hypothèse. Les solutions sont donc algébriques.

(*b*) $P = Q$. — Soit $(u_0, v_0)$ un zéro de $P$. S'il existe $v_1$ et $v_2$ tels que $P(u_0, v_1) < 0 < P(u_0, v_2)$, par continuité, pour $u$ voisin de $u_0$, on a $P(u, v_1) < 0 < P(u, v_2)$, donc une solution $(u, v)$; cela est exclu par l'hypothèse de finitude du nombre de solutions.

Donc $P(u_0, v)$ a un signe constant et, par suite

$$P(u_0, v_0) = P'_V(u_0, v_0) = 0.$$

Si $u_0$ est algébrique, il en est de même de $v_0$ (finitude du nombre de solutions). Si $u_0$ est transcendant, $v_0$ est algébrique sur $\mathbf{A}(u_0)$, et $P(u_0, V)$ est son polynôme minimal car $P(U, V)$ est irréductible. Or $P'_V(u_0, v_0) = 0$, donc $P(u_0, V)$ divise $P'_V(u_0, V)$, ce qui est absurde pour des raisons de degré. Cela achève la démonstration du lemme [1].

## 2. Interprétation géométrique du problème

On peut supposer $\omega > 0$. Posons $\alpha_k = m_k + n_k\omega$ avec $m_k$ et $n_k \in \mathbf{Z}$. On a

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi m_k t) \exp(-2i\pi n_k \omega t).$$

Considérons

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi m_k x) \exp(-2i\pi n_k y).$$

Les zéros de $\varphi$ étant réels, ils sont fournis par le système

$$\begin{cases} (1) & \Phi(x, y) = 0 \\ (2) & y = \omega x \end{cases} \qquad \text{où} \quad (x, y) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) = \mathbf{T}^2.$$

L'équation (1) représente une courbe analytique $\Gamma$ dans $\mathbf{T}^2$, et les zéros de $\varphi$ sont obtenus à partir de l'intersection de $\Gamma$ avec la droite $\Delta$ d'équa-

---

[1] Ce résultat est aussi une conséquence d'un théorème récent de Narasimhan [MURTHY and SWANN — *Vector bundles over affine surfaces* (à paraître)].

tion (2) du tore $\mathbf{T}^2$ ($\omega$ est irrationnel, il s'agit donc de l'enroulement dense d'une droite réelle sur $\mathbf{T}^2$). Le fait que les zéros de $\varphi$ sont simples se traduit de la manière suivante : La droite $\Delta$ ne coupe pas $\Gamma$ en un point singulier (multiple), et ne lui est pas tangente.

Dans tout ce qui suit, nous appellerons « points particuliers » les points singuliers de $\Gamma$ et les points de $\Gamma$ où la tangente a pour pente $\omega$. D'après le lemme 3, les points particuliers de $\Gamma$ sont en nombre fini. En effet, ils sont définis par le système

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \Phi(x, y) = 0, \\ \Phi'_x(x, y) + \omega \Phi'_y(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbf{T}^2$$

ou, en posant $X = \exp(-2i\pi x)$ et $Y = \exp(-2i\pi y)$ :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{s} a_k X^{m_k} Y^{n_k} = 0, \\ \sum_{k=1}^{s} (a_k m_k + n_k \omega) X^{m_k} Y^{n_k} = 0, \\ \text{avec} \\ (X, Y) \in \mathbf{C}^2, \ |X| = |Y| = 1. \end{cases}$$

Ces deux courbes algébriques de $\mathbf{C}^2$ ont un nombre fini de points d'intersection dans $\partial D$. En effet, supposons que ce n'est pas vrai. Alors elles ont une composante commune et, d'après le lemme 3, son intersection avec $\partial D$ contient une courbe. Cette dernière correspond, sur $\mathbf{T}^2$, à une courbe $\Gamma_1 \subset \Gamma$ qui rencontre la droite dense $\Delta$ en une infinité de points, sauf s'il s'agit d'une droite « parallèle » à $\Delta$ (enroulement de pente $\omega$ ne rencontrant pas $\Delta$). Mais ce cas est exclu : Soit $y = \omega x + b$ l'équation de $\Gamma_1$. On aurait identiquement $\Phi(x, \omega x + b) = 0$. Cela est impossible car, $\omega$ étant irrationnel, les fonctions $\exp(-2i\pi z)$ et $\exp(-2i\pi\omega z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{C}$.

Considérons alors un point d'intersection de $\Delta$ avec $\Gamma_1$. Les coordonnées de ce point vérifient le système (I). Il s'agit donc d'un point singulier de $\Gamma$, ou d'un point de $\Gamma$ où la tangente a pour pente $\omega$ donc est la droite $\Delta$. Ces deux possibilités sont exclues par l'hypothèse de simplicité des zéros de $\varphi$.

Le nombre des points particuliers de $\Gamma$ est donc fini. Montrons que les coordonnées $(X, Y)$ des points correspondants de $\partial D$ sont algébriques. D'après ce qui précède, ou bien le système (II) n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbf{C}^2$, et un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 4 (deuxième cas, $(a)$) montre qu'elles sont algébriques. Ou bien on est dans les hypothèses du lemme 4 avec $P(X, Y) = 0$, l'équation

de la courbe de $\mathbf{C}^2$ définie par (II); et on obtient bien des points algébriques.

