BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN BERSTEL

MAURICE MIGNOTTE

Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 175-184

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__175_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 175 à 184.

DEUX PROPRIÉTÉS DÉCIDABLES DES SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

PAR

JEAN BERSTEL et MAURICE MIGNOTTE
[Paris, Strasbourg]

RÉSUMÉ. — On montre que les problèmes suivants sont décidables : Étant donné une suite récurrente linéaire à termes entiers, a-t-elle une infinité de termes nuls ? L'ensemble des nombres premiers divisant au moins un terme de la suite est-il fini ?

Introduction

Les termes d'une suite récurrente linéaire à coefficients entiers jouissent de propriétés arithmétiques remarquables, et vérifient des lois de régularité bien connues depuis longtemps. Ainsi, la répartition des termes nuls d'une telle suite a été décrite par SKOLEM [17], résultat généralisé aux suites à termes non entiers par MAHLER [6] et LECH [4], et la structure des suites n'ayant qu'un nombre fini de facteurs premiers a été élucidée par PÓLYA [12].

On connaît, pour de nombreux problèmes concernant les termes d'une suite récurrente, des procédés effectifs permettant de les résoudre. Il en est ainsi par exemple pour le calcul de la période, la suite des restes modulo un entier (*voir* par exemple [13]) ou du calcul de la plus courte relation de récurrence que vérifie une suite récurrente donnée.

Le but du présent article est de prouver la décidabilité des deux propriétés suivantes : « Il y a, dans une suite à termes entiers, une infinité de termes nuls »; et « L'ensemble des nombres premiers divisant au moins un terme d'une suite récurrente est fini ». Nous déduisons ces résultats des théorèmes de SKOLEM-MAHLER-LECH et de PÓLYA, évoqués ci-dessus, qui montrent que les propriétés arithmétiques en question se reflètent dans des propriétés plus « analytiques » de la fonction rationnelle dont la suite récurrente fournit les coefficients du développement en série de Taylor autour de l'origine; elles correspondent en effet à la présence de racines de l'unité parmi les pôles ou quotients de deux pôles de la fonction rationnelle associée. Les conclusions cherchées se déduisent alors de la majoration effective et explicite du plus petit commun multiple des ordres des racines de l'unité parmi les quotients de deux zéros distincts d'un polynôme à coefficients entiers (théorème 1 et son corollaire). Cette majoration ne dépend que du degré du polynôme donné, et est, en un certain sens, la meilleure possible.

Signalons un problème ouvert : Alors qu'il est facile de décider si deux suites, définies par deux relations de récurrence, sont égales terme à terme, nous ne savons pas s'il existe un algorithme permettant de décider si les termes d'une suite sont toujours inférieurs aux termes de même indice d'une deuxième suite. Ce problème est indécidable pour les séries rationnelles en deux variables non commutatives (*voir* [3]); dans le cas des suites récurrentes (qui correspondent aux séries rationnelles en une variable), des résultats partiels ont été obtenus par l'un d'entre nous [7].

1. Notations et résultats préliminaires

Il existe une correspondance bien connue (*voir* par exemple [5], [13]) entre suites récurrentes, fractions rationnelles et polynômes exponentiels.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite récurrente linéaire, à termes entiers, vérifiant la relation

(1) $u_{n+h} = q_1 u_{n+h-1} + \ldots + q_h u_n \qquad (n \geqslant 0) \quad (q_h \neq 0,\ q_i \in \mathbf{Z},\ u_n \in \mathbf{Z}).$

Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence est

(2) $$Q(X) = 1 - q_1 X - \ldots - q_h X^h.$$

Il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$, entièrement déterminé par $u_0, \ldots, u_{h-1}$, tel que

(3) $$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n.$$

Si l'on pose $Q(X) = (1-\alpha_1 X)^{r_1}(1-\alpha_2 X)^{r_2} \ldots (1-\alpha_s X)^{r_s}$, où les α_i sont distincts, la décomposition en éléments simples de $P(X)/Q(X)$ montre que

(4) $$u_n = \sum_{i=1}^{s} R_i(n)\,\alpha_i^n \qquad (n \geqslant 0),$$

où les polynômes R_i, à coefficients dans $\mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, sont de degré au plus égal à $r_i - 1$.

