

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD PERRON

Pseudo-isotopies de plongements en codimension 2

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 289-339

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__289_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__289_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PSEUDO-ISOTOPIES DE PLONGEMENTS EN CODIMENSION 2

PAR

BERNARD PERRON

[Dijon]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on calcule, par une méthode « élémentaire » parallèle à la démonstration du théorème du s -cobordisme, l'obstruction à ce qu'une pseudo-isotopie de plongements en codimension 2 soit isotope à une isotopie. A la différence du cas de la codimension ≥ 3 , cette obstruction n'est pas nulle en général.

Table des matières

	Pages
INTRODUCTION.....	289
CHAPITRE 1 : Un lemme de Whitney relatif.....	295
CHAPITRE 2 : Les espaces de pseudo-isotopies.....	299
CHAPITRE 3 : Classification des membranes. Application à la suppression des points critiques.....	304
CHAPITRE 4 : Élément algébrique attaché à une pseudo-isotopie ordonnée.....	315
CHAPITRE 5 : L'obstruction à l'isotopie.....	330
BIBLIOGRAPHIE.....	339

Introduction

Dans tout cet article, on travaille dans la catégorie des variétés différentiables, éventuellement à bord, et des applications C^∞ . Q (resp. V) désigne une variété connexe, compacte de dimension q (resp. n), et $f_0 : V \rightarrow Q$ désigne un plongement fixé tel que $f_0(\partial V) \subset \partial Q$. On appelle pseudo-isotopie de plongements (resp. de difféomorphismes) de V dans Q (resp. de Q) tout plongement $F : V \times I \rightarrow Q \times I$ (resp. difféomorphisme $Q \times I \rightarrow Q \times I$) coïncidant avec $f_0 \times \text{id}_I$ (resp. $\text{id}_{Q \times I}$) sur $V \times \{0\} \cup \partial V \times I$

(resp. $Q \times \{0\} \cup \partial Q \times I$) tel que

$$F(V \times \{1\} \subset Q \times \{1\}) \quad (\text{resp. } F(Q \times \{1\}) \subset Q \times \{1\}).$$

Une isotopie est une pseudo-isotopie conservant les niveaux.

On se pose le problème de savoir si une pseudo-isotopie est isotope à une isotopie. Pour les plongements, la réponse est affirmative si $q-n \geq 3$ ([4] ou [8] par exemple). En codimension 2, la réponse n'a de chance d'être affirmative que dans le cas où le complémentaire de la pseudo-isotopie est un cylindre. On notera $\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}; f_0)$ l'espace de ces pseudo-isotopies muni de la topologie C^∞ .

HATCHER, dans [2], définit algébriquement deux groupes $Wh_2(\pi_1(Q))$ et $Wh_1(\pi_1(M), Z_2 \times \pi_2(Q))$, et démontre deux théorèmes.

THÉORÈME A [2]. — Soit $\mathcal{P}(Q^q, \partial Q)$ l'espace des pseudo-isotopies de difféomorphismes de $Q \times I$. Alors, si $q \geq 7$, il existe un isomorphisme

$$\theta: \pi_0(\mathcal{P}(Q, \partial Q)) \rightarrow Wh_2(\pi_1(Q)) \oplus Wh_1(\pi_1(M), Z_2 \times \pi_2(Q)).$$

THÉORÈME B [3]. — $\pi_0(\mathcal{F}(V^n, Q; f_0)) \simeq C_1 \oplus C_2$, où C_1 (resp. C_2) désigne le conoyau de homomorphisme

$$Wh_1(\pi_1(Q - f_0(V)), \pi_2(Q - f_0(V) \times Z_2)) \rightarrow Wh_1(\pi_1(Q), \pi_2(Q) \times Z_2)$$

(resp. $Wh_2(\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow Wh_2(\pi_1(Q)))$).

Plaçons-nous dans les hypothèses suivantes : $f_0: V^n \rightarrow Q^{n+2}$ est un plongement de codimension 2 ($n \geq 5$) tel que l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ soit bijectif. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Sous les hypothèses précédentes, on a une bijection :

$$\pi_0(\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}; f_0)) \simeq Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z] \quad (1),$$

où $[ag - ga; Z]$ désigne le sous-groupe additif de $Z[\pi_1(Q)]$ engendré par les éléments du type $ag - ga$, où $a \in f_{0*} Z[\pi_1(V)]$, $g \in Z[\pi_1(Q)]$, et par $Z = Z[0] \subset Z[\pi_1(Q)]$.

Démonstration. — D'après le théorème B, on a une bijection $\pi_0(\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}; f_0)) \simeq C_1$. Par définition, $Wh_1(\pi_1(Q), Z_2 \times \pi_2(Q))$ est

(1) F. LAUDENBACH m'a fait remarquer que ce groupe n'est autre que le groupe d'homologie $H_0(\pi_1(V); Z[\pi_1(Q)]/Z[0])$, où $\pi_1(V)$ agit sur $Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$ par conjugaison.

le quotient du « groupe de groupe » de $\pi_1(Q)$ à coefficients dans $Z_2 \times \pi_2(Q)$, $G = (Z_2 \times \pi_2(Q)) [\pi_1(Q)]$ par le sous-groupe H engendré par les éléments du type $(\alpha, \tau) - (\alpha^\sigma, \sigma\tau\sigma^{-1})$ et $(\beta, 1)$, où $\alpha, \beta \in Z_2 \times \pi_2(Q)$, $\sigma, \tau \in \pi_1(Q)$, et où α^σ désigne l'action de $\pi_1(Q)$ sur $Z_2 \times \pi_2(Q)$ (l'action sur Z_2 étant triviale).

Posons $Q' = Q - f_0(V)$; soient \tilde{Q} le revêtement universel de Q et \tilde{Q}' , $f_0(V)$ les revêtements induits (\tilde{Q}' coïncide avec le revêtement universel de Q' d'après l'hypothèse $\pi_1(Q) \approx \pi_1(Q')$). Posons

$$Wh_1(\pi_1(Q'), Z_2 \times \pi_2(Q')) = G'/H';$$

on a alors $C_1 \simeq (G/G')/i_*(H/H')$. G/G' s'identifie au « groupe de groupe » $\pi_2(Q)/\pi_2(Q') [\pi_1(Q)]$. On a alors les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \pi_2(Q)/\pi_2(Q') &\simeq H_2(\tilde{Q}, \tilde{Q}') \simeq H_0(\widetilde{f_0(V)}) \simeq Z[\pi_1(Q)/f_{0*}\pi_1(V)] \\ &\simeq Z[\pi_1(Q)]/\{ga = g; g \in \pi_1(Q), a \in f_{0*}\pi_1(V)\}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de H et H' , C_1 est isomorphe au groupe $Z[\pi_1(Q) \times \pi_1(Q)]$, divisé par les relations $(g, e) = 0$, $(ga, g') = (g, g')$ et $(\gamma g, \gamma g' \gamma^{-1}) = (g, g')$, où e est l'élément neutre de $\pi_1(Q)$, $g, g', \gamma \in \pi_1(Q)$ et $a \in f_{0*}(\pi_1(V))$. Puisque chaque orbite de $\pi_1(Q) \times \pi_1(Q)$ pour la troisième relation rencontre $\{e\} \times \pi_1(Q)$ en un seul point, toute fonction à valeur dans Z à support fini dans $\pi_1(Q) \times \pi_1(Q)$ est équivalente à la donnée d'une fonction à support fini dans $\{e\} \times \pi_1(Q)$. Compte tenu de la troisième relation, la seconde devient

$$(e, g) = (e, a^{-1}ga), \quad a \in f_{0*}\pi_1(V), \quad g \in \pi_1(Q).$$

Donc,

$$C_1 \simeq Z\pi_1(Q)/\{a^{-1}ga = g, e = 0; a \in f_{0*}\pi_1(V), g \in \pi_1(V)\}.$$

Le but de cet article est de démontrer la proposition 1 sous l'hypothèse supplémentaire que le fibré normal à f_0 est trivial par une méthode « élémentaire » en ce sens que contrairement à [2] et [3] elle n'utilise pas de familles à deux paramètres et très peu de familles à un paramètre. Elle permet en outre de lire l'obstruction à l'isotopie sur une décomposition en anses de la pseudo-isotopie.

La démonstration repose sur la remarque fondamentale suivante : une pseudo-isotopie, dont le fibré normal admet une section non nulle, et dont l'image est verticale, est isotope à une isotopie. Cette remarque ramène le

problème à la détermination des composantes connexes de l'espace des images des pseudo-isotopies. Le problème est alors de savoir si on peut supprimer les points critiques (pour la projection $p : Q \times I \rightarrow I$) d'une sous-variété difféomorphe à un cylindre, plongée dans $Q \times I$. Il apparaît ainsi comme une version plongée du problème du s -cobordisme.

On définit (chap. 2) pour un point critique de Morse de la fonction cote, la notion de membrane qui va jouer le rôle de la nappe (ou de l'anse). On donne à l'aide de ces membranes un critère de destruction mutuelle de deux points critiques (chap. 2, lemme 2.9), et on prouve par une méthode semblable à celle de SMALE [5] qu'on peut isotoper toute pseudo-isotopie à une n'ayant que des points critiques d'indice p et $p+1$ ($2 \leq p \leq n-2$).

A une telle pseudo-isotopie on associe, après avoir fait un certain nombre de choix, un couple de matrices (A, B) : A est la matrice d'intersection (à coefficients dans $Z[\pi_1(V)]$, inversible, de torsion nulle) des cœurs des anses d'indice p et $p+1$, et B la matrice (à coefficients dans $Z[\pi_1(Q)]$) d'intersection des intérieurs des membranes correspondantes. Le critère de destruction mutuelle évoqué plus haut montre que la pseudo-isotopie est isotope à une isotopie si le couple (A, B) est égal à $(I, 0)$ (I étant la matrice identité).

Notons F_k^γ (resp. e_{hk}^α) la matrice différant de l'identité (resp. de la matrice nulle) seulement par l'élément à la place (k, k) (resp. (h, k) , h étant l'indice de ligne, k celui de colonne) qui vaut $\gamma \in \pm \pi_1(V)$ (resp. α), et posons, pour $h \neq k$, $E_{hk}^\alpha = I + e_{hk}^\alpha$.

Si (A', B') est le couple de matrices associé à d'autres choix, on passe du couple (A, B) au couple (A', B') par une suite finie d'opérations de l'un des quatre types suivants :

$$1^\circ \quad (A, B) \rightarrow (AF_k^\gamma, BF_k^\gamma + n f_{0*}(A e_{kk}^\gamma))$$

$$(\text{resp. } F_k^\gamma A, F_k^\gamma B + n f_{0*}(e_{kk}^\gamma A)) \quad (\gamma \in \pm \pi_1(V), n \in \mathbb{Z}),$$

$$2^\circ \quad (A, B) \rightarrow (A, B + f_{0*}(A e_{hk}^a))$$

$$(\text{resp. } A, B + f_{0*}(e_{hk}^a A)), \text{ où } g \in Z[\pi_1(Q)] \text{ et } h \neq k.$$

$$3^\circ \quad (A, B) \rightarrow (A E_{hk}^a, B E_{hk}^a + n(f_{0*} A e_{hk}^a))$$

$$(\text{resp. } (E_{hk}^a A, E_{hk}^a B + n f_{0*} e_{hk}^a A)), \text{ où } a \in Z[\pi_1(V)], n \in \mathbb{Z}, \text{ et } h \neq k.$$

$$4^\circ \quad (A, B) \rightarrow \left(\left(\frac{A}{0} \middle| \frac{0}{1} \right), \left(\frac{B}{0} \middle| \frac{0}{0} \right) \right).$$

On démontre aux chapitres IV et V qu'un couple de matrices (A, B) satisfaisant aux conditions énoncées plus haut est équivalent au couple $(I, 0)$ par une suite finie d'opérations de l'un des quatre types précédents si, et seulement si, la classe de la trace dans $Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$ de $Bf_{0*}(A)^{-1}$ est nulle.

Le parallélisme avec la construction du groupe de Whitehead est frappante à l'aide de l'interprétation suivante : soit $GL_n(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ l'ensemble des couples de matrices (A, B) , où A appartient au sous-groupe de $GL_n(Z[\pi_1(V)])$ engendré par les matrices du type E_{hk}^a, F_k^γ ($a \in Z[\pi_1(V)]$ et $\gamma \in \pm \pi_1(Q)$), et où B est une matrice carré d'ordre n à coefficients dans $Z[\pi_1(Q)]$. La loi

$$(A, B) \times (A', B') = (AA', Bf_{0*}(A') + f_{0*}(A)B')$$

fait de $GL_n(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ un groupe. Notons $GL(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ la limite inductive des GL_n pour l'inclusion

$$(A, B) \rightarrow \left(\left(\frac{A}{0} \middle| \frac{0}{1} \right), \left(\frac{B}{0} \middle| \frac{0}{0} \right) \right),$$

et soit $E(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ le sous-groupe engendré par les éléments du type $(E_{hk}^a, n e_{hk}^a)$ ($n \in Z$) et (I, e_{hk}^g) ($g \in Z[\pi_1(Q)]$).

Soit $K(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ le quotient de $GL(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ par le sous-groupe (distingué) $E(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$, et

$$Wh(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q)) = K(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q)) / ((F_k^\nu, n e_{kk}^\nu), \nu \in \pm \pi_1(Q)).$$

À la différence du groupe de Whitehead, le groupe $Wh(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ se calcule facilement : on montre que l'application

$$\text{tr} : Wh(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q)) \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z],$$

définie par $\text{tr}((A, B)) = \text{trace}(Bf_{0*}A^{-1})$ est un isomorphisme de groupes.

En fait, on est capable de définir une obstruction dans $Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$ pour toute pseudo-isotopie de Morse ordonnée.

C'est à ce niveau qu'on est obligé d'introduire des familles à un paramètre pour montrer que le processus qui fait passer d'une pseudo-isotopie quelconque à une pseudo-isotopie ordonnée est essentiellement unique.

