

BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER

Fibrés vectoriels de rang 1 d'ordre fini

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 349-367

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__349_0

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FIBRÉS VECTORIELS DE RANG 1 D'ORDRE FINI

PAR

JOSEPH LE POTIER

[Poitiers]

RÉSUMÉ. — Soit X une variété quasi projective lisse sur $\mathbb{C}$ admettant une complétion lisse $\bar{X}$ telle que $Y = \bar{X} - X$ soit un diviseur lisse. Dans le groupe de Picard $\text{Pic}_{\text{an}}(X)$ des fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X , les fibrés qui portent une métrique hermitienne d'ordre fini λ le long de Y (λ réel ≥ 0) donnent une filtration croissante $G_\lambda \text{Pic}_{\text{an}}(X)$, que l'on décrit en utilisant la suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Pic}_{\text{an}}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}),$$

où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X .

Soient $\bar{X}$ une variété algébrique projective lisse sur $\mathbb{C}$, et Y un diviseur lisse de $\bar{X}$. On se propose d'étudier les fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur la variété algébrique $X = \bar{X} - Y$, et de préciser certains résultats de CORNalba et GRIFFITHS ([1], [3]) concernant la croissance de ces fibrés.

1. Les filtrations G_i ; résultats et exemples

1.1. LA MÉTRIQUE DE POINCARÉ. — Soient L_Y le fibré de rang 1 sur $\bar{X}$ associé à Y , et s une section holomorphe de L_Y , transverse à la section nulle, dont le lieu des zéros est Y . Soit $||^2$ une métrique hermitienne sur L_Y , telle que $|s| < 1$. Considérons la forme de type (1,1) sur X :

$$\begin{aligned} & dd^c \log \frac{1}{|s|^2 (\log |s|^2)^2} \\ &= \left(1 + \frac{2}{\log |s|^2}\right) dd^c \log \frac{1}{|s|^2} + 4\sqrt{-1} \frac{d' \log |s|^2 \wedge \overline{d' \log |s|^2}}{(\log |s|^2)^2}. \end{aligned}$$

La forme $dd^c \log (1/|s|^2)$ est la forme réelle de courbure du fibré L_Y et est donc de classe C^∞ sur $\bar{X}$; si θ est une forme de type (1,1), réelle, donnant sur $\bar{X}$ une métrique kählérienne, pour A réel positif assez grand, à la forme

$$A\theta + dd^c \log \frac{1}{|s|^2 (\log |s|^2)^2}$$

est associée une métrique sur X qu'on appelle *métrique de Poincaré*. Une telle métrique sera fixée dans toute la suite.

Pour la métrique de Poincaré, on a, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$|d' \log |s|^2|_{\text{Poincaré}} \leq \text{Cte} |\log |s|| \leq \frac{\text{Cte}}{|s|^\varepsilon}.$$

1.2. MÉTRIQUES D'ORDRE FINI. — Soient E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X , h une métrique hermitienne sur E , $c(E, h)$ la forme de Chern associée, et λ un nombre réel ≥ 0 . On dira que la métrique h est *d'ordre fini* λ le long de Y si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante C telle que

$$|c(E, h)|_{\text{Poincaré}} \leq \frac{C}{|s|^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Par exemple, tout fibré vectoriel algébrique de rang 1 sur X est d'ordre 0, car il se prolonge à $\bar{X}$; nous verrons par la suite que la réciproque est fausse.

Rappelons le résultat fondamental de CORNALBA et GRIFFITHS ([1], th. 3). Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $\bar{X}$, et supposons qu'il existe sur E une métrique hermitienne h d'ordre fini λ ; alors il existe un recouvrement ouvert (U_i) de $\bar{X}$ et des sections holomorphes non nulles f_i de E sur $V_i = U_i - Y$, telles que, sur $V_i \cap V_j$, les fonctions de transition $f_{i,j} = f_i/f_j$ soient de la forme

$$f_{i,j} = \varepsilon_{i,j} \exp(g_{i,j}/s^l) s^{k_{i,j}},$$

où l est la partie entière de λ , $k_{i,j}$ un entier relatif, $g_{i,j}$ une section holomorphe de L_Y^1 sur $U_i \cap U_j$, et $\varepsilon_{i,j}$ une section holomorphe non nulle de $L_Y^{-k_{i,j}}$ sur $U_i \cap U_j$.

On obtient immédiatement la conséquence suivante :

PROPOSITION 1. — *Supposons qu'il existe sur E une métrique hermitienne h d'ordre fini λ le long de Y ; soit l la partie entière de λ ; alors il existe sur E une métrique hermitienne h' d'ordre fini l le long de Y .*

Démonstration. — Soit (η_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) de $\bar{X}$. Considérons la fonction de classe C^∞ , $\rho_i : V_i \rightarrow]0, +\infty[$, définie par $\rho_i = \prod_j |f_{i,j}|^{2\eta_j}$.

Sur l'ouvert $V_i \cap V_j$, on a $\rho_i = |f_{i,j}|^2 \rho_j$, et donc le système (ρ_i) définit sur E une métrique hermitienne h' dont la forme de Chern est donnée par

$$\begin{aligned} c(E, h')|_{V_i} &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'' d' \log \rho_i \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'' d' (\sum_j \eta_j \log |f_{i,j}|^2). \end{aligned}$$

La proposition 1 s'obtient par dérivation, en remarquant que

$$\log |f_{i,j}|^2 = 2 R_e \left(\frac{g_{i,j}}{s^l} \right) + k_{i,j} \log |s|^2 + \log |\varepsilon_{i,j}|^2,$$

et en utilisant la majoration donnée au paragraphe 1.1 :

$$|d' \log |s|^2|_{\text{Poincaré}} \leq \frac{\text{Cte}}{|s|^e}.$$

L'expression de $c(E, h')$ est assez compliquée; la proposition suivante donne pour la classe de Chern $c_c(E)$ de E dans $H^2(X, \mathbb{C})$ un représentant qui s'écrit de manière plus simple.