Il est facile de vérifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne vérifie aucune relation de récurrence linéaire plus courte que (1) si, et seulement si, les polynômes P

et Q de la formule (3) sont sans facteur commun, et que ceci se produit si, et seulement si, les polynômes R_i dans (4) sont de degré exactement $r_i - 1$.

Une suite récurrente $(u_n)_{n \geq 0}$ étant donnée par ses h premiers termes et la relation (1), le problème de savoir si les polynômes P et Q de (3) sont sans facteur commun est décidable, et la plus courte relation de récurrence satisfaite par la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc effectivement calculable. Nous supposons dans la suite que ce calcul préliminaire a été effectué.

Le lemme suivant est classique.

LEMME 1. — *Soit* $(u_n)_{n \geq 0}$ *une suite récurrente vérifiant* (1) *et non identiquement nulle; alors de* h *termes consécutifs* $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+h-1}$*, l'un au moins n'est pas nul.*

Une variante de ce lemme est le corollaire suivant (*voir* aussi [16]) :

COROLLAIRE. — *Soit* $(u_n)_{n \geq 0}$ *une suite récurrente; soit* (1) *une des relations de récurrence qu'elle vérifie, et* (4) *l'expression de* u_n *comme valeur d'un polynôme exponentiel; si* $h \geq 1$, *et si* h *termes consécutifs* $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+h-1}$ *sont nuls, alors les polynômes* $R_1, \ldots, R_s$ *sont identiquement nuls.*

LEMME 2. — *Soit* $(u_n)_{n \geq 0}$ *une suite récurrente vérifiant* (1), *soit* $M \geq 1$, *et* $k \in \{ 0, \ldots, M-1 \}$*; la suite* $(v_n)_{n \geq 0}$*, définie par* $v_n = u_{nM+k}$*, est récurrente, et vérifie une relation de récurrence effectivement calculable de longueur* $\leq h$.

Preuve. — De (4), on tire que

(5) $$v_n = \textstyle\sum_{i=1}^{s} S_i(n)\, \beta_i^n,$$

où $\beta_i = \alpha_i^M$ et $S_i(X) = R_i(MX+k)\, \alpha_i^k$, donc que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est récurrente. Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence, donnée par (5), est $Q^{(M)}(X) = (1-\alpha_1^M)^{r_1} \ldots (1-\alpha_s^M)^{r_s}$, dont on sait calculer les coefficients. (On peut aussi déterminer directement la relation de récurrence la plus courte que vérifie $(v_n)_{n \geq 0}$ à l'aide des déterminants de Hankel, *voir* par exemple [11].)

2. Sur les racines de l'unité d'un polynôme

Le théorème que voici est à la base des résultats des sections suivantes.

THÉORÈME 1. — *Pour tout polynôme* A *non nul à coefficients entiers, de degré* d*, le plus petit commun multiple* λ_A *des ordres des racines de l'unité qui sont aussi zéros de* A *admet la majoration* $\lambda_A \leq \exp(\sqrt{6\, d \log d})$.

Nous utilisons surtout le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Pour tout polynôme A non nul à coefficients entiers, de degré d, le plus petit commun multiple μ_A des ordres des racines de l'unité parmi les zéros et les quotients de deux zéros distincts de A vérifie*

$$\mu_A \leqslant \exp(2\,d\sqrt{3\log d}).$$

Preuve. — Si une racine de l'unité $\rho \neq -1$ est zéro de A, alors le quotient $\rho/\bar{\rho}$ est une racine de l'unité. Il suffit donc de considérer les racines de l'unité parmi les quotients de deux zéros distincts de A.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ les zéros non nuls de A. On a $\mu_A = \lambda_D$, où D est le polynôme $D(X) = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - X\alpha_j)$, qui est un polynôme à coefficients entiers de degré $s(s-1) \leqslant d^2$. Par le théorème 1, on a alors $\mu_A \leqslant \exp(2\,d\sqrt{3\log d})$.