On peut énoncer quelques conséquences de la proposition 1 :

COROLLAIRE 1 :

(A) *Sous les hypothèses de la proposition 1, si $\pi_1(Q) = 0$, alors $\pi_0(\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}, f_0)) = 0$.*

(B) *Si $Q = V \times S^2$ et $f_0 : V \rightarrow V \times S^2$ est le plongement standard, alors $\pi_0(\mathcal{F}(V^n, V^n \times S^2; f_0)) \simeq \mathbb{Z}[\pi_1(V)]/\mathbb{Z}[0]$ (si $\pi_1(V)$ est abélien).*

COROLLAIRE 2. — *On peut trouver une variété compacte, connexe, orientée Q^{n+2} ($n \geq 5$), une variété V' obtenue de D^n en attachant des anses d'indice $\leq n-1$, et un plongement $f_0 : V' \rightarrow Q$ tels que $\pi_1(\mathcal{F}(V', Q; f_0)) \neq 0$ (si les anses attachées sont toutes d'indice $< n-1$, on sait, par [8], que $\pi_1(\mathcal{F}(V', Q, f_0)) = 0$).*

Démonstration. — Soit un plongement $f_0 : V^n \rightarrow Q^{n+2}$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 1. Soient $V'^n = V^n - D^n$, $f'_0 = f_0|_{V'}$ et Q' le complémentaire dans Q d'un voisinage tubulaire de $f'_0(V')$. Le corollaire découle alors du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathcal{F}(V', Q; f'_0)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathcal{F}(D^n, Q'; f_0|_{D^n})) & \longrightarrow & \pi_0(\mathcal{F}(V, Q, f_0)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } i & \longrightarrow & \frac{\mathbb{Z}[\pi_1(Q)]}{\mathbb{Z}[0]} & \xrightarrow{i} & \frac{\mathbb{Z}[\pi_1(Q)]}{[ag-ga; \mathbb{Z}[0]]} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où la première ligne est la suite exacte d'homotopie de la fibration

$$\mathcal{F}(D^n, Q'; f_0|_{D^n}) \rightarrow \mathcal{F}(V, Q; f_0) \rightarrow \mathcal{F}(V', Q'; f'_0).$$

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [9], et ont fait l'objet d'une thèse sous la direction de C. MORLET, que l'auteur tient à remercier. Des conversations avec F. LAUDENBACH lui ont été très utiles au cours de la réalisation de ce travail, il lui a notamment signalé une erreur dans la version originale.

Chapitre 1 : Un lemme de Whitney relatif

1. Position du problème

Soient T^n une sous-variété connexe, compacte, orientée, de codimension 2 dans Q^{n+2} , à fibré normal trivialisé, connexe, compacte, orientée, M_1^p, M_2^q , deux sous-variétés simplement connexes de Q de dimensions complémentaires rencontrant T transversalement, uniquement le long de leur bord non vide, simplement connexe. L'objectif est de définir une obstruction algébrique à la disjonction de M_1 et M_2 par isotopie de Q laissant T globalement invariante. Le résultat principal de ce chapitre est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1. — *Soient $Q^{n+2}, T^n, M_1^p, M_2^q$ données comme plus haut. On suppose que l'inclusion induit un isomorphisme $\pi_1(Q - T) \rightarrow \pi_1(Q)$, et que $n \geq 5$ et $p, q \geq 3$. Dans le cas $p = 3$, on impose en plus que l'inclusion induit un isomorphisme $\pi_1(T - \partial M_1) \rightarrow \pi_1(T)$. Alors, moyennant un certain nombre de choix, on peut définir un couple (réduit) d'intersection $(\alpha(M_1, M_2), \beta(M_1, M_2)) \in Z[\pi_1(T)] \times Z[\pi_1(Q)]$, invariant par isotopie de Q laissant T invariante, nul si, et seulement si, on peut disjoindre M_1 et M_2 .*

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration de cette proposition.

2. Définition du couple d'intersection

Sous les hypothèses de la proposition 1.1 on peut définir le nombre d'intersection $\alpha'(\partial M_1, \partial M_2) \in Z[\pi_1(T)]$ dans T dès qu'on a fait choix d'un point de base \star dans T , de chemins μ_i ($i = 1, 2$) joignant \star à ∂M_i et d'orientations de ∂M_1 et ∂M_2 . On peut aussi définir classiquement en utilisant les choix qu'on vient de faire, le nombre d'intersection $\beta'(M_1, M_2) = \sum_{R \in M_1^p \cap M_2^q} \varepsilon_R g_R$ des intérieurs de M_1 et M_2 (après les avoir mis en position générale).

Ces deux nombres d'intersection ne sont pas indépendants d'après le lemme suivant :

LEMME 1.2. — *Soit $P \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ ayant un nombre d'intersection $\varepsilon_p a_p \in \pm \pi_1(T)$. Alors on peut, par une isotopie de M_1 fixe sur le bord, introduire un point d'intersection des intérieurs de M_1 et M_2 ayant pour*

nombre d'intersection $\pm \varepsilon_p i_*(a_p)$, i_* désignant l'homomorphisme induit par l'inclusion $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(Q)$.

Démonstration. — L'idée est de faire « pivoter » M_1 autour de P selon la figure :

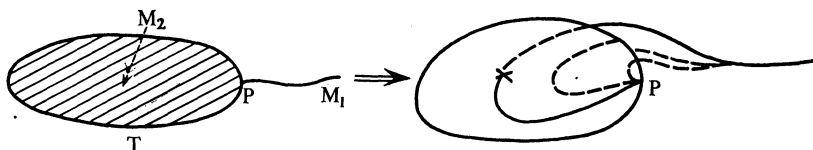


Fig. 1.1

LEMME 1.3. — On se place dans les hypothèses de la proposition 1.1. Soient $P, P' \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ deux points d'intersection avec nombres d'intersection opposés. Soit δ^2 un disque de Whitney dans T , c'est-à-dire, un 2-disque dont l'intérieur est plongé dans $T - \partial M_1 - \partial M_2$ et rencontrant ∂M_i le long d'un arc d_i de son bord d'extrémités P et P' . S'il existe un champ de vecteurs non nul ξ sur δ^2 normal à T rentrant dans M_1 le long de d_1 et définissant, le long de d_2 , un champ non colinéaire de même sens au champ rentrant dans M_2 , alors on peut supprimer les points d'intersection P et P' par une isotopie de M_1 n'introduisant pas d'autres points d'intersection de M_1 et M_2 .

Démonstration. — L'existence d'un disque de Whitney est assurée par l'hypothèse $\varepsilon_p a_p = -\varepsilon_{p'} a_{p'}$. En faisant pivoter au besoin M_1 autour de P comme il est indiqué sur la figure 1.2, on peut supposer que les nombres d'intersection dans Q , $\varepsilon_p a_p$ et $\varepsilon_{p'} a_{p'}$ sont opposés.

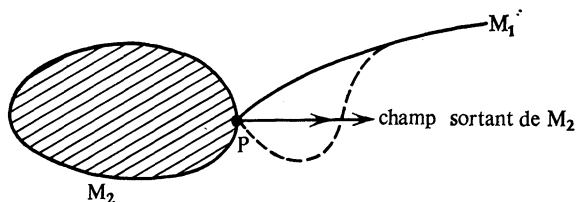


Fig. 1.2

On peut alors épaissir le procédé de Whitney de suppression des points d'intersection P et P' dans T , défini par δ^2 , et faire comme si M_1 et M_2 étaient des sous-variétés sans bord s'intersectant transversalement en des points P et P' ayant des nombres d'intersection opposés.

Pour définir l'obstruction à l'existence d'un champ de vecteurs vérifiant les propriétés du lemme 1.3, on associe à tout point $P \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ un triple $(n_p, \varepsilon_p, a_p) \in \mathbb{Z} \times \{\pm 1\} \times \pi_1(T)$: le couple (ε_p, a_p) est le nombre d'intersection habituel de ∂M_1 et ∂M_2 dans T , défini à partir d'un choix de point de base \star de T et de chemins μ_i d'origine \star , d'extrémité $A_i \in M_i$, définis précédemment. On désigne par λ_i un chemin sur ∂M_i joignant A_i à $P \in \partial M_1 \cap \partial M_2$, et par γ_i le champ défini le long de ∂M_i rentrant dans M_i .

Pour définir l'entier n_p , on fait choix d'un champ normal γ'_i (non nul) à T , défini le long de μ_i , coïncidant avec le champ γ_i en A_i , et définissant en \star un couple de vecteurs indépendants. Soit γ''_1 un champ normal à T , défini le long du chemin $\mu_2 \star \lambda_2$ coïncidant aux extrémités \star et P respectivement avec les champs γ'_1, γ_1 , et tel que le champ $\gamma_1 \cup \gamma'_1 \cup \gamma''_1$, défini le long du lacet $\mu_2^{-1} \star \lambda_2^{-1} \star \lambda_1 \star \mu_1$, soit trivial (par rapport à la trivialisation du fibré normal à T restreint au lacet $\mu_2^{-1} \star \lambda_2^{-1} \star \lambda_1 \star \mu_1$). L'entier n_p est alors défini comme le nombre (algébrique) de traversées du champ $\gamma_2 \cup \gamma'_2$ par le champ γ''_1 le long du chemin $\mu_2 \star \lambda_2$.

Plus précisément, soit ξ le fibré normal à T le long du chemin $\mu_2 \star \lambda_2$, et soit $\tau : (\mu_2 \star \lambda_2) \times D^2 \rightarrow \xi$ une trivialisation telle que le champ $\gamma_2 \cup \gamma'_2$ corresponde à $\tau((\mu_2 \star \lambda_2) \times D_1 \times \{0\})$. Au champ γ''_1 est associée une application

$$(\mu_2 \star \lambda_2, \star, P) \rightarrow (S^1, S^1 - s_0, S^1 - s_0),$$

s_0 désignant l'extrémité du rayon $D^1 \times \{0\}$. L'entier n_p correspond alors à la classe d'homotopie de cette application.

Remarque fondamentale. — Soient $p, p' \in \partial M_1 \cap \partial M_2$ avec des nombres d'intersection opposés $(\varepsilon_p, a_p = -\varepsilon_{p'}, a_{p'})$. Alors il existe un champ de vecteurs ayant les propriétés énoncées dans le lemme 1.3 si, et seulement si, $n_p = n_{p'}$.

DÉFINITION 1.4. — On se donne Q, T, M_1, M_2 comme dans la proposition 1.1, et on fait choix d'un point de base, de chemins et de champs comme plus haut. On appelle couple d'intersection (non réduit) le couple $(\alpha(M_1, M_2), \beta(M_1, M_2)) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \pi_1(T)] \times \mathbb{Z}[\pi_1(Q)]$, défini par

$$\alpha(M_1, M_2) = \sum_{P \in \partial M_1 \cap \partial M_2} \varepsilon_P(n_P, a_P) \quad \text{et} \quad \beta(M_1, M_2) = \sum_{R \in M_1^0 \cap M_2^0} \varepsilon_R g_R.$$

3. Influence des choix sur le couple d'intersection

Un changement de chemins, de champs et d'orientation transforme le couple (α, β) , donné dans la définition 1.4, en

$$\begin{aligned}\alpha'(M_1, M_2) &= \sum_{P \in \partial M_1 \cap \partial M_2} \varepsilon_P(n_P + n, \lambda a_P \mu), \\ \beta'(M_1, M_2) &= \sum_{R \in M_1^0 \cap M_2^0} \varepsilon_R i_*(\lambda) g_R i_*(\mu),\end{aligned}$$

où $\lambda, \mu \in \pm \pi_1(T)$ et $n \in \mathbb{Z}$.

4. Influence d'une isotopie de M_1 sur le couple d'intersection

Soit $h_t : M_1 \rightarrow Q$ une isotopie (parmi les plongements de M_1 satisfaisant aux hypothèses du début du chapitre). Génériquement, cette isotopie présente (par rapport à M_2) trois sortes d'accidents :

(a) M_1 rencontre M_2 transversalement sauf en un point R de son intérieur, où il y a contact d'ordre 1.

(b) ∂M_1 et ∂M_2 se rencontrent transversalement sauf en un point P , où il y a contact d'ordre 1 (dans T et Q), les intérieurs se rencontrant transversalement.

(c) ∂M_1 et ∂M_2 (resp. M_1 et M_2) se rencontrent transversalement dans T (resp. Q), et il y a exactement un point $P \in \partial M_1 \cap \partial M_2$, où les (demi-)espaces tangents à M_1 et M_2 se coupent suivant un (demi-)sous-espace de dimension 1.

L'effet de la traversée de l'accident (a) (resp. (b)) est d'ajouter à $\beta(M_1, M_2)$ (resp. $\alpha(M_1, M_2)$) un terme du type $\varepsilon g - \varepsilon g$ (resp. $\varepsilon(n, a) - \varepsilon(n, a)$), ce qui ne change pas le couple. L'effet de la traversée de l'accident (c), qui correspond au pivotement autour du point P , décrit plus haut, est de transformer le couple

$$(\alpha(M_1, M_2) = \sum_{p' \neq p} \varepsilon_{p'}(n_{p'}, a_{p'}) + \varepsilon_p(n_p, a_p), \beta(M_1, M_2))$$

en

$$\begin{aligned}(\alpha'(M_1, M_2) &= \sum_{p' \neq p} \varepsilon_{p'}(n_{p'}, a_{p'}) \\ &+ \varepsilon_p(n_p \pm 1, a_p), \beta(M_1, M_2) \pm \varepsilon_p i_*(a_p) (-1)^{\dim M_2}.\end{aligned}$$

COROLLAIRE 1.5. — *On se donne Q, T, M_1, M_2 , comme dans la proposition 1.1, et des choix de chemins et de champs. A cette donnée est associé*

un couple d'intersection unique du type

$$(\alpha(M_1, M_2) = \sum_{p \in \partial M_1 \cap \partial M_2} \varepsilon_p(0, a_p), \beta(M_1, M_2)),$$

appelé couple d'intersection réduit, qu'on considère comme appartenant à $Z[\pi_1(T)] \times Z[\pi_1(Q)]$. Ce couple réduit est un invariant d'isotopie.