PROPOSITION 2. — Soit l un entier ≥ 0 . S'il existe sur E une métrique hermitienne d'ordre fini l le long de Y , on peut représenter la classe de Chern $c_c(E)$ de E dans $H^2(X, \mathbb{C})$ par une forme différentielle $\varphi \in A^2(X)$ s'écrivant :

$$\varphi = \frac{\alpha}{s^l} d' \log |s|^2 + \frac{\beta}{s^l},$$

avec $\alpha \in A^1(\bar{X}, L_Y^l)$, $\beta \in A^{1,1}(\bar{X}, L_Y^l) + A^{2,0}(\bar{X}, L_Y^l)$.

Comme habituellement, $A^r(\bar{X}, L_Y^l)$ (resp. $A^{p,q}(\bar{X}, L_Y^l)$) désigne l'espace des formes différentielles de classe C^∞ sur $\bar{X}$, de degré r (resp. de type p, q) à valeurs dans le fibré L_Y^l .

Démonstration. — On peut écrire, avec les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 1 :

$$c(E, h')|_{V_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d(\sum_j \eta_j d' \log |f_{i,j}|^2) + d\gamma|_{V_i},$$

où γ est la forme de degré 1 globale sur X , définie par

$$\gamma|_{V_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d' \eta_j \log |f_{i,j}|^2.$$

Ainsi, la forme différentielle $\varphi \in A^2(X)$, définie sur V_i par

$$\begin{aligned}\varphi|_{V_i} &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d(\sum_j \eta_j d' \log |f_{i,j}|^2) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d\eta_j \wedge d' \log |f_{i,j}|^2\end{aligned}$$

représente la classe de Chern $c_c(E)$, et s'écrit bien sous la forme voulue, comme on le voit en utilisant l'expression de $\log |f_{i,j}|^2$.

On désigne par $\text{Pic}_{\text{an}}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X , et par $G_\lambda \subseteq \text{Pic}_{\text{an}}(X)$ l'ensemble des classes de fibrés qui portent une métrique hermitienne d'ordre fini $\leq \lambda$ le long de Y . Si l est la partie entière de λ , on a donc, d'après la proposition 1 : $G_\lambda = G_l$.

Les sous-groupes $(G_l)_{l \in \mathbb{N}}$ forment une filtration croissante de $\text{Pic}_{\text{an}}(X)$; CORNALBA et GRIFFITHS ont montré ([1], th. 4) que si X est affine, on a

$$\text{Pic}_{\text{an}}(X) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l.$$

L'objet de ce travail est de décrire cette filtration; la variété X ne sera pas supposée affine.

1.3. LE MORPHISME DE HODGE-DELIBNE. — Soit $\Omega_{\bar{X}}^p \langle Y \rangle$ le faisceau des p -formes différentielles méromorphes sur $\bar{X}$, à pôle logarithmique le long de Y [2] : c'est le faisceau des formes différentielles φ méromorphes sur $\bar{X}$, ayant au pis un pôle simple le long de Y , et dont la différentielle $d\varphi$ est encore à pôle simple le long de Y . Si U est un ouvert de Stein de $\bar{X}$, dans lequel Y est donné par l'équation $f = 0$, l'espace des sections de $\Omega_{\bar{X}}^p \langle Y \rangle$ au-dessus de U est obtenu comme espace des p -formes différentielles holomorphes sur $U - Y$ qui s'écrivent $\alpha(df/f) + \beta$, avec α et β formes holomorphes dans U . Pour la dérivation extérieure, on obtient ainsi un complexe $\Omega_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle$, appelé complexe de De Rham logarithmique de $\bar{X}$ le long de Y .

D'après P. DELIGNE, l'hypercohomologie $H^k(\bar{X}, \Omega_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle)$ s'identifie à $H^k(X, \mathbb{C})$, et la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = H^q(\bar{X}, \Omega_{\bar{X}}^p \langle Y \rangle) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C}),$$

induit sur l'aboutissement une filtration décroissante F , appelée filtration de Hodge-Deligne; en particulier, $F^0 H^k(X, \mathbb{C}) = H^k(X, \mathbb{C})$, et le sous-espace $F^1 H^k(X, \mathbb{C})$ est le noyau du morphisme

$$H^k(\bar{X}, \Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle) \rightarrow H^k(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}),$$

induit par le morphisme de complexes $\Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}$ donné par l'identité de $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ en degré 0.

1.4. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS. — Soient $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X , $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau des fonctions holomorphes inversibles. Compte tenu de l'identification $\text{Pic}_{\text{an}}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, à la suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0,$$

on associe la suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{exp}} \text{Pic}_{\text{an}}(X) \xrightarrow{c_{\mathbb{Z}}} H^2(X, \mathbb{Z}),$$

où $c_{\mathbb{Z}}$ est l'application qui à un fibré associe sa classe de Chern entière. On munit $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ de la filtration croissante $G = (G_l)_{l \in \mathbb{N}}$, définie par

$$G_l H^1(X, \mathcal{O}_X) = \text{Im}(H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(lY)) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)),$$

où $\mathcal{O}_{\bar{X}}(lY)$ est le faisceau sur $\bar{X}$ des fonctions méromorphes qui présentent au pis un pôle d'ordre l le long de Y . De même, $H^2(X, \mathbb{Z})$ sera muni de la filtration croissante, notée encore $(G_l)_{l \in \mathbb{N}}$, définie par

$$G_l H^2(X, \mathbb{Z}) = \text{Ker}(H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(lY))),$$

où la flèche écrite est la composée des flèches naturelles

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) \rightarrow H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(lY)).$$

La filtration ainsi obtenue sur $H^2(X, \mathbb{Z})$ est stationnaire, car c'est un groupe abélien de type fini.

THÉORÈME. — *Dans la suite exacte*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{exp}} \text{Pic}_{\text{an}}(X) \xrightarrow{c_{\mathbb{Z}}} H^2(X, \mathbb{Z}),$$

les morphismes sont, pour les filtrations ci-dessus, des morphismes d'objets filtrés, et ces morphismes sont stricts.

COROLLAIRE 1. — Supposons $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors l'isomorphisme

$$c_Z: \text{Pic}_{\text{an}}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme d'objets filtrés, et les filtrations sont stationnaires. Ceci est vrai en particulier si X est de Stein.