Preuve du théorème 1. — Si une racine de l'unité ρ, primitive d'ordre m, est zéro de A, alors le polynôme cyclotomique Φ_m des racines primitives m-ièmes de l'unité divise A. Comme Φ_m est de degré $\varphi(m)$, où φ est l'indicateur d'Euler, $\varphi(m)$ est majoré par d. Il en résulte que $\lambda_A \leqslant \psi(d)$, où $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est définie par

$$\psi(n) = \max\{\text{p. p. c. m.}(m_1, \ldots, m_k);\ k \geqslant 1,\ \varphi(m_1) + \ldots + \varphi(m_k) \leqslant n\}.$$

Considérons, parmi les suites $(m_1, \ldots, m_k)$ $(k \geqslant 1)$ d'entiers non négatifs vérifiant

(i) p. p. c. m. $(m_1, \ldots, m_k) = \psi(d)$,

(ii) $\varphi(m_1) + \ldots + \varphi(m_k) \leqslant d$,

celles pour lesquelles

(iii) $\varphi(m_1) + \ldots + \varphi(m_k)$ est minimal

(iv) $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ est minimal.

Soit donc $(m_1, \ldots, m_k)$ une telle suite d'entiers. Des conditions (i) et (iv) on déduit que les m_i sont deux-à-deux premiers entre eux et différents de 1. En particulier, tous les m_i, sauf un au plus, sont impairs. S'ils étaient tous impairs, on aurait, par exemple

$$\varphi(2\,m_1) + \ldots + \varphi(m_k) = \varphi(m_1) + \ldots + \varphi(m_k) \leqslant d,$$

mais p. p. c. m. $(2\,m_1, \ldots, m_k) = 2$ p. p. c. m. $(m_1, \ldots, m_k)$, et $(m_1, \ldots, m_k)$ ne vérifierait pas (i). Ainsi l'un des m_i, soit m_1, est pair de la forme $m_1 = 2^\alpha m'_1$, avec α positif et m'_1 impair, et $m_2, \ldots, m_k$ sont impairs. Si α et m'_1 étaient tous deux différents de 1, alors

$$\varphi(m_1) = 2^{\alpha-1}\varphi(m'_1) \geqslant 2^{\alpha-1}+\varphi(m'_1) = \varphi(2^\alpha)+\varphi(m'_1)$$

et

$$2^\alpha m'_1 > 2^\alpha + m'_1$$

en contradiction avec (iv). On a donc $m_1 = 2^\alpha$ ou $m_1 = 2\,m'_1$.

Supposons maintenant que l'un des m_i impairs soit égal au produit (non trivial) de deux entiers m'_i, m''_i premiers entre eux. Alors

$$\varphi(m_i) = \varphi(m'_i)\,\varphi(m''_i) > \varphi(m'_i)+\varphi(m''_i),$$

ce qui contredit (iii). Les m_i impairs sont donc des puissances de nombres premiers, et on montre pareillement qu'il en est de même pour m'_1. En résumé, les m_i sont de la forme

$$m_i = p_i^{\alpha_i} (2 \leqslant i \leqslant k); \qquad m_1 = p_1^{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad m_1 = 2\,p_1^{\alpha_1},$$

avec p_i nombres premiers distincts, α_i positifs. On en tire facilement la majoration $m_i \leqslant 3\,\varphi(m_i)$, $i = 1, \ldots, k$, d'où, par (ii), $m_1+\ldots+m_k \leqslant 3\,d$, ce qui donne

$$\psi(d) \leqslant m_1 \ldots m_k \leqslant \left(\frac{3\,d}{k}\right)^k \tag{6}$$

d'après l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique. Il en résulte en particulier $\psi(d) \leqslant \max_{x>0}(3\,d/x)^x = e^{3d/e}$.