La proposition 1.1 est alors démontrée compte tenu du lemme 1.3 et de la remarque fondamentale.

COROLLAIRE 1.6. — *Sous les hypothèses de la proposition 1.1, il existe une isotopie h_t de Q laissant T invariante telle que $h_1(M_1)$ et M_2 se coupent transversalement exactement en un point de leur bord si, et seulement si, le couple d'intersection réduit est du type $(a, n i_*(a))$, où $a \in \pm \pi_1(T)$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

Chapitre 2 : L'espace des pseudo-isotopies

1. L'espace des pseudo-isotopies

Soient $(V^n, \partial V)$ et $(Q^q, \partial Q)$ deux variétés différentiables compactes, connexes, de dimension respective n et q , et $f_0 : V \rightarrow Q$ un plongement fixé dans toute la suite tel que $f_0(\partial V) \subset \partial Q$.

DÉFINITION 2.1. — $\mathcal{F}(V, Q; f_0)$ désigne l'ensemble des pseudo-isotopies $F : V \times I \rightarrow Q \times I$ induisant $f_0 \times \text{id}_I$ sur $V \times \{0\} \cup \partial V \times I$ telles que le complémentaire de l'image de F soit un cylindre. On munit \mathcal{F} de la topologie C^∞ .

Remarque. — D'après le théorème du s -cobordisme, si $\dim Q \geq 5$ et si le plongement f_0 est tel que $i_* : \pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme, alors une pseudo-isotopie F appartient à $\mathcal{F}(V, Q; f_0)$ si, et seulement si, les inclusions induisent des isomorphismes :

$$\pi_1(Q \times I - F(V \times I)) \rightarrow \pi_1(Q \times I) \quad \text{et} \quad \pi_1(Q \times \{1\} - F(V \times \{1\})) \rightarrow \pi_1(Q)$$

(c'est toujours vrai si $q - n \geq 3$).

On a le lemme fondamental suivant :

LEMME 2.2. — *Si le fibré normal à f_0 admet une section non nulle, alors toute pseudo-isotopie $F : V \times I \rightarrow Q \times I$ à image verticale (c'est-à-dire telle que $F(V \times I) = f_0(V) \times I$) est isotope à une isotopie.*

Démonstration. — Soit f_1 un plongement de V dans Q « parallèle » à f_0 obtenu en poussant f_0 le long d'une section non nulle de son fibré normal. Un argument classique de suspension montre qu'on peut étendre F et $f_1 \times \text{id}_I$ en un plongement $G : (V \times I) \times J \rightarrow Q \times I$ tel que

$$G(V \times \{i\} \times J) \subset Q \times \{i\} \quad (i = 0, 1).$$

Le lemme en résulte immédiatement. Comme conséquence immédiate, on a qu'une pseudo-isotopie dont la fonction cote, c'est-à-dire la composition $V \times I \xrightarrow{F} Q \times I \xrightarrow{p} I$, est sans point critique est isotope à une isotopie.

2. Stratification de l'espace des pseudo-isotopies

Soit $\mathcal{F}(V^n)$ l'espace des applications $C^\infty f : V^n \times I \rightarrow I$ telles que $f^{-1}(i) = V \times \{i\}$ pour $i = 0, 1$. Cet espace est muni d'une stratification naturelle définie dans [1]. L'application continue $p_* : \mathcal{F}(V, Q; f_0) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, définie par $p_*(F) = p \circ F$ permet de stratifier $\mathcal{F}(V, Q; f_0)$ en prenant les images réciproques des strates de $\mathcal{F}(V)$. La première strate $p_*^{-1}(\mathcal{F}^0(V))$, notée $\mathcal{F}^0(V, Q; f_0)$ est constituée des pseudo-isotopies dont la fonction cote n'admet que des points critiques de Morse situés à des niveaux différents. La seconde strate $\mathcal{F}^1(V, Q; f_0)$ se décompose en deux parties

$$\mathcal{F}_\alpha^1(V, Q; f_0) = p_*^{-1}(\mathcal{F}_\alpha^1(V)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_\beta^1(V, Q; f_0) = p_*^{-1}(\mathcal{F}_\beta^1(V)).$$

$F \in \mathcal{F}_\alpha^1(V, Q; f_0)$ si sa fonction cote a un point naissance, si les autres points critiques sont de Morse, et si ses points critiques sont à des niveaux distincts.

$F \in \mathcal{F}_\beta^1(V, Q; f_0)$ si sa fonction cote n'a que des points critiques de Morse à des niveaux distincts sauf exactement deux d'entre eux.

On montre comme dans [1] que $\mathcal{F}(V, Q, f_0) - \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$ est de codimension 2, ce qui implique que $\pi_0(\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F})$ est une bijection. De plus, $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$ est une stratification de codimension 1 au sens de [1].

3. Membrane d'un point critique de Morse d'une pseudo-isotopie

On note D^{i+1} le disque de rayon 1 de R^{i+1} , et on pose

$$D_+^{i+1} = \{x \in D^{i+1}; x_{i+1} \geq 0\}, \quad \partial_+ D^{i+1} = \partial D^{i+1} \cap D_+.$$

DÉFINITION 2.3. — Soit c un point critique de Morse d'indice i de la fonction cote $p \circ F : V \times I \rightarrow Q \times I \rightarrow I$. On appelle membrane descendante de c jusqu'à un niveau $Q_t = p^{-1}(t)$, situé en dessous de $F(c)$, l'image d'un plongement

$$G : (D_+^{i+1}, \partial_+ D^{i+1}, D^i) \rightarrow (Q \times [t, 1], F(V \times I) \cap Q \times [t, 1], Q_t)$$

vérifiant ,

1° L'image de G rencontre $F(V \times I)$ transversalement le long de $G(\partial_+ D)$.

2° $G(0, \dots, 0, 1) = F(c)$.

3° $p \circ G$ restreint à l'intérieur de D^{i+1} est sans point critique ainsi que $p \circ G|_{\partial_+ D^{i+1}} - (0, 0, \dots, 1)$.

4° $G(D^i) \subset Q_t$.

$G(D^i)$ est appelée la projection de la membrane sur le niveau Q_t . $F^{-1}(G(\partial_+ D^{i+1}))$ est une nappe descendante (au sens de [1]) du point critique c de $p \circ F$.

On a la notion correspondante de membrane ascendante.

LEMME 2.4. — Soient c un point critique de Morse de $p \circ F$, et Q_t (resp. Q_t) un niveau en-dessous (resp. au-dessus) de $F(c)$, tel que la fonction cote n'ait pas de point critique entre le niveau de $F(c)$ et Q_t (resp. Q_t). Alors il existe une membrane descendante (resp. ascendante) de c jusqu'à Q_t (resp. Q_t).

Démonstration. — Elle est évidente compte tenu de l'écriture locale de F au voisinage de c sous la forme

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1 \dots x_{n+1}, 0 \dots 0, -\sum_1^p x_i^2 + \sum_{p+1}^{n+1} x_i^2)$$

On aura besoin à plusieurs reprises du lemme suivant :

LEMME 2.5 (du cylindre). — Soit $F : V \times I \rightarrow Q \times I$ une pseudo-isotopie de Morse dont les points critiques sont équipés d'un système disjoint de bimembranes $\{B_i\}$ allant de $Q \times \{0\}$ à $Q \times \{1\}$. On note $\{b_i\}$ les binappes correspondantes, et \overline{D}_i les projections des membranes descendantes sur $Q \times \{0\}$. On a alors un difféomorphisme

$$(Q \times I - \bigcup B_i, F(V \times I) - \bigcup b_i) \simeq (Q \times \{0\} - \bigcup \overline{D}_i, f_0(V - \bigcup \partial \overline{D}_i) \times I).$$

4. Chemins de croisements et membranes

Soient $F \in \mathcal{F}^0(V, Q; f_0)$, et c_0, c_1, \dots, c_l des points critiques consécutifs de $p \circ F$ tels que

$$p \circ F(c_0) = \alpha_0 > p \circ F(c_1) = \alpha_1 \dots > p \circ F(c_l) = \alpha_l.$$

On appelle chemin de croisement d'origine F relatif à ces données un chemin dans $\mathcal{F}^0(V, Q, f_0) \cup \mathcal{F}_\beta^1$ réalisant le croisement successif de c_0 avec $c_1 \dots c_l$. On a le lemme suivant :

LEMME 2.6 ([1], chap. II, § 3). — *L'ensemble des classes d'homotopie de chemins de croisements d'origine F relatif à la donnée $(c_0 \dots c_l)$ (avec origine fixée et extrémité restant dans \mathcal{F}^0) est en bijection avec l'espace des classes d'isotopie de membranes descendantes de c_0 allant jusqu'à un niveau immédiatement au-dessous de c_l .*

La bijection est illustrée par la figure suivante :

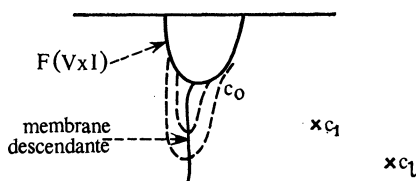


Fig. 2.1

On en déduit un nouveau lemme.

LEMME 2.7 (réarrangement des points critiques). — *On suppose $q \geq n+2$. Toute pseudo-isotopie $F \in \mathcal{F}^0(V^n, Q^q; f_0)$ est isotope à une pseudo-isotopie dont la fonction cote est ordonnée, c'est-à-dire que si $\text{indice } c_1 \leq \text{indice } c_2$, alors $p \circ F(c_1) < p \circ F(c_2)$.*

Démonstration. — Soient c_1, c_2 deux points critiques consécutifs de $p \circ F$ tels que $p \circ F(c_1) < p \circ F(c_2)$, et $j = \text{indice } c_2 \leq \text{indice } c_1 = i$. Soit Q_{i_0} un niveau intermédiaire entre c_1 et c_2 . Par transversalité, compte tenu des hypothèses $q \geq n+2$ et $j \leq i$, on peut supposer que la projection de la membrane descendante de c_2 (de dimension j) et celle de la membrane ascendante de c_1 (de dimension $n+1-i$) sur Q_{i_0} sont disjointes. En uti-

lisant le lemme du cylindre, on peut alors faire descendre la membrane de c_2 jusqu'à un niveau au-dessous de c_1 , et faire descendre le point c_2 au-dessous de c_1 le long de cette membrane, d'après le lemme 2.6.

LEMME 2.8 (*d'apparition de deux points critiques*). — Soient

$$F : V \times I \rightarrow Q \times I$$

une pseudo-isotopie, et c un point non critique pour la fonction cote. Alors, par une isotopie n'affectant qu'un voisinage aussi petit que l'on veut de c , on peut faire apparaître deux points critiques de Morse d'indice consécutif.

La déformation est illustrée par le graphique classique (fig. 2.2).

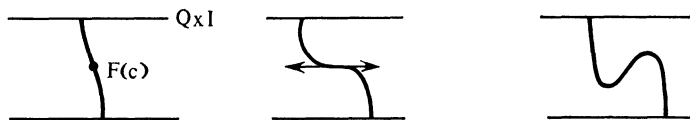


Fig. 2.2

LEMME 2.9 (*de destruction mutuelle*). — Soient c_1, c_2 deux points critiques de Morse consécutifs d'indice p et $p+1$, et Q_{t_0} un niveau intermédiaire entre c_1 et c_2 . Alors c_1 et c_2 se détruisent mutuellement si, et seulement si, il existe une membrane descendante (resp. ascendante) de c_1 (resp. (c_2)) jusqu'au niveau Q_{t_0} telles que :

1° Les bords des nappes correspondant aux membranes se coupent en un seul point et transversalement dans $V_{t_0} = F(V \times I) \cap Q_{t_0}$.

2° Les intérieurs des projections des membranes sur Q_{t_0} sont disjoints.

LEMME 2.10 (*Introduction de points critiques géométriquement*). — Soient V_0^n une sous-variété de Q^q , et $\mu : D^p \times D^{n+1-p} \rightarrow Q$ un plongement ne rencontrant V_0 que le long de $\mu(\partial D^p \times D^{n+1-p})$. On note (W, V_0, V_1) le cobordisme

$$(V_0 \times [0, 1] \cup_{V_0 \times \{1\}} \text{Im } \mu, V_0 \times \{0\}, \partial W - V_0 \times \{0\}).$$

Alors il existe un plongement de (W, V_0, V_1) dans $(Q \times [0, 1], Q \times \{0\}, Q \times \{1\})$ ayant un seul point critique, d'indice p , dont la projection de la membrane descendante sur $Q \times \{0\}$ est le cœur de l'anse définie par μ ,

c'est-à-dire $\mu(D^p \times \{0\})$. L'idée de la démonstration est donnée par la figure suivante :

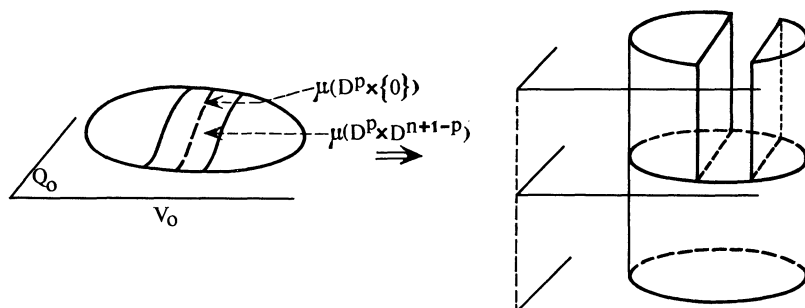


Fig. 2.3

Chapitre 3 : Classification des membranes Application à la suppression des points critiques

1. Coupole d'un point critique

Soient c un point critique de Morse d'indice p de F , et D une membrane descendante de c jusqu'à un niveau Q_{i_0} , définie par un plongement

$$G : (D_+^{p+1}, \partial D^{p+1}, D^p) \rightarrow (Q \times I, F(V \times I), Q_{i_0}).$$