COROLLAIRE 2. — Supposons $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(Y)) = 0$. Alors la filtration de $\text{Pic}_{\text{an}}(X)$, décrite ci-dessus, se réduit aux termes $G_0 \subseteq G_1$, et on a :

$$1^\circ G_1 = \text{Pic}_{\text{an}}(X);$$

$2^\circ G_0$ est l'image réciproque de $F^1 H^2(X, \mathbb{C})$ par l'application $c_{\mathbb{C}}: \text{Pic}_{\text{an}}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ qui à un fibré associe sa classe de Chern complexe.

Ces résultats sont vrais en particulier lorsque Y est suffisamment ample.

3° Si de plus $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) \neq 0$, alors $G_0 \neq G_1$.

Démonstration. — Seule l'assertion 3° demande une explication. Puisque la variété X est kählérienne, l'application

$$H^2(\bar{X}, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$$

est surjective; il en résulte que l'on peut trouver une classe de cohomologie entière $\xi \in H^2(\bar{X}, \mathbb{Z})$ dont l'image dans $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ est non nulle. Alors $\xi|_X$ est la classe de Chern d'un fibré holomorphe de rang 1 qui ne porte pas de métrique d'ordre 0.

Pour les fibrés qui se prolongent topologiquement à $\bar{X}$, GRIFFITHS et CORNALBA ([1], th. 5) donnent des résultats analogues à ceux du corollaire 2. Signalons aussi que les fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X , qui sont isomorphes à des fibrés algébriques, correspondent aux fibrés de G_0 dont le résidu dans $H^1(Y, \mathbb{C})$ est nul, c'est-à-dire qui se prolongent topologiquement à $\bar{X}$. Ce complément, dû à GRIFFITHS ([3], th. 3), est vrai sans hypothèse sur Y ou X , et s'obtient aussi comme conséquence de notre théorème.

COROLLAIRE 3. — Soit $\mathcal{O}_{X, \text{alg}}$ le faisceau des fonctions algébriques régulières sur la variété algébrique X ; posons

$$G_{0, f} \text{Pic}_{\text{an}}(X) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} G_l \text{Pic}_{\text{an}}(X).$$

On a une suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}) \rightarrow G_{0, f} \text{Pic}_{\text{an}}(X) \xrightarrow{\mathbb{Z}} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}).$$

Démonstration. — Ceci résulte de l'identification

$$H^q(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}) = \varinjlim H^q(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(lY)).$$

COROLLAIRE 4. — Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}) = 0$, et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Alors il existe, sur tout fibré vectoriel holomorphe de rang 1 au-dessus de X , une métrique d'ordre fini. Ceci arrive en particulier dans les cas suivants :

- (a) X est affine;
- (b) X est de dimension 2, et $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Le résultat (a) n'est autre que celui de CORNALBA et GRIFFITHS ([1], th. 4).

COROLLAIRE 5. — Lorsque la flèche naturelle

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

n'est pas surjective, il existe sur X des fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X qui ne portent aucune métrique d'ordre fini.

Démonstration. — L'hypothèse entraîne que la flèche

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$$

n'est pas surjective, car $H^1(X, \mathbb{Z})$ est au plus dénombrable. Un élément du conoyau de cette flèche donne, dans $\text{Pic}_{\text{an}}(X)$, une classe qui n'est pas dans $G_{0, f} \text{Pic}_{\text{an}}(X)$ d'après le corollaire 3.

1.5. EXEMPLES. — (A) Soit Y une courbe lisse de $\bar{X} = P_2(\mathbb{C})$, de degré $d > 1$, et donc de genre $g = (1/2)(d-1)(d-2)$; $X = \bar{X} - Y$ est affine, et l'on a en outre $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$, donc tout fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $X = \bar{X} - Y$ a une métrique d'ordre 0.

Dans le cas présent

$$\text{Pic}_{\text{an}}(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{2g}$$

comme il résulte de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(Y, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & & & \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

où la première flèche est la multiplication par d . Dans cette décomposition, le sous-groupe $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ correspond exactement aux fibrés vectoriels algébriques de rang 1 sur X ; les autres fibrés ont une métrique d'ordre 0, mais ne sont pas algébriques.

Ceci précise ainsi la proposition 4.8 de GRIFFITHS dans [3].

(B) Soit $X = \mathbf{C}^2 - \{0\}$; on prendra pour $\bar{X}$ l'éclaté de l'origine dans $P_2(\mathbf{C})$. Le morphisme naturel $H^1(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est alors injectif, mais n'est pas surjectif. En effet, le calcul de $H^1(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}})$ à l'aide du recouvrement affine

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2; x \neq 0\}; \quad U_2 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2; y \neq 0\}$$

permet d'identifier $H^1(X, \mathcal{O}_{X, \text{alg}})$ à l'espace vectoriel des fractions rationnelles $\sum_{v < 0, \mu < 0} a_{v\mu} x^v y^\mu$ tandis que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ s'identifie à l'espace des séries convergentes sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \sum_{v < 0, \mu < 0} b_{v\mu} x^v y^\mu$.

Il résulte du corollaire 5 qu'il existe sur X des fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 qui ne sont pas d'ordre fini le long de $Y = \bar{X} - X$; par exemple le fibré obtenu en recollant les fibrés triviaux $U_1 \times \mathbf{C}$ et $U_2 \times \mathbf{C}$ au-dessus de $U_{12} = U_1 \cap U_2$ grâce à l'automorphisme

$$U_{12} \times \mathbf{C} \rightarrow U_{12} \times \mathbf{C} \\ ((x, y), t) \mapsto ((x, y), \exp(\sin 1/xy) t).$$

n'est pas d'ordre fini le long de Y .