Pour prouver que l'ensemble des zéros de $\varphi$ est à étranglement lent, il suffit de minorer la distance de deux zéros assez voisins de $\varphi$. Deux zéros de $\varphi$ sont voisins s'ils correspondent à l'intersection de $\Gamma$ avec un segment de $\Delta$ voisin d'un point particulier de $\Gamma$ (par segment de $\Delta$, on désigne une composante connexe de la trace de $\Delta$ sur un carré fondamental représentant $\mathbf{T}^2$). D'après la formule de Taylor, la distance de ces deux zéros voisins est comparable à une puissance de la distance du segment de $\Delta$ au point particulier, cette distance pouvant être mesurée parallèlement à l'axe des $x$. Le nombre des points particuliers étant fini, on peut majorer uniformément les puissances intervenant, et minorer uniformément les constantes de proportionnalité par une constante positive. Il suffit donc de minorer la distance d'un segment de $\Delta$ à un point particulier par une expression du même type que celle intervenant dans la définition de l'étranglement lent.

### 3. **Minoration finale : Un théorème de Baker**

Nous effectuerons les calculs dans le carré fondamental $(0,1)\times(0,1)$ représentant le tore $\mathbf{T}^2$. S'il exsite des points particuliers de $\Gamma$ sur le bord de ce carré, il suffit de faire un calcul analogue dans un carré déduit du précédent par une translation rationnelle.

Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point particulier de $\Gamma$. Considérons un segment de $\Delta$ voisin de $P_0$. Il s'agit de minorer la distance $|\xi_0 - \xi|$, où $\xi_0$ est l'intersection de la parallèle à $\Delta$ issue de $P_0$ avec l'axe des $x$, et $\xi$ est l'intersection du segment de $\Delta$ (ou de son prolongement) avec l'axe des $x$.

On a $\xi_0 = x_0 - (y_0/\omega)$.

Supposons que le segment de $\Delta$ considéré corresponde à $n \leqslant |y| < n+1$. On peut supposer $|n| \geqslant 1$, car les zéros de $\varphi$ sont isolés, donc $n = 0$ n'en fournit qu'un nombre fini, et leurs distances mutuelles sont minorées par une constante positive. Le point $\xi$ est l'intersection des droites d'équations $y = n$ et $y = \omega x$. On a donc $\xi \equiv n/\omega \pmod 1$, c'est-à-dire $\xi = (n/\omega) + p$ avec $p \in \mathbf{Z}$. On cherche le point $\xi$ le plus proche de $\xi_0$, or $\xi_0 \in (-(1/\omega), 1)$, et par suite $|p| = O(|n|)$, le $O$ ne dépendant pas du point particulier étudié.

On a

$$\xi_0 - \xi = x_0 - \frac{y_0}{\omega} - \frac{n}{\omega} - p.$$

Posons $X_0 = \exp(-2i\pi x_0)$ et $Y_0 = \exp(-2i\pi y_0)$. Il existe des déterminations du logarithme telles que

$$\log X_0 = -2i\pi x_0, \qquad \log Y_0 = -2i\pi y_0, \qquad \log(-1) = i\pi.$$

Alors $\xi_0 - \xi = (1/2i\pi\omega) L$, avec

$$L = -\omega \log X_0 + \log Y_0 - 2(n + p\omega)\log(-1).$$

D'après ce qui précède, $L$ est une forme linéaire à coefficients algébriques en des logarithmes de nombres algébriques, et elle est non nulle. On peut lui appliquer un théorème de BAKER [1] : Les degrés et les hauteurs de $-1$, $X_0$ et $Y_0$ sont majorés car les points particuliers de $\Gamma$ sont en nombre fini. Le degré des coefficients est majoré par le degré $d$ de $\omega$, et leur hauteur est majorée par un $O(|n|^d)$, car $|p| = O(|n|)$. On obtient alors

$$|L| \geqslant (C'|n|^d)^{-K} \qquad \text{soit} \qquad |L| \geqslant C|n|^{-N}$$

avec $C$ et $N$ positifs. Or les zéros de $\varphi$ étudiés sont de l'ordre de $|n|/\omega$; donc la proposition est démontrée.

*Remarque.* — Cette démonstration ne s'étend pas au cas où $A$ engendre un **Z**-module libre de rang supérieur à 2 car, dans ce cas, les points particuliers ne sont plus en nombre fini.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). — A central theorem in transcendence theory, "*Diophantine approximation and its applications*". *Proceedings of a conference held in Washington*, 1972. Edited by C. F. OSGOOD; p. 1-23. — New York, London, Academic Press, 1973.

[2] MEYER (Y.). — Comportement asymptotique des solutions de certaines équations de convolution, Analyse harmonique d'Orsay, 1975; et *J. Math. pures et appl.*, t. 55, 1976, p. 69-97.

(Texte reçu le 26 février 1976.)

François GRAMAIN,
Mathématiques, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.