Soit $\tau : \partial_+ D^{p+1} \times (D^2, \{0\}) \rightarrow (Q \times I, F(V \times I))$ la restriction à la nappe descendante de D d'un voisinage tubulaire de $F(V \times I)$ dans $Q \times I$. On pose

$$\frac{1}{2} D_+^{p+1} = \{x \in D_+^{p+1}; \sum x_i^2 \leq 1/2\}.$$

On peut toujours supposer que

$$\text{Im } \tau \cap D = G\left(D_+^{p+1} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{D}_+^{p+1}\right) = \tau(\partial_+ D^{p+1} \times J),$$

où J est un rayon de D^2 d'extrémité x_0 . Posons $(1/2) D = G((1/2) D_+^{p+1})$, et soit $((1/2) D) \times I$ un épaississement de $(1/2) D$ tel que $(\partial_+ (1/2) D) \times I$ soit un épaississement de $\partial_+ (1/2) D$ dans le bord latéral du voisinage tubulaire τ (voir fig. 3.1) :

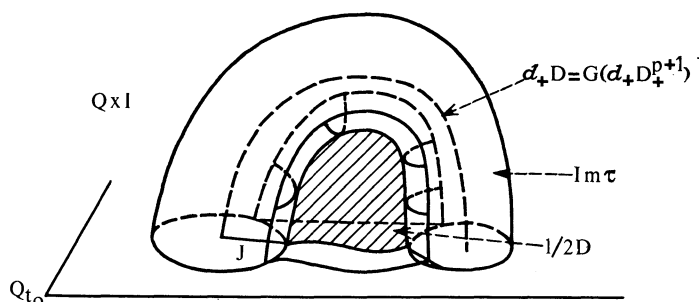


Fig. 3.1

DÉFINITION 3.1. — La coupole descendante du point critique c associée à la membrane descendante D est le disque Δ^{p+1} défini (après lissage) par

$$\Delta^{p+1} = \left[\tau(\partial_+ D^{p+1} \times S^1) - \left(\partial_+ \frac{1}{2} D \right) \times I \right] \cup \left(\frac{1}{2} D \right) \times \partial I.$$

C'est donc un disque de $Q \times I - F(V \times I)$ ayant un seul point critique pour la fonction cote dont le bord est contenu dans le niveau Q_{t_0} . On peut définir de la même façon la coupole ascendante associée à une membrane ascendante.

2. Classification des membranes descendantes d'un point critique d'indice p ne rencontrant que des niveaux critiques de même indice

On se place dans le cas $q = n + 2$. Soient $Q \times \{t_0\}$ et $Q \times \{t_1\}$ deux niveaux non critiques ($t_1 < t_0$) tels que, sur la tranche $Q \times [t_1, t_0]$, F n'ait que des points critiques d'indice p ($1 \leq p \leq n$), $c_1 \dots c_m$. On équipe ces points critiques d'une famille disjointe de bímébranés allant de $Q \times \{t_0\}$ à $Q \times \{t_1\}$. On note Y l'union des projections \overline{M}_i des membranes ascendantes de c_i ($i = 1 \dots m$) sur le niveau $Q \times \{t_0\}$: c'est une famille de m sous-variétés difféomorphes à D^{n+1-p} rencontrant

$$V_{t_0} = Q \times \{t_0\} \cap F(V \times I)$$

transversalement le long de leur bord. Soit c_0 un point critique d'indice p immédiatement au-dessus de $Q \times \{t_0\}$. On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{D} des classes d'isotopie de membranes descendantes de c_0 jusqu'au niveau $Q \times \{t_1\}$ (cet ensemble est non vide par transversalité).

L'espace des membranes descendantes de c_0 jusqu'au niveau $Q \times \{t_0\}$ étant acyclique (proposition 4 de l'appendice de [1]), \mathcal{D} s'identifie à l'espace \mathcal{D}' des classes d'isotopie de sous-variétés $(W, U_0, U_1, \partial_+ W)$ de $Q \times [t_1, t_0]$ difféomorphes à $(D^p \times [0, 1], D^p \times \{0\}, D^p \times \{1\}, \partial D^p \times I)$ rencontrant $Q \times \{t_0\}$ le long d'une sous-variété fixée U_0 disjointe de Y , $Q \times \{t_1\}$ le long de U_1 et $Q \times [t_1, t_0] \cap F(V \times I) = V_{t_1 t_0}$ le long de $\partial + W$.

Soit $Q \times \{t'_0\}$ un niveau immédiatement au-dessous de $Q \times \{t_0\}$. On montre (§ 4, chap. II de [1]) que tout élément de \mathcal{D}' est représenté par une sous-variété W « verticale » sur $Q \times [t_1, t'_0]$ (pour une structure de produit donnée par le lemme du cylindre). Ces sous-variétés s'identifient aux familles à un paramètre $\{U_t\}$ de sous-variétés difféomorphes à D^p , avec origine fixée U_0 et extrémité dans $Q \times \{t_0\} - Y$, rencontrant V_{t_0} transversalement le long de leur bord. Les accidents génériques de U_t (par rapport à $Y = \bigcup_i \bar{M}_i$) sont de deux types :

(A) U_t^p et \bar{M}_i^{n+1-p} se coupent en un point de leur intérieur avec contact d'ordre 0.

(B) U_t^p et \bar{M}_i^{n+1-p} se coupent en un point de leur bord avec contact d'ordre 0 dans V_{t_0} et $Q \times \{t_0\}$.

Partant d'une membrane initiale D_0 de c_0 le passage par un accident du type (A) correspond au passage de la membrane D_0 « par dessus » la coupole Δ_i du point critique c_i . En projection sur un niveau Q_α au-dessous de c_i la projection \bar{D}_0 de D_0 est remplacée par sa somme connexe avec le bord de la coupole Δ_i . Cette opération, appelée somme connexe au sens A de D_0 avec Δ_i , et notée $D_0 \#_\lambda^A \Delta_i$ (λ étant un chemin dans le niveau Q_α joignant l'intérieur de \bar{D}_0 et $\partial \Delta_i$), est illustrée par la figure suivante :

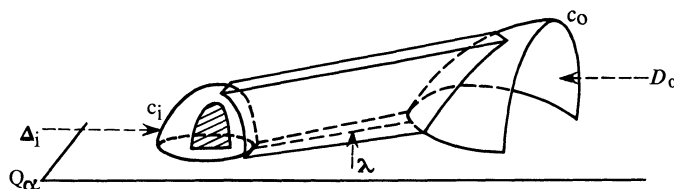


Fig. 3.2

Le passage par un accident du type (B) a pour effet de remplacer D_0 par sa somme connexe le long des bords avec la membrane descendante D_i

de c_i qu'on appellera somme connexe au sens (B). Elle est illustrée par la figure suivante :

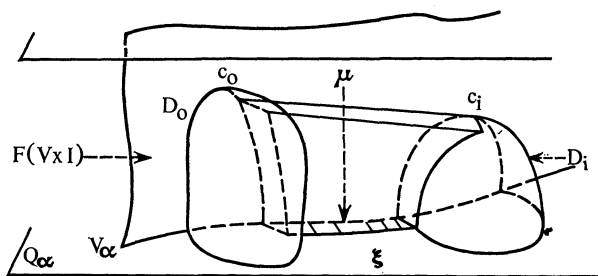


Fig. 3.3

Cette somme connexe est définie par la donnée d'un plongement $\mu : [0, 1] \times D^p \rightarrow V_\alpha$ rencontrant \bar{D}_0 (la projection de D_0) sur Q_α (resp. \bar{D}_i), le long de $\{0\} \times D^p$ (resp. $\{1\} \times D^p$) et d'un champ (non nul) ξ le long de $\mu([0, 1] \times \{0\})$ normal à V_α induisant aux extrémités le champ rentrant dans \bar{D}_0 et \bar{D}_i . On notera le résultat $D_0 \#_{\mu, \xi}^B D_i$.

3. Décomposition en anses du complémentaire d'une pseudo-isotopie

Soit F une pseudo-isotopie de Morse ordonnée de $\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}; f_0)$. On note Q_p (resp. $V_p = Q_p \cap F(V \times I)$) un niveau intermédiaire entre les points critiques, d'indice $p-1$ et p , et Q_{ij} (resp. V_{ij}) la partie de $Q \times I$ (resp. $F(V \times I)$) comprise entre les niveaux Q_i et Q_j . On prend $Q_0 = Q \times \{0\}$. On note N un voisinage tubulaire de F , et on pose $N_{ij} = Q_{ij} \cap N$, $N_p = N \cap Q_p$. On pose également

$$\begin{aligned} X &= \overline{Q_0 - N_0}, & A &= \overline{Q_{0, p+1} - N_{0, p+1}}, & B &= \overline{Q_{p+1, p+2} - N_{p+1, p+2}}, \\ C &= \overline{Q_{p+2} - N_{p+2}}, & Y &= \overline{Q_{p+1} - N_{p+1}} & \text{et} & \quad Y' = Y \cup \delta N_{0, p+1} \end{aligned}$$

($\delta N_{0, p+1}$ désignant le bord latéral de $N_{0, p+1}$), $\bar{W} = \overline{Q_{0, p+2} - N_{0, p+2}}$ (voir fig. 3.4 ci-après) :

Dans un premier temps, on va supposer qu'il n'y a qu'un seul point critique c , d'indice p , entre les niveaux Q_0 et Q_{p+1} , et on va s'intéresser à une décomposition en anses du cobordisme (A, X, Y') . Soient (D, M) une bimenbrane de c allant de Q_0 à Q_{p+1} , et Δ^{p+1} la coupole définie au

paragraphe 1 de ce chapitre associée à la membrane descendante D . On a alors le lemme suivant :

LEMME 3.2

(a) Avec les notations précédentes, A s'obtient de X en attachant la $(p+1)$ -anse dont le cœur est la coupole Δ^{p+1} du point critique c .

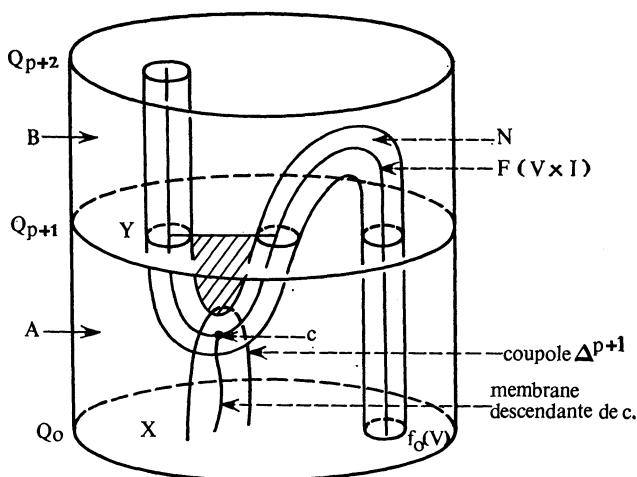


Fig. 3.4

(b) L'anse duale est la membrane ascendante M .

Démonstration. — Elle est évidente géométriquement sur la figure 3.4. Le lemme se généralise immédiatement au cas où F admet un nombre fini de points critiques d'indice p sur $Q_{0,p+1}$.

On suppose maintenant que F est une pseudo-isotopie ordonnée telle que $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ soit un isomorphisme. On suppose que F admet l points critiques $\{c_i, i = 1, \dots, l\}$ sur $Q_{0,p+1}$ tous indices p , et l' points critiques $\{c'_j\}$ d'indice $p+1$ sur la tranche

$$Q_{p+1,p+2} \quad (2 \leq p \leq n-2).$$

Soient $\{(D_i, M_i)\}$ (resp. (D'_j, M'_j)) un système disjoint de bimembranes des points critiques c_i (resp. c'_j) joignant Q_0 à Q_{p+1} (resp. Q_{p+1} à Q_{p+2}). On note (S_i, T_i) (resp. (S'_j, T'_j)) les binappes correspondantes. On choisit un point de base \star dans $V_{0,p+2}$ et une famille de chemins α_i (resp. α'_j)

dans $V_{0,p+2}$ joignant \star à c_i (resp. c'_i). On désigne par $(\partial T_i, \partial S'_j)$ le nombre d'intersections dans V_{p+1} de ∂T_i et $\partial S'_j$ équipés des chemins précédents. Il est bien connu que l'homomorphisme bord

$$\partial : H_{p+1}(\widetilde{V_{0,p+2}}, \widetilde{V_{0,p+1}}) \rightarrow H_p(\widetilde{V_{0,p+1}}, \widetilde{V_0})$$

est surjectif, et que sa matrice dans les bases définies par les nappes descendantes $\{S'_j\}$ et $\{S_i\}$ est précisément la matrice $(\partial T_i, \partial S'_j)$ ($i = 1 \dots l$, $j = 1, \dots l'$).

Soit $B' = B \cup \overline{(Y' - Y)} \times I$, où B et $\overline{(Y' - Y)} \times I$ sont recollés suivant le graphique :

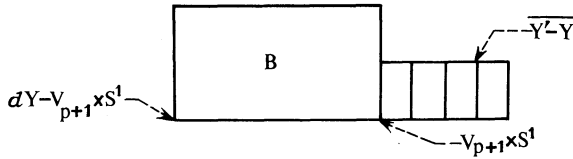


Fig. 3.5

Considérons le cobordisme $(W, X, \overline{\partial W - X})$. Il est clair que Y' est un niveau intermédiaire entre A et B' . D'après le lemme 3.2, A s'obtient de X en attachant les $(p+1)$ -anses dont les cœurs sont les coupoles Δ_i ($i = 1 \dots l$) des points critiques c_i . De la même façon, on passe de Y à B (resp. Y' à B') en attachant les $(p+2)$ -anses dont les cœurs sont les coupoles Δ'_j ($j = 1 \dots l'$) associées aux membranes des points critiques d'indice $p+1$. Donc l'homomorphisme bord

$$\delta : H_{p+2}(\tilde{W}, \tilde{A}) \simeq H_{p+2}(\tilde{B}', \tilde{Y}') \rightarrow H_{p+1}(\tilde{A}, \tilde{X})$$

est surjectif et sa matrice dans les bases constituées par les coupoles est la matrice d'intersection (dans Y') : $(\partial M_i, \partial \Delta'_j)$ (d'après le (b) du lemme 3.2). Le bord ∂M_i de la membrane ascendante de c_i se décompose en deux parties : la projection \overline{M}_i sur Q_{p+1} et $\partial M_i - \overline{M}_i$ contenue dans $Y' - Y$. Comme $\partial \Delta'_j$ est contenu dans Y , seule la projection \overline{M}_i intervient dans le calcul de $\partial M_i, \partial \Delta'_j$.