(C) Soient Λ le sous-groupe discret de $\mathbf{C}^2$ engendré par la base (e_1, e_2) de $\mathbf{C}^2$, et $X = \mathbf{C}^2/\Lambda$. Soit z un vecteur de $\mathbf{C}^2$ tel que les vecteurs (e_1, e_2, z, iz) soient $\mathbf{R}$ -indépendants. Si $\pi: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ est une forme $\mathbf{C}$ -linéaire de noyau la droite engendrée par z , $\pi(\Lambda)$ est un réseau dans $\mathbf{C}$; la projection induite par π :

$$X = \mathbf{C}^2/\Lambda \rightarrow \mathbf{C}/\pi(\Lambda) = \Gamma$$

permet de regarder X comme fibré principal analytique de groupe structural $\mathbf{C}$, non trivial, au-dessus de la courbe elliptique Γ . Ce fibré est en fait algébrique, ce qui donne à X une structure de variété algébrique; on prendra pour $\bar{X}$ le fibré au-dessus de Γ de fibre $P_1(\mathbf{C})$ associé au fibré principal ci-dessus.

Comme variété analytique, $X \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, et X est donc de Stein ⁽¹⁾. On a donc

$$\text{Pic}_{\text{an}}(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z},$$

⁽¹⁾ Ainsi que l'a remarqué J.-P. SERRE, cette variété algébrique n'est pas affine.

et tous ces fibrés sont isomorphes à des fibrés algébriques : en effet, la restriction $H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ est surjective, et $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$ ce qui montre que tout fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X se prolonge analytiquement à $\bar{X}$.

Pour la structure de variété algébrique X' sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, héritée du plongement $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow P_2(\mathbb{C}) = \bar{X}'$, aucun des fibrés analytiques non triviaux n'est isomorphe à un fibré algébrique. Bien que le diviseur à l'infini $Y' = \bar{X}' - X'$ ait ici des croisements normaux, on peut étendre à cette situation la définition des fibrés d'ordre fini; tous les fibrés de $\text{Pic}_{an}(X')$ sont d'ordre 0 le long de Y' [3].

(D) Soit M une surface de Riemann de genre $g > 0$; considérons la variété algébrique $X_1 = X \times M$, où X est la variété introduite dans l'exemple C, plongée dans $\bar{X}_1 = \bar{X} \times M$. On a une suite exacte

$$\begin{array}{c} \text{Pic}_{an}(X_1) \rightarrow H^2(X_1, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\ \parallel \\ \mathbb{Z}^{4g+2} \end{array}$$

qui résulte de $H^2(X_1, \mathcal{O}_{\bar{X}_1}) = 0$. Dans cet exemple, la flèche

$$H^2(X_1, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\bar{X}_1, \mathcal{O}_{\bar{X}_1}) \simeq \mathbb{C}^g$$

est non nulle, donc il existe une classe entière $\xi \in H^2(X_1, \mathbb{Z})$ dont l'image est non nulle dans $H^2(\bar{X}_1, \mathcal{O}_{\bar{X}_1})$. On en déduit que $G_0 \neq G_1$. En fait, la filtration de $\text{Pic}_{an}(X_1)$ se réduit ici à

$$G_0 \subsetneq G_1 = \text{Pic}_{an}(X_1)$$

comme on le voit en remarquant que la filtration de $H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ se réduit à $G_0 = H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$, et celle de $H^2(X_1, \mathbb{Z})$ à $G_0 \subset G_1 = H^2(X_1, \mathbb{Z})$, car la flèche

$$H^2(\bar{X}_1, \mathcal{O}_{\bar{X}_1}) \rightarrow H^2(\bar{X}_1, \mathcal{O}_{\bar{X}_1}(Y_1)),$$

où $Y_1 = \bar{X}_1 - X_1$, est nulle. Par ailleurs, les éléments de G_0 correspondent aux fibrés algébriques, car la flèche $H^2(\bar{X}_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_1, \mathbb{Z})$ est surjective.

Par contre, sur la variété algébrique $X'_1 = X' \times M$, qui est analytiquement isomorphe à X_1 , tous ces fibrés sont d'ordre 0 le long du diviseur $Y'_1 = P_2(\mathbb{C}) \times M - X'_1$.

2. Le morphisme $\exp$

2.1. COMPATIBILITÉ AUX FILTRATIONS. — Soit $g \in H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(L_Y^l))$ une classe de cohomologie, et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $\bar{X}$ tel que g soit représenté, en cohomologie de Čech, par un 1-cocycle

$$(g_{i,j}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(L_Y^l)).$$

A ce cocycle est associé un fibré vectoriel de rang 1 holomorphe sur X , défini par les fonctions de transition $f_{i,j} = \exp(g_{i,j}/s^l)$, dont la classe d'isomorphisme dans $\text{Pic}_{\text{an}}(X)$, qui ne dépend que de g , est par définition $\exp g$.

La démonstration de la proposition 1 montre qu'il existe sur ce fibré une métrique hermitienne d'ordre $\leq l$, et donc

$$\exp(G_l H^1(X, \mathcal{O}_X)) \subseteq G_l \text{Pic}_{\text{an}}(X).$$

2.2. UNE INTERPRÉTATION DU RÉSIDU DE $c_Z(E)$. — Soient E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X sur lequel existe une métrique d'ordre fini $\leq l$ le long de Y , et $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de $\bar{X}$ par des ouverts de Stein tel que E soit représenté sur le recouvrement $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap X$ par les fonctions de transition

$$f_{i,j} = \varepsilon_{i,j} \exp(g_{i,j}/s^l) s^{k_{i,j}}$$

(cf. § 1.2). Considérons le complexe des cochaînes de Čech $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)$ du recouvrement $\mathcal{V}$ de X à valeurs dans le complexe de De Rham holomorphe $\Omega_X^\bullet$: par définition

$$\check{C}^r(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)^* = \bigoplus_{p+q=r} \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega_X^q),$$

et sa différentielle est donnée par $\delta + (-1)^p d$, où δ est la différentielle de Čech, et d la dérivation extérieure. On a un morphisme canonique

$$H^r(\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)) \rightarrow H^r(X, \mathbb{C})$$

obtenu en plongeant le complexe $\Omega_X^\bullet$ dans le complexe de De Rham $A_X^\bullet$ des formes de classe C^∞ , et en identifiant

$$H^r(\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, A_X^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^r(X, \mathbb{C}),$$

où $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, A_X^\bullet)$ est défini de manière analogue à $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)$. Le recouvrement $\mathcal{V}$ étant de Stein, ce morphisme est en fait un isomorphisme.