Nous allons obtenir une majoration plus fine de ψ en bornant l'entier k. Ce problème a été étudié en [9] (remarque après la proposition 1). Soit $p(i)$ le i-ième nombre premier et $S(k) = \sum_{i=1}^k p(i)$. Alors

$$S(k) = \sum_{i=1}^k p(i) \leqslant \sum_{i=1}^k p_i \leqslant \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha i} \leqslant \sum_{i=1}^k m_i \leqslant 3\,d.$$

Les minorations de $p(i)$, qui figurent en [14], conduisent à l'inégalité (*cf.* [9]) $S(k) \geqslant (k^2/2)(\log k-(1/2))$. On a donc

$$\frac{k^2}{2}\left(\log k - \frac{1}{2}\right) \leqslant 3\,d.$$

Montrons que cette inégalité implique

$$k \leqslant K, \qquad \text{où} \quad K = \sqrt{\frac{13\,d}{\log d}}.$$

On a en effet

$$\frac{K^2}{2}\left(\log K - \frac{1}{2}\right) = \frac{13\,d}{4}\left(1 - \frac{\log\log d + 1 - \log 13}{\log d}\right)$$
$$\geqslant \frac{13\,d}{4}\left(1 - \max_{x>0}\frac{\log x + 1 - \log 13}{x}\right)$$
$$= \frac{13\,d}{4}\left(1 - \frac{1}{13}\right) = 3\,d.$$

La fonction $x \to (3\,d/x)^x$ étant croissante pour $0 < x \leqslant 3\,d/e$, on a, par (6) :

$$\psi(d) \leqslant \left(\frac{3\,d}{K}\right)^K \qquad \text{pour} \quad K \leqslant \frac{3\,d}{e}.$$

Cette condition sur K équivaut à

$$d \log d \geqslant 13\,e^2/9, \qquad \text{soit encore} \quad \text{à } d \geqslant 6.$$

Il en résulte que, pour $d \geqslant 6$, on a $\psi(d) \leqslant \exp(\sqrt{6\,d \log d})$.
Un calcul direct montre que cette inégalité est encore vraie pour $2 \leqslant d \leqslant 5$.

Remarque. — La constante 6 peut être améliorée et remplacée par $1+\varepsilon$ (ε positif fixé), pour d assez grand, mais ne peut l'être par $1-\varepsilon$.

3. Algorithme pour les termes nuls

Le théorème suivant a été démontré par Skolem [17] pour des suites récurrentes dont les termes sont entiers, par Mahler [6] si les termes sont algébriques, par Lech [4] dans le cas où les termes appartiennent à un corps de caractéristique 0.

Théorème. — *Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite récurrente qui possède une infinité de termes nuls; alors les indices des termes nuls forment, à un nombre fini d'entre eux près, une union finie de progressions arithmétiques.*

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite récurrente à termes entiers; nous appelons *période M* le p. p. c. m. des raisons des progressions arithmétiques infinies d'indices de termes nuls et posons $M = 0$ si la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ n'a qu'un nombre fini de termes nuls. La proposition suivante a déjà été démontrée par Shapiro [16]. Nous en donnons ici une preuve plus courte.

Proposition 1. — *La période M divise le p. p. c. m. λ des ordres des racines de l'unité parmi les nombres α_i/α_j ($1 \leqslant i < j \leqslant s$).*

Preuve. — Soit $M\mathbf{N}+k$ une progression arithmétique d'indices de termes nuls de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Considérons la partition de $\{1, \ldots, s\}$ en classes J, définies par $i, j \in J$ si, et seulement si, $\alpha_i^M = \alpha_j^M$, et désignons, pour chaque classe J, par i_J, un élément distingué de J. Alors

$$u_{nM+k} = \sum_J R_J(n\,M)(\alpha_{i_J}^M)^n,$$

où $R_J(X) = \sum_{i\in J} R_j(X+k)\,\alpha_j^k$. D'après le corollaire au lemme 1, on a $R_J(n\,M) = 0$ pour tout n (et il en résulte en particulier que chaque classe J contient au moins deux éléments), donc les polynômes R_J sont identiquement nuls. Comme $\alpha_i^\lambda = \alpha_j^\lambda$ pour $i, j \in J$, on a de même

$$u_{n\lambda+k} = \sum_J R_J(n\,\lambda)(\alpha_{i_J}^\lambda)^n = 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Ainsi $\lambda\,\mathbf{N}+k$ est une progression arithmétique d'indices de termes nuls pour chaque k pour lequel $M\mathbf{N}+k$ est une progression arithmétique de même nature, et de la minimalité de M, il en résulte que M divise λ.