Par construction de $\partial \Delta'_j$, à tout point d'intersection R de $\partial S'_j$ avec ∂T_i correspond un point d'intersection R' de $\partial \Delta'_j$ avec \overline{M}_i et à tout point P d'intersection de l'intérieur de $\overline{D'_j}$ (projection de la membrane D'_j) avec \overline{M}_i

correspond un couple de points d'intersection (P_1, P_2) de $\partial\Delta'_j$ avec \overline{M}_i avec des nombres d'intersection opposés (voir fig. 3.6) :

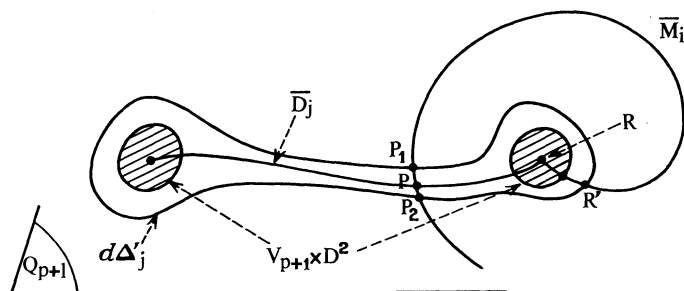


Fig. 3.6

LEMME 3.3. — Avec les notations du début du paragraphe, la matrice de l'homomorphisme $\delta : H_{p+2}(\tilde{W}, \tilde{A}) \simeq H_{p+2}(\tilde{B}, \tilde{Y}) \rightarrow H_{p+1}(\tilde{A}, \tilde{X})$ dans les bases constituées par les coupes, est l'image par l'homomorphisme $f_{0*} : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(Q)$ de la matrice de

$$\partial : H_{p+1}(\widetilde{V_{0,p+2}}, \widetilde{V_{0,p+1}}) \rightarrow H_p(\widetilde{V_{0,p+1}}, \widetilde{V_0})$$

dans les bases constituées par les nappes descendantes (pour $2 \leq p \leq n-2$).

4. Suppression des points critiques

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — Soit F une pseudo-isotopie de $\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}, f_0)$, où $f_0 : V \rightarrow Q$ est un plongement tel que $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme. Alors F est isotope à une pseudo-isotopie n'ayant que des points critiques d'indice p et $p+1$ pour $2 \leq p \leq n-2$.

Démonstration. — On reprend l'idée de SMALE ([5] par exemple) qui consiste à supprimer les points critiques d'indice i en introduisant autant de points critiques d'indice $i+2$. Comme dans la démonstration du h -cobordisme, la suppression des points critiques d'indice $0, 1, n, n+1$ nécessite un argument spécial.

(a) Suppression des points critiques d'indice 0 (resp. $n+1$). — Soient F une pseudo-isotopie ordonnée, $c_1 \dots c_l$ (resp. $c'_1 \dots c'_l$) ses points cri-

tiques d'indice 0 (resp. 1), et Q_k un niveau intermédiaire entre les points critiques d'indice $k-1$ et k . On choisit un système disjoint de membranes ascendantes M_i (resp. descendantes D'_j) des points critiques c_i ($i = 1 \dots l$) (resp. c'_j), et on note \bar{M}_i (resp. \bar{D}'_j) leur projection sur Q_1 . La sous-variété V_1 se compose d'une sous-variété V'_0 isotope à V_0 et de sphères de dimension n , $\partial\bar{M}_i$. La sous-variété V_2 étant connexe, il existe pour tout $i = 1 \dots l$, une projection \bar{D}'_{j_i} joignant $\partial\bar{M}_i$ à V'_0 . Ces projections \bar{D}'_{j_i} peuvent éventuellement couper en leur intérieur les projections \bar{M}_i (voir fig. 3.7) :

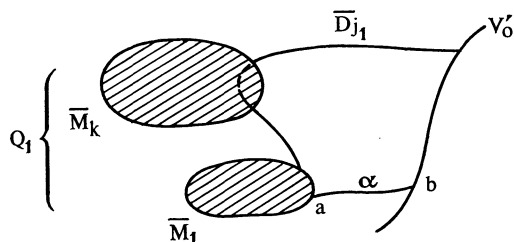


Fig. 3.7

Soit c_1 le point critique d'indice 0 le plus haut. Soit α un chemin dans Q_1 joignant M_1 à V'_0 vérifiant les propriétés suivantes :

- 1° α est disjoint de \bar{M}_i pour $i \neq 1$ et de \bar{D}_j .
- 2° α ne rencontre \bar{M}_1 (resp. V'_0) que transversalement en son extrémité a (resp. b).

Remarque. — Les propriétés de α sont inchangées en faisant sa somme connexe avec un cercle plongé représentant un élément de

$$\pi_1(Q_1 - V'_0 - \bigcup_{i=1}^l \bar{M}_i - \bigcup_{j=1}^{l'} \bar{D}_j) \approx \pi_1(Q - V_0).$$

D'après le lemme 2.10 et le lemme de destruction mutuelle, ce chemin α permet d'introduire un point critique d_1 d'indice 1 se détruisant avec c_1 .

La sous-variété V_2 étant connexe, on peut joindre a et b dans V_2 par un chemin β . En poussant β dans $Q_2 - V_2$ le long d'un champ normal à V_2 , $\alpha \cup \beta$ représente un élément λ de

$$\pi_1(Q_2 - V_2) \approx \pi_1(Q_1 - V'_0) \approx \pi_1(Q_0 - V_0).$$

Compte tenu de la remarque faite plus haut, après action éventuelle d'un élément de $\pi_1(Q - V_0)$, on peut supposer que $\alpha \cup \beta$ est isotope à zéro dans $\pi_1(Q_2 - V_2)$, et donc borde un disque δ^2 (si $2+n \geq 5$) dans $Q_2 - V_2$.

D'après le lemme 2.10 et le lemme de destruction mutuelle, δ^2 définit un point critique d_2 d'indice 2 se détruisant mutuellement avec d_1 défini précédemment. La pseudo-isotopie F est isotope à celle obtenue en introduisant ces deux points critiques d_1 et d_2 . On a vu que d_1 et c_1 se détruisent mutuellement. Finalement, on peut détruire c_1 en introduisant un point critique d'indice 2, d_2 . Par récurrence, on peut tuer tous les points critiques d'indice 0. Le même procédé à l'autre extrémité permet de tuer les points critiques d'indice $(n+1)$.

(b) *Suppression des points critiques d'indice 1.* — On prend les mêmes notations qu'en (a) en translatant les indices d'une unité : (c_i) ... désigne maintenant les points critiques d'indice 1, ... Le niveau V_2 de $F(V \times I)$ au-dessus des points critiques d'indice 1 est obtenu de V_0 par chirurgies définies par les anses dont le cœur (resp. le disque transverse) et \bar{D}_i (resp. \bar{M}_i). Ces anses sont les images de plongements $\mu_i : \bar{D}_i \times D^n \rightarrow Q_0$ avec $\mu_i(\partial \bar{D}_i \times D^n) \subset V_0$. Soient α un parallèle au cœur \bar{D}_i sur le bord latéral de μ_i , et a, b ses extrémités (voir fig. 3.8) :

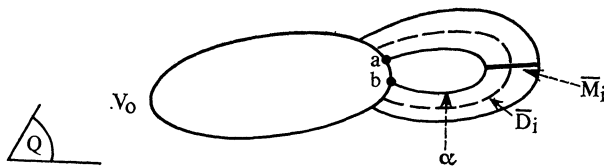


Fig. 3.8

On sait qu'il existe un chemin β sur V_0 évitant les sphères d'attachement des anses d'indice 1 et 2 tel que le lacet $\alpha \cup \beta$ soit homotope à zéro dans $V_{2,3}$. Du fait que $\pi_1(Q - V_0) \approx \pi_1(Q)$ et par position générale, ce lacet est homotope à zéro dans $Q - U$, où $U = V_0 \cup \text{Im } \mu_i$. Il borde donc un disque plongé δ^2 (si $n+2 \geq 5$) dans $Q - U$, ne rencontrant U que le long de son bord. On peut supposer que δ^2 ne rencontre pas les membranes des points critiques d'indice 3. Par le lemme du cylindre, il apparaît donc au niveau Q_3 avec bord contenu dans V_3 . Par construction, $\partial \delta^2$ borde un disque plongé δ'^2 dans V_3 ($n \geq 5$). La sphère $\delta^2 \cup \delta'^2$ définit un élément $\lambda \in \pi_2(Q_3 - V_3)$.

Affirmation (★). — On peut choisir δ^2 de sorte que $\lambda = 0 \in \pi_2(Q_3 - V_3)$.

L'affirmation (★) permet de terminer la démonstration comme dans le cas de la suppression des points critiques d'indice 0.

Démonstration de (★). — On peut faire agir sur δ^2 le groupe $\pi_2(Q - U - \cup D'_j) \approx \pi_2(Q - V_0)$ sans en changer les propriétés. Il suffit alors de démontrer que les homomorphismes induit par l'inclusion

$$i_*: \pi_2(Q - V_0) \rightarrow \pi_2(Q_{03} - V_{03}) \quad \text{et} \quad j_*: \pi_2(Q_3 - V_3) \rightarrow \pi_2(Q_{03} - V_{03})$$

sont respectivement surjectif et bijectif. On montre facilement, compte tenu des hypothèses, que

$$\pi_1(Q - V_0) \approx \pi_1(Q_{03} - V_{03}) \approx \pi_1(Q_3 - V_3) \approx \pi_1(Q).$$

Soit $\pi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ le revêtement universel de Q ; les images réciproques de $Q_{03} - V_{03}$, $Q_3 - V_3$, $Q - V_0$ (resp. V_0 , V_{03} , V_3) s'identifient au revêtement universel (resp. à des unions disjointes de revêtements); on les note respectivement $\widetilde{Q_{03} - V_{03}}$, ... (resp. $\widetilde{V_0}$, ...). La suite exacte relative de Mayer-Vietoris du couple $(\widetilde{Q_{03} - V_{03}}, \widetilde{Q_3 - V_3})$, $(\widetilde{V_{03}}, \widetilde{V_3}) \times D^2$ montre que $(\widetilde{Q_{03} - V_{03}}, \widetilde{Q_3 - V_3})$ est $(n-1)$ -connexe, du fait que $(\widetilde{V_{0,3}}, \widetilde{V_3})$ est $(n-2)$ -connexe. Le théorème de Hurewicz montre que j_* est un isomorphisme pour $n-1 \geq 3$.

Pour démontrer la surjectivité de i_* , on peut remarquer que $(Q \times I - F(V \times I), Q_{03} - V_{03})$ est 3-connexe : en effet, on passe de $Q_{03} - V_{03}$ à $Q \times I - F(V \times I)$ en attachant des anses d'indice ≥ 4 .

La suite exacte d'homotopie du triple $(Q - f_0(V), Q_{03} - V_{03}, Q \times I - F(I \times V))$ montre que $\pi_2(Q_{03} - V_{03}, Q_0 - V_0) = 0$, ce qui prouve que i_* est surjectif.

(c) *Suppression des points critiques* p , $2 \leq p \leq n-3$. — Soient (c_1, \dots, c_l) (resp. c'_1, \dots, c'_l) les points critiques d'indice p (resp. $p+1$), qu'on suppose équipés d'un système disjoint de bimembranes $(D_i; M_i)$ (resp. D'_j, M'_j) allant de Q_0 à Q_{p+1} (resp. Q_{p+1}, Q_{p+2}). Soit c_1 le point critique d'indice p le plus haut. La nappe descendante S_1 de c_1 représente un élément $[S_1] \in H_p(\widetilde{V_{0,p+1}}, \widetilde{V_0})$. Puisque

$$\partial: H_{p+1}(\widetilde{V_{0,p+2}}, \widetilde{V_{0,p+1}}) \rightarrow H_p(\widetilde{V_{0,p+1}}, \widetilde{V_0})$$

est surjectif, $[S_1]$ s'écrit

$$[S_1] = \sum_{k=1}^{l'} x_k \partial [S'_k] (x_k \in Z[\pi_1(V)]),$$

où S'_k désigne les nappes descendantes de c'_k , et $[S'_k]$ leurs classes d'homologie.

On introduit, entre le niveau du point critique d'indice $p+1$ le plus haut et Q_{p+2} , une paire de points critiques complémentaires e_0, e_1 , d'indice respectif $p+1$ et $p+2$ (d'après le lemme 2.8). Du fait que ces deux points ont été introduits dans une boule aussi petite que l'on veut, il existe une membrane descendante D de e_0 jusqu'à Q_{p+1} dont la nappe associée est δ et dont la projection \bar{D} est disjointe des projections \bar{M} des membranes montantes des points d'indice p . On fait choix d'un chemin β dans V_{p+1} joignant \star à $\partial\delta$. En faisant la somme connexe au sens (B) (§ 2) de la membrane D avec les membranes D'_k des points critiques $c'_1, \dots, c'_{l'}$ (situés au-dessous de e_0) le long de chemins convenables, on peut obtenir une nouvelle membrane (resp. nappe) descendante D' (resp. δ') telle que la classe de $\partial\delta'$ dans $H_p(\widetilde{V_{p+1}})$ s'envoie par l'homomorphisme

$$i_* : H_p(\widetilde{V_{p+1}}) \rightarrow H_p(\widetilde{V_{0p+1}}, \widetilde{V_0})$$

sur $\sum_{k=0} x_k \partial [S'_k] = [S_1]$. D'après le chapitre 1, on peut supposer, quitte à introduire des points d'intersection des intérieurs de membranes, que $\partial\delta'$ ne rencontre pas les bords des nappes montantes ∂T_i ($i \geq 1$), et rencontre ∂T_1 en un point exactement avec nombre d'intersection $+1$.