LEMME 1. — Dans l'isomorphisme ci-dessus, le cocycle

$$(1/2 \pi \sqrt{-1}) d \log f_{i,j})$$

a pour image la classe de Chern $c_c(E)$ de E dans $H^2(X, \mathbb{C})$.

Démonstration. — Posons, avec les notations du paragraphe 1.2 :

$$\omega_i = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j \eta_j d \log f_{i,j}.$$

Le système $\omega = (\omega_i)$ définit une cochaîne de $\check{C}^0(\mathcal{V}, A_X^1)$, et la démonstration de la proposition 2 a montré que le cocycle $d\omega = (d\omega_i)$ de $\check{C}^0(\mathcal{V}, A_X^2)$ donne un représentant pour $c_c(E)$. Le cocycle

$$-\delta\omega = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d \log f_{i,j} \right),$$

qui lui est cohomologue dans $\check{C}^*(\mathcal{V}, A_X^*)$, est aussi un représentant pour $c_c(E)$.

LEMME 2. — Le cocycle $k = (k_{i,j}) \in \check{C}^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathbb{Z})$ a pour image dans $H^1(Y, \mathbb{Z})$ le résidu de la classe de Chern $c_Z(E)$.

Démonstration. — Le morphisme résidu $\text{res} : \Omega_{\bar{X}} \langle Y \rangle \rightarrow \Omega_Y^*(-1)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle)) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{C}) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ H^1(\check{C}^*(\mathcal{U} \cap Y, \Omega_Y^*)) & \rightarrow & H^1(Y, \mathbb{C}) \end{array}$$

Soit $i : X \rightarrow \bar{X}$ l'injection canonique; le morphisme canonique

$$\Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle \rightarrow i_* \Omega_X^*$$

induit un isomorphisme en cohomologie

$$H^r(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle)) \rightarrow H^r(\check{C}^*(\mathcal{V}, \Omega_X^*))$$

comme on le voit en utilisant le fait que, pour tout ouvert de Stein U de $\bar{X}$, le morphisme de restriction

$$\Gamma(U, \Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle) \rightarrow \Gamma(U \cap X, \Omega_X^*)$$

est un quasi-isomorphisme d'après DELIGNE et l'une des suites spectrales

d'un bicomplexe. Plus précisément, si on considère les sous-complexes

$$F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle) \subset \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle)$$

et

$$F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet) \subset \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet),$$

engendrés par les cochaînes de type (p, q) , avec $p \neq 0$, le morphisme de restriction

$$F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle) \rightarrow F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)$$

induit un isomorphisme en cohomologie. Le cocycle

$$\check{c} = (1/2 \pi \sqrt{-1}) d \log f_{i,j}$$

de $F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)$ peut donc s'écrire :

$$\check{c} = a + b + (\delta - d) \rho,$$

avec $a \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega_{\bar{X}}^1 \langle Y \rangle)$, $b \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega_{\bar{X}}^0 \langle Y \rangle)$ et $\rho \in \check{C}^1(\mathcal{V}, \Omega_X^0)$.

On obtient en particulier, en décomposant en types

$$\check{c} = a - d\rho.$$

D'autre part, en utilisant la connexion associée à la métrique sur le fibré L_Y , on peut écrire sur $V_{i,j} = V_i \cap V_j$:

$$\check{c}_{i,j} = d \left(\frac{g_{i,j}}{s^l} \right) + k_{i,j} \frac{Ds}{s} + h_{i,j},$$

où $h_{i,j}$ est de classe C^∞ sur $U_i \cap U_j$. Il en résulte que $k = (k_{i,j})$ est le résidu de a , et aussi celui de $a+b$. Comme $a+b$ est cohomologue à $\check{c}$ dans $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega_X^\bullet)$, il a aussi pour image $c_{\mathbf{C}}(E)$ dans $H^2(X, \mathbf{C})$. Du diagramme commutatif ci-dessus résulte que l'image de k dans $H^1(Y, \mathbf{C})$ est le résidu de $c_{\mathbf{C}}(E)$. On obtient alors le lemme 2 en remarquant que le morphisme $H^1(Y, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(Y, \mathbf{C})$ est injectif.

2.3. LE MORPHISME $\exp$ EST STRICT. — Supposons qu'outre les hypothèses du paragraphe 2.2, le fibré E provienne de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, ou si l'on préfère, que sa classe de Chern $c_{\mathbf{Z}}(E)$ soit nulle. L'application

$$H^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(Y, \mathbf{Z})$$

étant injective, le cocycle $k = (k_{i,j})$ est cohomologue à 0; ainsi il existe $(k_i) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$ tel que $k_i - k_j = k_{i,j}$ chaque fois que $U_i \cap U_j \cap Y \neq \emptyset$.

Quitte à le raffiner au besoin, on peut supposer que le recouvrement $\mathcal{U}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) Sur U_i le fibré L_Y est trivial; on désignera par e_i une section non nulle de L_Y sur U_i , et on posera, sur U_i , $s = s_i e_i$;

(b) Les ouverts U_i et $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ sont simplement connexes. On peut alors écrire, sur $V_{i,j}$:

$$\frac{f_i}{s_i^{k_i}} = \exp(g'_{i,j}/s^l) \frac{f_j}{s_j^{k_j}},$$

avec $g'_{i,j}$ section holomorphe de L_Y^l sur $U_{i,j}$. Ainsi les sections $f'_i = f_i/s_i^{k_i}$ de E sur V_i définissent des trivialisations de E avec, pour fonctions de transition

$$f'_{i,j} = \exp(g'_{i,j}/s^l).$$

Considérons le cocycle $\check{c}' \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$:

$$\check{c}' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \delta\left(\frac{g'_{i,j}}{s^l}\right).$$