THÉORÈME 2. — *Il existe un algorithme permettant de décider si une suite récurrente* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *(à termes entiers) possède une infinité de termes nuls.*

Preuve. — Par la proposition 1 et le corollaire du théorème 1, on a $M \leqslant \Lambda(h)$, où $\Lambda(h) = [\exp(2\,h\sqrt{3\log h})]$.

Toute progression arithmétique infinie d'indices de termes nuls est, d'après les lemmes 1 et 2, caractérisée par le fait que ses h premiers termes sont nuls. De plus, la raison d'une telle progression est majorée par $\Lambda(h)$ en vertu de la proposition 1. Pour déterminer si la suite (u_n) possède une infinité de termes nuls, il suffit donc de calculer les $K = (h+1)\,\Lambda(h)$ premiers termes de la suite, et déterminer les progressions arithmétiques d'indices de termes nuls de longueur h qui apparaîssent parmi ces K premiers termes.

Remarque. — D'après la proposition 1, la période d'une suite récurrente ayant une infinité de termes nuls est majorée par la valeur d'une fonction ne dépendant que du degré du polynôme caractéristique de la suite. Dans le cas où la suite récurrente n'a qu'un nombre fini de termes nuls, la question de savoir si ce nombre ne dépend que du degré du polynôme caractéristique reste ouverte. Pour des cas particuliers, surtout des récurrences cubiques, des résultats partiels sont connus [(15], [19], [18], [10], [8]).

4. Algorithme pour les facteurs premiers

Dans un article publié en 1921 [12], G. PÓLYA a démontré le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite récurrente à termes entiers; l'ensemble* $\mathscr{P}$ *des nombres premiers divisant au moins un terme* u_n *est fini* *si, et seulement si, il existe un entier M, et des nombres $d_0, d_1, \ldots, d_{M-1}$ tels que l'on ait*

$$u_{m+nM} = u_m d_m^n \quad \textit{pour tous } n \geqslant 0, \qquad m = 0, \ldots, M-1.$$

Nous appelons, avec BENZAGHOU [1], *suite de Pólya* une suite d'entiers pour laquelle l'ensemble des nombres premiers divisant au moins un terme est fini. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 3. — *Il existe un algorithme permettant de décider si une suite récurrente $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Pôlya.*

La preuve de ce théorème repose sur la variante suivante du théorème de Pólya qui n'est que la reformulation, dans ce cas particulier, du lemme 3.1 de [1] (p. 237) :

PROPOSITION 2. — *Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite récurrente, et supposons qu'aucun des quotients α_i/α_j $(i \neq j)$ n'est une racine de l'unité; alors $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Pôlya si, et seulement si, la suite est récurrente d'ordre* 1 (i e. $h = 1$).

Preuve du théorème 3. — Soit $\lambda \geqslant 1$ un entier. Pour tout $k = 0, 1, \ldots, \lambda-1$, la suite $(v_n^{(k,\lambda)})_{n \geqslant 0}$, définie par $v_n^{(k,\lambda)} = u_{n\lambda+k}$ $(n \geqslant 0)$, est récurrente, et la plus courte relation de récurrence qu'elle vérifie peut être effectivement calculée par le lemme 2. D'autre part, il est clair que, pour tout $\lambda \geqslant 1$, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Pólya si, et seulement si, les suites $(v_n^{(k,\lambda)})_{n \geqslant 0}$ pour $k = 0, \ldots, \lambda-1$ sont toutes des suites de Pólya.

Posons $K = [\exp(2h\sqrt{3 \log h})]$. S'il existe un entier $\lambda \leqslant K$ tel que toutes les suites $(v_n^{(k,\lambda)})_{n \geqslant 0}$ pour $k = 0, \ldots, \lambda-1$ vérifient des relations de récurrences d'ordre 1, alors la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est, évidemment, une suite de Pólya. Réciproquement, si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Pólya, et si λ est le p. p. c. m. des ordres des racines de l'unité parmi les quotients α_i/α_j $(i \neq j)$, alors les suites $(v_n^{(k,\lambda)})_{n \geqslant 0}$ sont des suites de Pólya, et aucun quotient de deux de leurs pôles n'est une racine de l'unité; par la proposition 3, ces suites vérifient donc des relations de récurrences d'ordre 1.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Pólya si, et seulement si, il existe un entier $\lambda \leqslant K$ tel que toutes les suites $(v_n^{(k,\lambda)})_{n \geqslant 0}$ $(k = 0, \ldots, \lambda-1)$ vérifient des relations de récurrences d'ordre 1, propriété qui est décidable par le lemme 2.