* Autrement dit, les points critiques e_0 et c_1 sont en position de destruction mutuelle dans l'absolu. D'après le lemme 2.9, e_0 et c_1 sont en position de destruction mutuelle dans Q si, en plus, la projection \bar{D}' de la membrane D' sur Q_{p+1} est disjointe de l'intérieur de la projection \bar{M}_1 de la membrane montante de c_1 , ce qui n'est pas le cas *a priori*.

Notons $y_k \in Z \pi_1(Q_{p+1} - V_{p+1}) \simeq Z \pi_1(Q)$ le nombre d'intersection de l'intérieur de \bar{D}' avec l'intérieur de \bar{M}_k . On pose

$$\gamma = \sum_k y_k [\Delta_k^{p+1}] \in H_{p+1}(\tilde{A}, \tilde{X}),$$

où Δ_k^{p+1} désigne la coupole de c_k associée à la membrane D_k . D'après le paragraphe 3, l'homomorphisme bord $\delta : H_{p+2}(\tilde{B}, \tilde{Y}) \rightarrow H_{p+1}(\tilde{A}, \tilde{X})$ est surjectif; donc γ s'écrit aussi $\gamma = \sum_j z_j \delta [\Delta_j^{p+2}]$, où $z_j \in Z \pi_1(Q)$ et où Δ_j^{p+2} désigne la coupole de c'_j associée à D'_j . On fait la somme connexe

au sens (A) (définie au paragraphe 2) de la membrane D' avec les coupoles Δ_j^{p+2} des points critiques $c'_1, \dots, c'_{i'}$ (situés au-dessous de e_0) de façon à obtenir la somme connexe géométrique $D'' = D' \#^A (\#_{v_j} - \Delta_j^{p+2})$, où $-\Delta_j$ représente Δ_j avec l'orientation opposée, et où v_j est un chemin joignant \bar{D}' à $\bar{\Delta}_j^{p+2}$ tel que $\beta_j^{-1} \star v_j \star \beta = z_k$. Compte tenu de l'égalité

$$\gamma = \sum y_k [\Delta_k^{p+1}] = \sum_j z_j \delta [\Delta_j^{p+2}],$$

le nombre d'intersection de l'intérieur de la membrane D'' avec $\partial \bar{M}_i$, sphère transverse à l'anse définie par Δ_i^{p+1} , est nul. On peut alors, après isotopie de D'' laissant fixe le bord, supposer que \bar{D}'' (projection de D'') est disjointe des membranes montantes. Comme on n'a pas changé la nappe descendante de D' , les points critiques c_1 et e_0 sont en position de destruction mutuelle d'après le lemme 2.9. Pour les rendre consécutifs, il suffit de faire descendre le point critique e_0 le long de sa membrane D'' jusqu'à un niveau compris entre Q_{p+1} et le niveau du point critique d'indice $p+1$ le plus bas. On peut ainsi détruire un point critique d'indice p par adjonction d'un point critique d'indice $p+2$.

Chapitre 4 : Élément algébrique attaché à une pseudo-isotopie ordonnée

Dans toute la suite on suppose que $n \geq 5$, $q = n+2$, que le fibré normal à f_0 est muni d'une trivialisatıon (fixée dans toute la suite) et que $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme.

DÉFINITION 4.1. — On note $\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$ (resp. $\mathcal{O}^0([p, p'], V, Q, f_0)$) le sous-espace de $\mathcal{F}(V, Q; f_0)$ constitué des pseudo-isotopies de Morse ordonnées (resp. ordonnées dont les points critiques sont d'indice compris entre p et p').

1. Objet algébrique attaché à une pseudo-isotopie de $\mathcal{O}^0(V, Q; f_0)$

Soit $F \in \mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$. On choisit des niveaux intermédiaires Q_i entre les points critiques d'indice $i-1$ et i , et on pose $V_i = F(V \times I) \cap Q_i$. On note (c_k^i) ($k = 1 \dots p_i$) les points critiques d'indice i , et on les équipe d'un système disjoint de bimembranes (D_k^i, M_k^i) allant des niveaux Q_i à Q_{i+1} . Les projections des membranes sur un niveau sont notées $(\bar{})$. On note S_k^i (resp. T_k^i) la nappe descendante (resp. ascendante) associée à

la membrane D_k^i (resp. M_k^i). On peut supposer que ∂S_k^i et ∂T^{i-1} se coupent transversalement dans V_{i-1} ainsi que les projections \bar{D}_k^i et \bar{M}^{i-1} .

On se fixe un point de base \star dans $F(V \times I)$, et une famille de chemins (μ_k^i) joignant \star aux points critiques d'indice i , c_k^i ($k = 1 \dots p_i$) ne se coupant qu'en \star . On se donne un champ de vecteurs v_k^i défini le long du chemin μ_k^i , normal à $F(V \times I)$, et coïncidant en c_k^i avec le vecteur tangent à la membrane descendante D_k^i , et *rentrant* dans D_k^i . Cette donnée permet

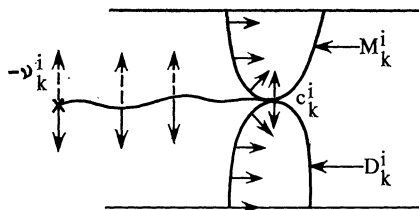


Fig. 4.1

d'associer à chaque projection de membrane descendante (resp. ascendante) \bar{D}_k^i (resp. \bar{M}_k^i) un chemin joignant \star à $\partial \bar{D}_k^i = \partial S_k^i$ (resp. $\partial \bar{M}_k^i = \partial T_k^i$) obtenu en composant μ_k^i avec un chemin sur S_k^i (resp. T_k^i) et un champ de vecteurs normal à $F(V \times I)$ défini le long de ce chemin obtenu en prolongeant le champ v_k^i (resp. $-v_k^i$) par le champ tangent rentrant dans D_k^i (resp. M_k^i).

DÉFINITION 4.2. — On note $\mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q, f_0)$ l'ensemble des couples (F, \mathcal{M}) , où $F \in \mathcal{O}^0(V, Q; f_0)$, et \mathcal{M} est un choix de bimembranes orientées pour chaque point critique, de chemins et de champs de vecteurs précédemment définis.

Soit $(F, \mathcal{M}) \in \mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q; f_0)$. On ordonne les points critiques de F d'indice i , en nombre p_i , par leur hauteur ($p(c_k) < p(c_{k+1})$), et on les met en bijection avec les bases canoniques de $Z[\pi_1(V)]$ -modules et $Z[\pi_1(Q)]$ -modules

$$E_i = (Z[\pi_1(V)])^{p_i} \quad \text{et} \quad C_i = (Z[\pi_1(Q)])^{p_i}.$$

D'après le chapitre 1, la donnée de \mathcal{M} permet d'associer à tout couple de points critiques d'indice consécutif (c_k^i, c_l^{i-1}) le couple d'intersection réduit

$$v_k^i = (\alpha_{ik}^i, \beta_{ik}^i) \in Z[\pi_1(V)] \times Z[\pi_1(Q)]$$

de \bar{D}_k^i et \bar{M}_l^{i-1} .

Remarque. — La définition du couple réduit n'a été faite au chapitre 1 que pour des sous-variétés de codimension ≥ 3 . En fait, la construction qu'on en donne ici est valable pour les couples de points critiques d'indices extrêmes $((0, 1), (1, 2))$. En effet, la donnée des chemins μ_k^i et des v_k^i ($i = 0, 1, 2$) permet d'associer à tout point $P \in \partial \overline{D}_k^{i+1} \cap \partial \overline{M}_l^i$ ($i = 0, 1$) un triple

$$(\varepsilon_p, n_p, a_p) \in \{+1\} \times Z \times Z[\pi_1(F(V \times I))]$$

et à tout point $R \in \overline{D}_k^{i+1} \cap \overline{M}_l^i$ un couple $(\varepsilon_R, g_R) \in \{\pm 1\} \times \pi_1(Q \times I)$. On peut alors définir un couple d'intersection comme au chapitre 1. L'opération de pivotement autour d'un point d'intersection de $\partial \overline{D}_k^{i+1} \cap \partial \overline{M}_l^i$, décrite au chapitre 1, a encore un sens, et son effet sur le couple d'intersection est le même que celui décrit au chapitre 1. On peut donc encore définir un couple d'intersection réduit appartenant à $Z[\pi_1(V)] \times Z[\pi_1(Q)]$ (ne représentent plus toutefois l'obstruction complète à disjoindre \overline{D}_k^{i+1} de \overline{M}_l^i).

DÉFINITION 4.3. — On note A_i (resp. B_i) la matrice à coefficients dans $Z[\pi_1(V)]$ (resp. $Z[\pi_1(Q)]$) dont l'élément à la l -ième ligne et k -ième colonne est α_{lk}^i (resp. β_{lk}^i).

Les modules E_i et C_j étant basés, A_i et B_i définissent des homomorphismes de $Z[\pi_1(V)]$ -modules et $Z[\pi_1(Q)]$ -modules notés encore A_i, B_i :

$$E_i \xrightarrow{A_i} E_{i-1} \quad \text{et} \quad C_i \xrightarrow{B_i} C_{i-1}.$$

Ainsi à tout élément $(F, \mathcal{M}) \in \mathcal{O}^{0, \mathcal{M}}(V, Q; f_0)$ on associe un couple de suites :

$$(1) \quad 0 \rightarrow E_{n+1} \rightarrow E_n \rightarrow E_i \xrightarrow{A_i} E_{i-1} \rightarrow E_0 \rightarrow 0,$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \dots C_i \xrightarrow{B_i} C_{i-1} \dots C_0 \rightarrow 0,$$

où le module au rang $i+1$ (en partant de la droite) est E_i (resp. C_i).

La suite (1) est bien connue : c'est le complexe de chaîne acyclique du cobordisme trivial $(V \times I, V \times 0)$ associé à la décomposition en anses donnée par la fonction de Morse $p \circ F : V \times I \rightarrow I$.

Remarque. — Posons $\mathcal{O}^0(p, V, Q; f_0) = \mathcal{O}^0([p, p+1], V, Q; f_0)$ alors le couple de suites associé à $F \in \mathcal{O}^0(p, V, Q; f_0)$ se réduit à

$$(1) \quad 0 \rightarrow 0 \rightarrow E_{p+1} \xrightarrow{A_{p+1}} E_p \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow 0 \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{B_{p+1}} C_p \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

où A_{p+1} est une $Z[\pi_1(V)]$ -matrice carrée, inversible, de torsion nulle, et B_{p+1} une $Z[\pi_1(Q)]$ -matrice de même ordre.

DÉFINITION 4.4. — On note \mathcal{C} l'ensemble des couples de suites

$$(1) \quad 0 \rightarrow E_{n+1} \dots E_i \xrightarrow{A_i} E_{i-1} \dots \rightarrow E \rightarrow 0,$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow C_{n+1} \dots C_i \xrightarrow{B_i} C_{i-1} \dots \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où

(a) La suite (1) est un complexe de chaîne acyclique de torsion nulle de $Z[\pi_1(V)]$ -modules libres de dimension finie.

(b) La suite (2) est une suite de $Z[\pi_1(Q)]$ -modules libres et $Z[\pi_1(Q)]$ -homomorphismes tels que $\dim E_i = \dim C_i$ pour tout i .

On note \mathcal{C}_p le sous-ensemble de \mathcal{C} constitué des couples de suites du type indiqué dans la remarque ci-dessus.

On a ainsi démontré le résultat suivant :

LEMME 4.5. — Il existe une application $\chi^{\mathcal{M}} : \mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q; f_0) \rightarrow \mathcal{C}$ envoyant $\mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(p, V, Q, f_0)$ dans \mathcal{C}_p .

Les antécédents de $F \in \mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q; f_0)$ par l'application d'oubli

$$\mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q; f_0) \rightarrow \mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q; f_0)$$

sont définis par les choix suivants :

1° Choix du point de base \star , des chemins μ_k^i sans $F(V \times I)$, des champs γ_k^i et des orientations.

2° Choix des classes d'isotopie de membranes.

2. Effet sur $\chi^{\mathcal{M}}$ des différents choix

2.1. EFFET DU CHOIX DES CHEMINS, DES CHAMPS, ET DES ORIENTATIONS. — Soient (μ_k^i, γ_k^i) et (μ_k^i, γ_k^i) deux choix de chemins et de champs pour le point critique d'indice i , c_k^i et deux orientations différentes de la mem-

brane D_k^i . Soit γ l'élément de $\pi_1(F(V \times I)) \simeq \pi_1(V)$ défini par le lacet $\mu_k^i \star \mu_k^{i'}$ et n l'entier associé au champ $v_k^i \star v_k^{i'}$ le long du lacet $\mu_k^i \star \mu_k^{i'}$. Compte tenu du chapitre 1, on voit que le couple réduit $(\alpha_{ik}^{i'}, \beta_{ik}^{i'})$ (resp. $(\alpha_{kl}^{i+1}, \beta_{kl}^{i+1})$) associé au choix (μ_k^i, v_k^i) se déduit de l'ancien par

$$\begin{aligned} \alpha_{ik}^{i'} &= -\alpha_{ik}^i \gamma, \quad \beta_{ik}^{i'} = -\beta_{ik}^i \cdot f_{0*}(\gamma) - n f_{0*}(\alpha_{ik}^i \gamma) \\ (\text{resp. } \alpha_{kl}^{i+1} &= -\gamma^{-1} \alpha_{kl}^{i+1}, \quad \beta_{kl}^{i+1} = -f_{0*}(\gamma^{-1}) \beta_{kl}^{i+1} - n f_{0*}(\gamma^{-1} \alpha_{kl}^{i+1})), \end{aligned}$$

f_{0*} étant l'homomorphisme induit par $f_0 : f_{0*} : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(Q)$.