Par le morphisme canonique

$$\begin{array}{c} H^2(\mathcal{U}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z}) \\ \downarrow \\ H^2(\bar{X}, \mathbf{Z}) \end{array}$$

la classe de $\check{c}'$ a pour image $c_Z(E)$, qui est nulle par hypothèse. Supposons d'abord Y connexe; le noyau du morphisme $H^2(\bar{X}, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$ est engendré par la classe de Chern $c_Z(L_Y)$, et donc la classe $(\check{c}')$ de $\check{c}'$ dans $H^2(\bar{X}, \mathbf{Z})$ s'écrit $(\check{c}') = \mu c_Z(L_Y)$, avec $\mu \in \mathbf{Z}$. Si l'on écrit, sur $U_{i,j}$:

$$e_i = e^{h_{i,j}} e_j,$$

avec $h_{i,j}$ holomorphe sur $U_{i,j}$, $c_Z(L_Y)$ est l'image dans $H^2(\bar{X}, \mathbf{Z})$ du cocycle $\check{\gamma} \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$:

$$\check{\gamma} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \delta(h_{i,j}),$$

et l'on a donc $\check{c}' = \mu \check{\gamma} + \delta v$, avec $v = (v_{i,j}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$. Les sections $f'_i s_i^{\mu}$ de E sur V_i définissent de nouvelles trivialisations de E , avec, pour fonctions de transition

$$\begin{aligned} f''_{i,j} &= \exp(g'_{i,j}/s^l - \mu h_{i,j}) \\ &= \exp g''_{i,j}, \end{aligned}$$

avec $g''_{i,j} = (g'_{i,j}/s^l) - \mu h_{i,j} - 2\pi\sqrt{-1}v_{i,j}$. Mais $(g''_{i,j})$ définit un cocycle de $\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(lX))$ dont l'image par l'application exponentielle est isomorphe au fibré E . Ainsi

$$G_l \text{Pic}_{\text{an}}(X) \cap \text{Im } H^1(X, \mathcal{O}_X) \subseteq \text{Im } G_l H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

Si Y n'est pas connexe, on a, dans $H^2(\bar{X}, \mathbf{Z})$:

$$(\check{c}') = \sum_1^m \mu_i c_Z(L_{Y_i})$$

avec $\mu_i \in \mathbf{Z}$, où les Y_i sont les composantes connexes de Y . Il suffit de remplacer, dans la démonstration ci-dessus, L_Y par $L_{Y_1}^{\mu_1} \otimes \dots \otimes L_{Y_m}^{\mu_m}$

3. Le morphisme c_Z

3.1 Soit $A_{\bar{X}}^{\bullet} \langle Y \rangle$ le sous-complexe de $A^{\bullet}(X)$ des formes différentielles φ de classe C^{∞} sur X qui s'écrivent :

$$\varphi = \alpha d' \log |s|^2 + \beta |X|,$$

avec $\alpha \in A^{r-1}(\bar{X})$, $\beta \in A^r(\bar{X})$, où r désigne le degré de φ . D'après P. DELIGNE [2], l'inclusion $A_{\bar{X}}^{\bullet} \langle Y \rangle \hookrightarrow A^{\bullet}(X)$ induit en cohomologie un isomorphisme $H^r(A_{\bar{X}}^{\bullet} \langle Y \rangle) \rightarrow H^r(X, \mathbf{C})$.

De plus, le morphisme $H^r(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^r(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$, décrit au paragraphe 1.3, s'interprète comme morphisme induit en cohomologie par le morphisme de complexes $A_{\bar{X}}^{\bullet} \langle Y \rangle \rightarrow A^{0,\bullet}(X)$ qui à la forme $\varphi = \alpha d' \log |s|^2 + \beta |X|$ de $A_{\bar{X}}^r \langle Y \rangle$ associe la partie $\beta^{0,r}$ de type $(0, r)$ de β .

3.2. Soit $\Omega_{\bar{X}}^p(\star Y)$ le faisceau sur $\bar{X}$ des p -formes différentielles méromorphes à pôle le long de Y ; la dérivation extérieure donne un complexe noté $\Omega_{\bar{X}}^{\bullet}(\star Y)$:

$$0 \rightarrow \Omega_{\bar{X}}^0(\star Y) \xrightarrow{d} \Omega_{\bar{X}}^1(\star Y) \xrightarrow{d} \Omega_{\bar{X}}^2(\star Y) \rightarrow \dots$$

Soit l un entier > 0 . On considère le sous-complexe $P_l \Omega_{\bar{X}}^{\bullet}(\star Y)$ de $\Omega_{\bar{X}}^{\bullet}(\star Y)$, défini par

$$0 \rightarrow \Omega_{\bar{X}}^0(lY) \xrightarrow{d} \Omega_{\bar{X}}^1((l+1)Y) \xrightarrow{d} \Omega_{\bar{X}}^2((l+2)Y) \rightarrow \dots$$

où $\Omega_{\bar{X}}^p(lY)$ est le faisceau sur $\bar{X}$ des p -formes méromorphes ayant au pis un pôle d'ordre l le long de Y . D'après DELIGNE [2] (prop. 3.1.8), l'inclusion $\Omega_{\bar{X}}^{\bullet} \langle Y \rangle \rightarrow P_l \Omega_{\bar{X}}^{\bullet}(\star Y)$ induit un isomorphisme en hyper-cohomologie

$$H^r(\bar{X}, \Omega_{\bar{X}}^{\bullet} \langle Y \rangle) \rightarrow H^r(\bar{X}, P_l \Omega_{\bar{X}}^{\bullet}(\star Y)).$$

Soit $A_{\bar{X}}^{0,\cdot}$ le faisceau des formes différentielles de classe C^∞ , de type $(0,\cdot)$ sur $\bar{X}$. L'hypercohomologie $H^r(\bar{X}, P_l \Omega_{\bar{X}}^\bullet(\star Y))$ se calcule comme cohomologie du sous-complexe $P_l A^\bullet(\bar{X}, \star Y)$ de $A^\bullet(X)$, défini par

$$P_l A^\bullet(\bar{X}, \star Y) = \Gamma(\bar{X}, P_l \Omega_{\bar{X}}^\bullet(\star Y) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} A_{\bar{X}}^{0,\cdot}).$$

En d'autres termes, $P_l A^\bullet(\bar{X}, \star Y)$ est le complexe des formes différentielles ϕ de classe C^∞ sur X qui s'écrivent, en degré r ;

$$\phi = \sum_{i=0}^r \frac{\phi^{i, r-i}}{s^{l+i}},$$

avec $\phi^{i, r-i} \in A^{i, r-i}(\bar{X}, L_Y^{l+i})$.