COROLLAIRE. — *Il existe un algorithme permettant de décider si une suite récurrente $(u_n)_{n \geqslant 0}$ à termes entiers satisfait la condition suivante : il existe* *un entier $k \geqslant 1$ tel que tout terme u_n possède au plus k facteurs premiers distincts.*

Preuve. — Il a été prouvé dans [2] que la condition du corollaire est équivalente à la condition d'être une suite de Pólya.

REMERCIEMENTS. — Les auteurs tiennent à remercier M. P. SCHÜTZENBERGER pour les discussions qui sont à l'origine de ce travail et qui ont grandement contribué à lui donner sa forme présente. Le premier auteur remercie également le Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Alger pour un séjour pendant lequel ce travail a été commencé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (B.). — Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, p. 209-252.

[2] BERSTEL (J.). — Factorisation de fractions rationnelles et de suites récurrentes, *Acta Arithmetica*, t. 30, 1976, p. 5-17.

[3] EILENBERG (S.). — *Automata, languages and machines.* Vol. A : *Foundations.* — New York, Academic Press, 1973 (*Pure and applied Mathematics Series*, 59).

[4] LECH (C.). — A note on recurring series, *Arkiv der Math.*, t. 2, 1953, p. 417-421.

[5] LEWIS (D. J.). — Diophantine equations, p-adic methods, "*Studies in Number Theory*", [W. J. LE VEQUE, ed.], p. 25-75. — New York, Prentice Hall, 1969 (*MAA Studies in Mathematics*, 6).

[6] MAHLER. (K.). — Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-Koeffizienten rationaler Funktionen, *Koninkl. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 38, 1935, p. 50-60.

[7] MIGNOTTE (M.). — A note on linear recursive series, *J. Austr. math. Soc* (à paraître).

[8] MIGNOTTE (M.). — Suites récurrentes linéaires, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou :* Groupe d'études de théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° G 14, 9 p.

[9] MIGNOTTE (M.). — Algorithmes relatifs à la décomposition des polynômes, "*Theoretical Computer Science*" (à paraître).

[10] PICON (P. A.). — Sur les termes nuls d'une suite récurrente cubique, *R.A.I.R.O.*, 8e année, R-3, 1974, p. 47-61.

[11] PISOT (C.). — *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques.* — Montréal, les Presses Universitaires de Montréal, 1963 (*Séminaire de Mathématiques supérieures.* été 1963, 5).

[12] PÓLYA (G.). — Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen, *J. reine und ang. Math.*, t. 151, 1921, p. 1-31.

13] PÓLYA (G.) et SZEGÖ (G.). — *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 3te Auflage. —. Berlin, Springer-Verlag, 1964 (*Heidelberger Taschenbücher*, 73, 74).

[14] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). — Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, t. 6, 1962, p. 64-94.

[15] SIEGEL (C. L.) — Über die Koeffizienten in der Taylorentwicklung rationaler Funktionen, *Tôhoku math. J.*, t. 20, 1921, p. 26-31.

[16] SHAPIRO. (H. N.) — On a theorem concerning exponential polynomials, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 487-500.

[17] SKOLEM (T.). — Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen, « *Comptes Rendus du* 8^e^ *Congrès des Mathématiciens scandinaves*, Stockholm 1934 », p. 163-188. — Lund, Håkan Ohlssons, 1935.

[18] SMILEY (M. F.). — On the zeros of a cubic recurrence, *Amer. math. Monthly*, t. 63, 1956, p. 171-172.

[19] WARD (M.). — Note on an arithmetical property of recurring series, *Math. Z.*, t. 39, 1934, p. 211-224.

(Texte définitif reçu le 5 septembre 1975.)

Jean BERSTEL,
Institut de Programmation,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
Tour 55,
4, place Jussieu,
95230 Paris Cedex 05.

Maurice MIGNOTTE,
Centre de Calcul,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.