Au niveau des matrices, cela revient à dire que (A_p, B_p) est inchangé pour $p \neq i, i+1$, et que le couple (A_i, B_i) (resp. A_{i+1}, B_{i+1}) est changé en

$$\begin{aligned} (A_i F_k^{-\gamma}, B_i F_k^{-f_{0*}(\gamma)} + n f_{0*}(A_i e_k^{-\gamma})) \\ (\text{resp. } F_k^{-\gamma^{-1}} A_{i+1}, F_k^{-f_{0*}(\gamma)} B_{i+1} + n f_{0*}(e_k^{-\gamma^{-1}} A_{i+1})), \end{aligned}$$

où F_k^a ($a \in \pm \pi_1(V)$) (resp. e_k^b) est la matrice diagonale avec a (resp. b) à la place (k, k) , et dont les autres éléments diagonaux valent 1 (resp. 0).

2.2. EFFET D'UN CHANGEMENT DE CLASSES D'ISOTOPIE DE MEMBRANES. —

Soient c_k^i un point critique d'indice i , et $D_k^i, D_k^{i'}$ deux membranes descendantes. D'après le chapitre 3 (§ 2), il suffit de regarder les deux cas suivants :

1° $D_k^{i'}$ est obtenu en faisant passer D_k^i par-dessus la coupole Δ_h^i d'un point critique c_h^i au-dessous de c_k^i ($h < k$ d'après la relation d'ordre mise sur les points critiques d'indice i). C'est la somme connexe au sens (A) du chapitre 3 (§ 2).

2° $D_k^{i'}$ est obtenu en faisant passer D_k^i par-dessus la membrane D_h^i de c_h^i ($h < k$).

Premier cas. — En projection \overline{D}_k^i est la somme connexe de D_k^i et Δ_h^i le long d'un chemin μ joignant l'intérieur de \overline{D}_k^i à un point de $\overline{\Delta}_h^i$. Les nappes étant inchangées les matrices A_i sont inchangées. Soit g l'élément de $\pi_1(Q)$ défini par μ et les chemins μ_k^i et μ_h^i .

Si $\beta_{ik}^{i'}$ (resp. $\beta_{ik}^{i'}$) désigne le second élément du couple réduit d'intersection de $\overline{D}_k^{i'}$ (resp. \overline{D}_k^i) avec \overline{M}_l^{i-1} , on a, d'après l'additivité des nombres d'intersection

$$\beta_{ik}^{i'} = \beta_{ik}^i + v(\overline{\Delta}_h^i, \overline{M}_l^{i-1}) g,$$

où $v(\overline{\Delta}_h^i, \overline{M}_l^{i-1})$ désigne le nombre d'intersection (dans $\pi_1(Q)$) du bord de la coupole Δ_h^i avec la projection de la membrane M_l^{i-1} . D'après le

lemme 3.3, ce nombre n'est autre $f_{0*}(\alpha_{ih}^i)$. Ceci revient à dire que la k -ième colonne de la matrice B_i est remplacée par sa somme avec la h -ième colonne de A_i ($h < k$) multipliée à droite par un élément de $\pi_1(Q)$.

Remarque. — Ce qui vient d'être dit est valable pour les intersections concernant les points critiques d'indice 1 et 2. En effet, la propriété d'additivité des nombres d'intersection reste vraie dans ce cas. D'autre part, le lemme 3.3 est valable pour $p = 1$ à condition de considérer les revêtements induits par le revêtement universel $F(\widetilde{V \times I}) \rightarrow F(V \times I)$.

On a donc démontré le lemme suivant :

LEMME 4.6. — *Un changement de membrane de type (A) pour un point critique d'indice i se traduit algébriquement par le changement du couple (A_i, B_i) (resp. (A_{i+1}, B_{i+1})) en $(A_i, B_i + f_{0*}(A_i) e_{hk}^g)$ (resp. $A_{i+1}, B_{i+1} + e_{hk}^{+g} f_{0*}(A_{i+1}))$ ($h < k$) où $e_{hk}^g = (\alpha_{ij})$ est la matrice définie par $\alpha_{ij} = 0$ pour $(i, j) \neq (h, k)$ et $\alpha_{hk} = g$.*

Deuxième cas. — En projection $\overline{D}_k^i = \overline{D}_k^i \#_{\lambda, \eta}^B \overline{D}_h^i$ est la somme connexe (le long des bords) de \overline{D}_k^i et \overline{D}_h^i définie par un chemin λ dans V_i joignant $\partial \overline{D}_k^i$ à $\partial \overline{D}_h^i$ et un champ de vecteurs η le long de λ normal à V_i coïncidant avec les vecteurs rentrant dans \overline{D}_k^i et \overline{D}_h^i aux extrémités (voir fig. 4.2).

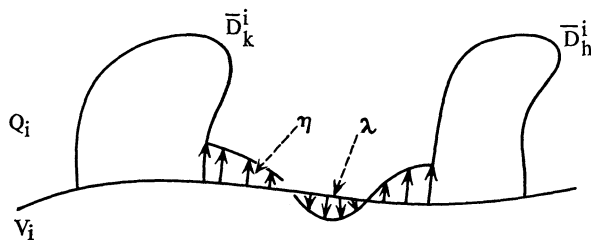


Fig. 4.2

Si $(\alpha_{ik}^i, \beta_{ik}^i)$ (resp. $\alpha_{ih}^i = \sum \varepsilon_p(0, a_p)$, $\beta_{ih}^i = \sum \varepsilon_R g_R$) désigne le couple d'intersection réduit de \overline{D}_k^i et \overline{M}_i^{i-1} (resp. \overline{D}_h^i et \overline{M}_i^{i-1}), le couple d'intersection de $\overline{D}_k^i = \overline{D}_k^i \#_{\lambda, \eta}^B \overline{D}_h^i$ avec \overline{M}_i^{i-1} est donné par $(\alpha_{ik}^i + \sum \varepsilon_p(-n, a_p \cdot a)$ et $\beta_{ik}^i + \beta_{ih}^i f_{0*}(a)$, où a est l'élément de $\pi_1(F(V \times I)) \approx \pi_1(V)$ représenté par le lacet $(\mu_h^i)^{-1} \star \lambda \star \mu_k^i$, et où n désigne l'entier associé au champ de vecteurs $v_h^i \cup \eta \cup v_k^i$ défini sur le lacet $(\mu_h^i)^{-1} \star \lambda \star \mu_k^i$. Le couple d'inter-

section réduit (chap. 1, cor. 1.5) de \overline{D}_k^i et \overline{M}_l^{i-1} est donc

$$(\alpha_{lk}'^i = \alpha_{lk}^i + \alpha_{lh}^i \cdot a, \beta_{lk}'^i = \beta_{lk}^i + \beta_{lh}^i f_{0*}(a) + n f_{0*}(\alpha_{lh} \cdot a)).$$

On a donc démontré un nouveau lemme.

LEMME 4.7. — *Remplacer la membrane du point critique d'indice i , c_k^i , par sa somme connexe au sens (B) avec celle du point critique c_h^i ($h < k$) se traduit algébriquement par le remplacement du couple (A_i, B_i) (resp. $(A_{i+1}, B_{i+1}))$ par*

$$(A_i E_{hk}^a, B_i E_{hk}^{f_{0*}(a)} + n f_{0*}(A_i e_{hk}^a)) \\ \text{resp. } E_{hk}^{-a} A_{i+1}, E_{hk}^{-a} B_{i+1} + n f_{0*}(e_{hk}^{+a} A_{i+1}),$$

où e_{hk}^a a été défini dans le lemme 4.6, et où $E_{hk}^a = I + e_{hk}^a$, I désignant la matrice identité.

On regroupe les résultats précédents dans le lemme suivant.

LEMME 4.8. — *Soient $F \in \mathcal{O}^0(V, Q; f_0)$, et $F^{\mathcal{M}}, F^{\mathcal{M}'}$ deux éléments de $\mathcal{O}^{0,\mathcal{M}}(V, Q; f_0)$ s'envoyant sur F par l'application d'oubli. Soient $((E), (C))$ (resp. $(E'), (C'))$ les couples de suites respectivement associés à $F^{\mathcal{M}}$ et $F^{\mathcal{M}'}$:*

$$\begin{aligned} (E) \quad & \cdots \rightarrow E_i \xrightarrow{A_i} E_{i-1} \cdots, \\ (C) \quad & \cdots \rightarrow C_i \xrightarrow{B_i} C_{i-1} \cdots, \\ (E') \quad & \cdots \rightarrow E_i \xrightarrow{A'_i} E_{i-1} \cdots, \\ (C') \quad & \cdots \rightarrow C_i \xrightarrow{B'_i} C_{i-1} \cdots. \end{aligned}$$

Alors on passe du couple $((E), (C))$ au couple $((E'), (C'))$ par une suite d'opérations élémentaires de l'un des trois types suivants :

OPÉRATION ÉLÉMENTAIRE 1. — (A_i, B_i) et (A_{i+1}, B_{i+1}) sont respectivement remplacés par

$$(A_i F_k^\gamma, B_i + n f_{0*}(A_i e_k^1) F_k^{f_{0*}(\gamma)})$$

et

$$(F_k^{\gamma^{-1}} A_{i+1}, F_k^{f_{0*}(\gamma^{-1})}(B_{i+1} + n f_{0*}(e_k^{-1} A_{i+1}))),$$

où $\gamma \in \pm \pi_1(V)$.

OPÉRATION ÉLÉMENTAIRE 2. — (A_i, B_i) et (A_{i+1}, B_{i+1}) sont respectivement remplacés par

$$(A_i, B_i + f_{0*}(A_i) e_{hk}^g) \quad \text{et} \quad (A_{i+1}, B_{i+1} + e_{hk}^{+g} f_{0*}(A_{i+1})),$$

où $g \in Z[\pi_1(Q)]$ et $h < k$.

OPÉRATION ÉLÉMENTAIRE 3. — (A_i, B_i) et (A_{i+1}, B_{i+1}) sont remplacés par

$$(A_i E_{hk}^a, B_i E_{hk}^{f_{0*}(a)} + n f_{0*}(A_i e_{hk}^a))$$

et

$$(E_{hk}^{-a} A_{i+1}, E_{hk}^{-f_{0*}(a)} B_{i+1} + n f_{0*}(e_{hk}^{+a} A_{i+1})),$$

avec $a \in Z[\pi_1(V)]$ et $n \in \mathbb{Z}$.

DÉFINITION 4.9. — Les opérations élémentaires (I), $l = 1, 2, 3$, définissent des relations d'équivalence élémentaires sur \mathcal{C} . On note \mathcal{R}_l^i la relation d'équivalence élémentaire définie par l'opération élémentaire (I) affectant les homomorphismes de rang $(i, i+1)$. On désigne par \mathcal{R} la relation d'équivalence sur \mathcal{C} engendrée par les relations \mathcal{R}_l^i , et par \mathcal{R}_p la restriction de cette relation à \mathcal{C}_p .

Chacune des opérations \mathcal{R}_l^i laissant \mathcal{C}_p stable, il en résulte que \mathcal{R}_p est aussi la relation engendrée par les restrictions de \mathcal{R}_l^i à \mathcal{C}_p . Le lemme précédent est équivalent au suivant :

LEMME 4.10. — Il existe une application $\chi : \mathcal{C}^0(V^n, Q^{n+2}; f_0) \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{R}$ telle que les diagrammes suivants commutent,

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} \mathcal{C}/\mathcal{R} \\
 \nearrow \chi^{\mathcal{M}} & \uparrow & \nearrow \chi \\
 \mathcal{C}^{0,\mathcal{M}}(V^n, Q^{n+2}; f_0) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}^{0,\mathcal{M}}(V^n, Q^{n+2}; f_0) \\
 \uparrow & \downarrow & \uparrow \\
 & \mathcal{C}_p & \xrightarrow{\quad} \mathcal{C}_p/\mathcal{R}_p \\
 \nearrow \chi^{\mathcal{M}} & \uparrow & \nearrow \\
 \mathcal{C}^{0,\mathcal{M}}(p; V^n, Q^{n+2}; f_0) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}^0(p, V^n, Q^{n+2}; f_0)
 \end{array}$$

Remarque. — L'application χ induit une application au niveau des composantes connexes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^0(V, Q; f_0) & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{C}/\mathcal{R} \\ \downarrow \pi_0 & \nearrow \chi & \\ \pi_0(\mathcal{O}^0(V, Q; f_0)) & & \end{array}$$

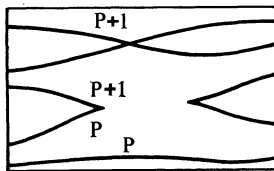
En effet, soit $\text{Diff}(Q \times I)$ le groupe des difféomorphismes de $Q \times I$ pour lesquelles il existe un difféomorphisme croissant $\mathcal{S} : I \rightarrow I$ tel que $p \circ H = \mathcal{S} \circ p$. Alors, pour deux éléments de $\mathcal{O}^0(V, Q; f_0)$ appartenant à la même composante connexe, il existe un $H \in \text{Diff}(Q \times I)$ tel que $H \circ F = F'$. Il en résulte que $\chi(F) = \chi(F')$ car il suffit de prendre un système de bimembranes pour F' qui soit l'image par H d'un système de bimembranes pour F .

DÉFINITION 4.11. — $\mathcal{O}(V, Q, f_0)$ (resp. $\mathcal{O}_p(V, Q, f_0)$) désigne le sous-espace des pseudo-isotopies n'ayant que des points critiques du type Morse (resp. d'indice p et $p+1$), ou naissance (resp. d'indice p), ordonnées, possédant éventuellement des points critiques de même indice au même niveau.

3. Effet sur χ des chemins de naissance et de croisement. L'application

$$\chi_* : \pi_0(\mathcal{O}(V, Q; f_0)) \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{S}.$$

Soient F et F' deux pseudo-isotopies de $\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$ jointes par un chemin F_t dans $\mathcal{O}(V, Q; f_0)$. Génériquement, un tel chemin ne présente que des accidents isolés du type croisement, naissance ou mort. Le graphique Γ d'un chemin étant le sous-ensemble de $I \times I$ défini par $(t, u) \in \Gamma \Leftrightarrow u$ est valeur critique de F_t , le graphique d'un chemin générique a l'allure suivante :

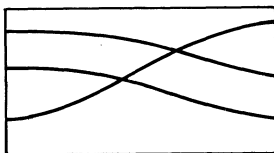


Un tel chemin est le composé d'un nombre fini de chemins de naissance, de croisements et de morts.