Le résultat de DELIGNE peut donc s'énoncer : L'injection

$$A_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle \rightarrow P_l A^\bullet(\bar{X}, \star Y)$$

induit un isomorphisme en cohomologie.

3.3. COMPATIBILITÉ DE c_Z AUX FILTRATIONS. — Il s'agit de montrer que

$$c_Z(G_l \text{Pic}_{\text{an}}(X)) \subset G_l H^2(X, \mathbf{Z})$$

c'est-à-dire encore de montrer que si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X qui porte une métrique d'ordre $\leq l$ le long de Y , la classe de Chern $c_c(E)$ a une image nulle dans $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(lY))$. D'après la proposition 2, $c_c(E)$ a un représentant dans $A^2(X)$ de la forme

$$\frac{\alpha}{s^l} d' \log |s|^2 + \frac{\beta}{s^l},$$

avec $\alpha \in A^1(\bar{X}, L_Y^l)$, $\beta \in A^{1,1}(\bar{X}, L_Y^l) + A^{2,0}(\bar{X}, L_Y^l)$. Ainsi, lorsque $l = 0$, ce représentant est dans $A_{\bar{X}}^2 \langle Y \rangle$, et se projette sur 0 dans $A^{0,2}(\bar{X})$. Ceci montre que

$$c_Z(G_0 \text{Pic}_{\text{an}}(X)) \subseteq G_0 H^2(X, \mathbf{Z}).$$

Lorsque l est positif, on peut écrire, d'après le paragraphe 3.2 :

$$\frac{\alpha}{s^l} d' \log |s|^2 + \frac{\beta}{s^l} = \alpha_1 d' \log |s|^2 + \beta_1 + d\rho,$$

avec $\rho \in P_l A^1(\bar{X}, \star Y)$, $\alpha_1 \in A^1(\bar{X})$ et $\beta_1 \in A^2(\bar{X})$. On a donc, en décomposant en types

$$\rho = \frac{\rho^{0,1}}{s^l} + \frac{\rho^{1,0}}{s^{l+1}},$$

avec $\rho^{0,1} \in A^{0,1}(\bar{X}, L_Y^l)$ et $\rho^{1,0} \in A^{1,0}(\bar{X}, L_Y^{l+1})$. Ceci donne, en prenant la partie de type (0,2) dans l'égalité ci-dessus

$$\beta_1^{0,2} + d'' \left(\frac{\rho^{0,1}}{s^l} \right) = 0.$$

D'après le paragraphe 3.1, l'image de $c_C(E)$ dans $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ est donnée via l'isomorphisme de Dolbeault, par la classe de $\beta_1^{0,2}$ dans $H^2(A^{0,\cdot}(\bar{X}))$. Dans $A^{0,2}(\bar{X}, L_Y^l)$, on a donc

$$\beta_1^{0,2} s^l = d'' \rho^{0,1},$$

ce qui montre que l'image de $c_C(E)$ dans $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(L_Y^l))$ est nulle, et donc que $c_Z(E) \in G_l H^2(X, \mathbb{Z})$.

3.4. UNE VARIANTE DE 3.1. — Soient V un voisinage ouvert de Y dans $\bar{X}$ tel que l'inclusion de Y dans V soit une équivalence d'homotopie, et $\varepsilon : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ à support compact dans V , qui vaut 1 au voisinage de Y . On considère le complexe $B_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle$, défini par

$$B_{\bar{X}}^r \langle Y \rangle = A^{r-1}(V) \oplus A^r(\bar{X})$$

et dont la différentielle $d : B_{\bar{X}}^r \langle Y \rangle \rightarrow B_{\bar{X}}^{r+1} \langle Y \rangle$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ (-1)^{r-1} \omega_\varepsilon & d \end{pmatrix}, \quad \text{où } \omega_\varepsilon = d'(\varepsilon \log |s|^2).$$

L'application $\Phi : B_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle \rightarrow A_{\bar{X}}^\bullet \langle Y \rangle$ définie par

$$\Phi(\alpha, \beta) = \alpha d'(\varepsilon \log |s|^2) + \beta$$

est alors un morphisme de complexes.

PROPOSITION 3. — *Le morphisme Φ induit un isomorphisme en cohomologie.*

Démonstration. — On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow A^\bullet(X) & \rightarrow & B_X^\bullet \langle Y \rangle & \rightarrow & A^\bullet(V)(-1) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow 1 & & \downarrow \Phi & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow A^\bullet(X) & \rightarrow & A_X^\bullet \langle Y \rangle & \xrightarrow{\text{res}} & A^\bullet(Y)(-1) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel la première ligne est exacte; la seconde ligne n'est pas exacte, mais induit cependant une suite exacte longue en cohomologie; la flèche $A^\bullet(V)(-1) \rightarrow A^\bullet(Y)(-1)$ est la restriction à Y , et induit donc un isomorphisme en cohomologie; il résulte du lemme des cinq qu'il en est de même pour Φ .

COROLLAIRE 1. — *Toute classe de cohomologie $c \in H^r(X, \mathbb{C})$ peut se représenter par une forme fermée $\varphi \in A^r(X)$ s'écrivant :*

$$\varphi = \alpha d'(\varepsilon \log |s|^2) + \beta,$$

avec $\alpha \in A^{r-1}(V)$, $\beta \in A^r(\bar{X})$, et $d\alpha = 0$. L'image de c dans $H^r(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ est donnée par la classe de la partie $\beta^{0,r}$ de type $(0, r)$ de β dans $H^r(A^{0,\cdot}(\bar{X}))$.

COROLLAIRE 2. — *Toute classe de cohomologie $c \in H^r(X, \mathbb{C})$ peut se représenter par une forme fermée $\varphi \in A^r(X)$ s'écrivant :*

$$\varphi = \alpha d^c(\varepsilon \log |s|^2) + \beta,$$

avec $\alpha \in A^{r-1}(V)$, $\beta \in A^r(X)$ et $d\alpha = 0$. L'image de c dans $H^r(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ est donnée par la classe de $\beta^{0,r}$ dans $H^r(A^{0,\cdot}(\bar{X}))$. Si de plus $c \in H^r(X, \mathbb{R})$, on peut prendre α et β réelles.

Le corollaire 2 résulte du corollaire 1 en utilisant la relation

$$d + \sqrt{-1} d^c = 2 d'.$$

3.5. CALCUL D'UNE FORME DE CHERN. — Soit $\omega^{0,1}$ une forme de type $(0, 1)$ sur X , d'' -fermée. Soit F le fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X dont le fibré C^∞ sous-jacent est le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$, et dont les sections holomorphes sont les fonctions de classe C^∞ $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient l'équation

$$d''f - 2\pi\sqrt{-1}\omega^{0,1}f = 0.$$

LEMME. — *La structure hermitienne triviale h_0 sur $X \times \mathbb{C}$ a pour forme de Chern, pour la structure holomorphe ci-dessus*

$$c(F, h_0) = 2 R_e(d' \omega^{0,1}).$$

Démonstration. — La connexion associée est définie par

$$D = D' + d'' - 2\pi\sqrt{-1}\omega^{0,1}, \quad \text{avec} \quad D' = d' - 2\pi\sqrt{-1}\bar{\omega}^{0,1},$$

c'est-à-dire

$$D = d - 4\pi\sqrt{-1}R_e\omega^{0,1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} c(F, h_0) &= \sqrt{-1}/2\pi D^2 \\ &= 2d(R_e\omega^{0,1}) = 2R_e(d'\omega^{0,1}). \end{aligned}$$

3.6. LE MORPHISME c_Z EST STRICT. — Il s'agit de montrer que l'on a l'inclusion

$$G_l H^2(X, \mathbf{Z}) \cap \text{Im } c_Z \subset c_Z(G_l \text{Pic}_{\text{an}}(X)).$$

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X dont la classe en Chern $c_c(E)$ s'annule dans $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(L_Y^l))$. Nous allons construire un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X , E' , portant une métrique hermitienne d'ordre fini $\leq l$ le long de Y , et tel que $c_Z(E') = c_Z(E)$.

Soit h une métrique hermitienne arbitraire sur E . D'après le corollaire 2 du paragraphe 3.4, on peut écrire :

$$c(E, h) = \alpha d^c(\varepsilon \log |s|^2) + \beta + d\rho,$$

avec $\alpha \in A^1(V)$, $\beta \in A^2(\bar{X})$, $\rho \in A^1(X)$, $d\alpha = 0$, α, β, ρ étant des formes réelles. En décomposant en types, on obtient :

$$\begin{cases} c(E, h) = 2 \text{Im}(\alpha^{0,1} d'(\varepsilon \log |s|^2)) + \beta^{1,1} + 2R_e d' \rho^{0,1} \\ -\sqrt{-1} \alpha^{0,1} d''(\varepsilon \log |s|^2) + \beta^{0,2} + d'' \rho^{0,1} = 0. \end{cases}$$

Comme $d'' \alpha^{0,1} = 0$, la deuxième égalité s'écrit encore :

$$d''(-\sqrt{-1} \alpha^{0,1} \varepsilon \log |s|^2 + \rho^{0,1}) + \beta^{0,2} = 0.$$

La forme $\beta^{0,2} s^l$ représente l'image de $c_c(E)$ dans $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}(L_Y^l))$. On peut donc écrire par hypothèse

$$\beta^{0,2} s^l = d'' \gamma^{0,1} \quad \text{avec} \quad \gamma^{0,1} \in A^{0,1}(\bar{X}, L_Y^l).$$

Il en résulte que si l'on pose

$$\omega^{0,1} = -\sqrt{-1} \alpha^{0,1} \varepsilon \log |s|^2 + \rho^{0,1} + (\gamma^{0,1}/s^l),$$

la forme $\omega^{0,1}$ est de classe C^∞ sur X et d'' -fermée; de plus

$$c(E, h) = \psi + 2R_e(d' \omega^{0,1}),$$

avec

$$\begin{aligned} \psi = & -2 \operatorname{Im} d' \alpha^{0,1} \varepsilon \log |s|^2 + 4 \operatorname{Im} (\alpha^{0,1} d' (\varepsilon \log |s|^2)) \\ & - 2 R_e d' \left(\frac{\gamma^{0,1}}{s^l} \right) + \beta^{1,1}. \end{aligned}$$

Soit (F, h_0) le fibré vectoriel hermitien associé à la forme $\omega^{0,1}$ au paragraphe 3.5; le fibré hermitien $E' = E \otimes F^\vee$ a alors ψ pour forme de Chern. Il est clair que $c_Z(E') = c_Z(E)$. De plus, pour tout réel $\lambda > l$, on a

$$|\psi|_{\text{Poincaré}} \leq \frac{\text{Cte}}{|s|^\lambda},$$

ce qui montre que la métrique hermitienne sur E' est d'ordre $\leq l$, et termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CORNALBA (M.) and GRIFFITHS (P. A.). — Analytic cycles and vector bundles on non-compact algebraic varieties, *Invent. Math.*, Berlin, t. 28, 1975, p. 1-106.
- [2] DELIGNE (P.). — *Théorie de Hodge*, II., Paris, Presses universitaires de France, 1972 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 40, p. 5-72).
- [3] GRIFFITHS (P. A.). — Function theory of finite order on algebraic varieties, *J. of diff. Geom.*, t. 6, 1972, p. 285-306, et t. 7, 1973, p. 45-66.

(Texte reçu le 26 janvier 1976.)

Joseph LE POTIER,
Mathématiques,
U.E.R.

Sciences Fondamentales et Appliquées,
Université de Poitiers,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.