(a) *Effet de la traversée d'une strate de croisement.*

LEMME 4.12. — Soient $F \in \mathcal{O}^0(V, Q^{n+2}; f_0)$, et γ un chemin dans $\mathcal{O}(V, Q^{n+2}; f_0)$ d'origine F consistant à faire monter un point critique d'indice i , c_k^i , au-dessus d'un autre point critique de même indice c_l^i ($k < l$). Soit F' l'extrémité de ce chemin. Alors il existe un système de bimembranes orientées pour F et F' tel que le couple de suites associé à F' est obtenu de celui de F en permutant les éléments d'ordre k et l des bases de E_i et C_i .

Démonstration. — Le graphe de γ est du type :



D'après le lemme 2.6, le chemin de croisement γ joignant F à F' est homotope (parmi les chemins de croisement) avec origine fixée et extrémité restant dans $\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$, à un chemin γ' obtenu en faisant « monter » le point c_k^i le long d'une membrane ascendante M_k^i . Soit F'' l'extrémité de γ' .

On choisit un système disjoint de bimembranes pour F , (D_j^i, M_j^i) contenant la membrane M_k^i définie plus haut. F'' est muni d'un système de bimembranes défini par celui de F : les couples d'intersection pour F et F'' sont donc les mêmes. La définition du couple associé faisant intervenir l'ordre des points critiques donné par la fonction cote, il s'ensuit que le couple associé à F'' défini par le système de bimembranes considéré plus haut se déduit de celui de F par permutation des indices k et l . Le lemme découle de la remarque du lemme 4.10, du fait que F et F'' sont joints par un chemin dans $\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$.

(b) *Effet de la traversée d'une strate de naissance d'indice $(i, i+1)$ ($2 \leq i \leq n-2$).*

LEMME 4.13. — Soit γ un chemin de naissance d'indice $(i, i+1)$ ($0 \leq i \leq n$), d'origine F , d'extrémité F' , appartenant à $\mathcal{O}^0(V, Q^{n+2}; f_0)$. Alors il existe un système de bimembranes pour F et F' tel que si

$$(-E_j \xrightarrow{A_j} E_{j-1} -), \quad (C_j \xrightarrow{B_j} C_{j-1})$$

désigne le couple de suites associé à F , celui associé à F' est donné par

$$\begin{aligned} E_j &\xrightarrow{A_j} E_{i+2} \xrightarrow{A_{i+2} \oplus (0)} E_{i+1} \oplus \Lambda' \xrightarrow{A_{i+1} \oplus \text{id}_{\Lambda'}} E_i \oplus \Lambda' \xrightarrow{A_i \oplus (0)} E_{i-1}, \\ C_j &\xrightarrow{B_j} C_{i+2} \xrightarrow{B_{i+2} \oplus (0)} C_{i+1} \oplus \Lambda \xrightarrow{B_{i+1} \oplus 0} C_i \oplus \Lambda \xrightarrow{B_i \oplus (0)} C_{i-1}, \end{aligned}$$

où $\Lambda = Z[\pi_1(Q)]$ et $\Lambda' = Z[\pi_1(V)]$.

Démonstration. — D'après le lemme des chemins élémentaires de CERF [1], tout chemin de traversée γ de la strate de naissance \mathcal{F}_α^i est homotope (parmi les chemins de traversée) avec origine fixée et extrémité restant dans $\mathcal{O}^0(V, Q; f_0)$ à un chemin élémentaire de naissance γ' (défini dans le lemme 2.8). Soient F'' l'extrémité de γ' , et c_0^i, c_0^{i+1} les deux points critiques de F'' , nouvellement introduits, d'indice respectif $i, i+1$. Le chemin γ' étant élémentaire, on peut trouver une bimembrane (D_0^i, M_0^i) (resp. D_0^{i+1}, M_0^{i+1}) pour c_0^i (resp. c_0^{i+1}) disjointes des bimembranes de tous les autres points critiques telle que $\overline{M_0^i} \cap \overline{D_0^{i+1}} = \emptyset$ ($\overline{(\quad)}$ désigne l'intérieur des projections) et telles que ∂M_0^i et ∂D_0^{i+1} (bord des nappes correspondant aux membranes) se coupent transversalement en un seul point avec nombre d'intersection égal à $+1 \in Z[\pi_1(V)]$. Pour les autres points critiques de F'' (qui sont en fait ceux de F), on garde le même système de bimembranes. Alors le couple de suites associé à F'' muni de ce système de bimembranes se déduit de celui de F comme il est dit dans le lemme. La remarque suivant le lemme 4.10 permet de conclure.

On a donc défini sur l'ensemble \mathcal{C} des couples de suites (définition 4.4) deux nouvelles relations s'ajoutant aux trois définies dans le lemme 4.8.

DÉFINITION 4.14.

1° On note \mathcal{R}_4^i la relation d'équivalence élémentaire sur \mathcal{C} qui consiste à permuter deux éléments de la base de E_i et C_i .

2° On note \mathcal{R}_5^i la relation sur \mathcal{C} qui identifie le couple

$$(1) \quad \cdots \rightarrow E_j \xrightarrow{A_j} E_{j-1} \rightarrow,$$

$$(2) \quad \cdots \rightarrow C_j \xrightarrow{B_j} C_{j-1} \rightarrow,$$

avec le couple

$$(1) \quad \cdots E_{i+2} \xrightarrow{A_{i+2} \oplus 0} E_{i+1} \oplus \Lambda' \xrightarrow{A_{i+1} \oplus \text{id}_{\Lambda'}} E_i \oplus \Lambda' \xrightarrow{A_i \oplus 0} E_{i-1} \dots,$$

$$(2) \quad \cdots C_{i+2} \xrightarrow{B_{i+2} \oplus 0} C_{i+1} \oplus \Lambda \xrightarrow{B_{i+1} \oplus 0} C_i \oplus \Lambda \xrightarrow{B_i \oplus 0} C_{i-1} \dots,$$

où $\Lambda' = Z[\pi_1(V)]$ et $\Lambda = Z[\pi_1(Q)]$.

DÉFINITION 4.15.

1° On note \mathcal{S} la relation d'équivalence sur \mathcal{C} engendrée par les relations élémentaires $\{\mathcal{R}_k^i; k = 1, \dots, 5; i = 1, \dots, n\}$.

2° On note \mathcal{S}_p la relation d'équivalence sur \mathcal{C}_p engendrée par les restrictions à \mathcal{C}_p des relations $\{\mathcal{R}_k^i; k = 1, \dots, 5; i = 1, \dots, n\}$.

Remarque. — La relation \mathcal{S}_p est plus fine que celle qui consiste à dire que deux éléments de \mathcal{C}_p sont équivalentes s'ils sont équivalents dans \mathcal{C} . Cela tient au fait que \mathcal{C}_p n'est pas stable pour la relation \mathcal{R}_5 , c'est-à-dire que \mathcal{C}_p n'est pas une réunion de classes d'équivalence de \mathcal{R}_5 .

Des paragraphes précédents, on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 4.16. — L'application χ , donnée dans le lemme 4.10, induit des applications bien définies χ_* et χ_{*p} rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{O}(V, Q^{n+2}; f_0)) & \xrightarrow{\chi_*} & \mathcal{C}/\mathcal{S} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q^{n+2}; f_0)) & \xrightarrow{\chi_{*0}} & \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \end{array}$$

DÉFINITION 4.17. — On note \mathcal{C}^0 la partie de \mathcal{C} formée des couples

$$(\dots E_i \xrightarrow{A_i} E_{i-1} \dots), \quad (\dots C_i \xrightarrow{B_i} C_{i-1} \dots)$$

vérifiant pour tout i la relation :

$$(I) \quad B_i f_{0*}(A_{i+1}) - f_{0*}(A_i) B_{i+1} = 0.$$

LEMME 4.18 :

(a) \mathcal{C}^0 est une réunion de classes d'équivalence de $\mathcal{C} \pmod{\mathcal{S}}$.

(b) L'image de l'application canonique $\mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{S}$ est contenue dans $\mathcal{C}^0/\mathcal{S}$.

Démonstration

(a) Elle est immédiate. Il suffit de remarquer que si un élément de \mathcal{C} satisfait la relation (I) de la définition 4.17, tout élément de \mathcal{C} qui lui est équivalent par l'une des relations $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_5$ la vérifie aussi.

(b) La démonstration est évidente, compte tenu de la définition de \mathcal{C}_p .

LEMME 4.19. — *Tout élément de l'image de χ_* admet un représentant du type*

$$(1) \quad (0 \dots 0 \rightarrow E_{p+1} \xrightarrow{A_{p+1}} E_p \rightarrow 0)$$

$$(2) \quad (0 \dots 0 \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{B_{p+1}} C_p \rightarrow 0)$$

où A_{p+1} est une matrice de $\text{GL}(Z[\pi_1(V)])$ de torsion nulle ($2 \leq p \leq n-2$).

Démonstration. — Elle résulte du chapitre 3 (§ 4), où on montre que toute pseudo-isotopie est isotope à une pseudo-isotopie n'ayant que des points critiques d'indice p et $p+1$. Les opérations géométriques que l'on fait pour arriver à ce résultat correspondent aux opérations algébriques $\mathcal{R}_1 \dots \mathcal{R}_5$ précédemment définies (même dans le cas de la suppression des points critiques d'indice 1).

COROLLAIRE 4.20 :

(a) *L'image de χ_* est contenue dans $\mathcal{C}^0/\mathcal{S}$.*

(b) *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{O}(V^n, Q^{n+2}; f_0)) & \xrightarrow{\chi_*} & \mathcal{C}^0/\mathcal{S} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(\mathcal{O}_p(V^n, Q^{n+2}; f_0)) & \xrightarrow{\chi_{0*}} & \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \end{array}$$

Démonstration. — La démonstration du (a) résulte immédiatement du lemme 4.19 et de la démonstration du (a) du lemme 4.18. La démonstration du (b) résulte immédiatement du (b) du lemme 4.18.

4. Le groupe $Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$

DÉFINITION 4.21. — *Notons $[ag-ga; Z]$ le sous-groupe additif de $Z[\pi_1(Q)]$ engendré par les éléments du type $ag-ga$, où $a \in f_{0*} Z[\pi_1(V)]$, $g \in Z[\pi_1(Q)]$, et par $Z = Z[0] \subset Z[\pi_1(Q)]$.*

PROPOSITION 4.22. — *Il existe une application bien définie*

$$K: \mathcal{C}^0/\mathcal{S} \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z].$$

La composition $K \circ i: \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$ est définie comme suit : si $\alpha \in \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p$ est représenté par un couple :

$$(1) \quad (0 \dots 0 \rightarrow E_{p+1} \xrightarrow{A_{p+1}} E_p \rightarrow 0),$$

$$(2) \quad (0 \dots 0 \rightarrow C_{p+1} \xrightarrow{B_{p+1}} C_p \rightarrow 0),$$

alors $K(\alpha)$ est la classe dans $Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$ de la trace de $B_{p+1}(A_{p+1})^{-1}$ (ou de $(A_{p+1})^{-1}B_{p+1}$) au signe près.

La démonstration de cette proposition utilise à plusieurs reprises le lemme suivant, dont la démonstration est évidente.

LEMME 4.23. — Soient Λ un anneau, Λ' un sous-anneau, A une matrice à m colonnes et n lignes à coefficients dans Λ' , et B une matrice à n colonnes et m lignes à coefficients dans Λ . Alors la trace de $AB-BA$ appartient au sous-groupe du groupe additif Λ , engendré par les éléments du type $ag-ga$, où $a \in \Lambda'$ et $g \in \Lambda$.

Démonstration de la proposition 4.22. — Soit $\alpha \in \mathcal{C}^0$ représenté par un couple

$$(1) \quad (0 \dots E_{i+1} \xrightarrow{A_{i+1}} E_i \xrightarrow{A_i} E_{i-1} \dots 0),$$

$$(2) \quad (0 \dots C_{i+1} \xrightarrow{B_{i+1}} C_i \xrightarrow{B_i} C_{i-1} \dots 0).$$

La suite (1) étant un complexe de chaîne acyclique, il existe une homotopie de chaîne entre l'application identique de ce complexe et l'application nulle, c'est-à-dire une application de degré un $\eta_i : E_i \rightarrow E_{i+1}$ telle que $\eta_{i-1} A_i + A_{i+1} \eta_i = \text{Id}_{E_i}$.

On pose $K(\alpha) = \sum_i \text{tr}(f_{0*}(\eta_i) \circ B_{i+1})$, où tr désigne la trace de la matrice carrée $f_{0*}(\eta_i) \circ B_{i+1}$.

AFFIRMATION (*). — $K(\alpha)$ ne dépend pas de l'homotopie (η_i) choisie ni du représentant de α .

(a) $K(\alpha)$ ne dépend pas du choix de l'homotopie. — Soit $\{\eta'_i\}$ une autre homotopie du complexe acyclique (1). On montre facilement qu'il existe une application de degré 2 $\{\Delta_i : E_i \rightarrow E_{i+2}\}$ telle que, pour tout i , on ait

$$A_{i+2} \circ \Delta_i + \Delta_{i-1} \circ A_i = (-1)^i (\eta'_i - \eta_i).$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sum_i \text{tr}(f_{0*}(\eta'_i) B_{i+1}) - \sum_i \text{tr}(f_{0*}(\eta_i) B_{i+1}) \\ &= \sum_i \text{tr}(f_{0*}(A_{i+2} \circ \Delta_i + \Delta_{i-1} \circ A_i) B_{i+1}) (-1)^i \\ &= \sum [\text{tr}(f_{0*} A_{i+1} (\Delta_{i-1} \times B_i) - \text{tr}(f_{0*} (\Delta_{i-1} A_i) B_{i+1}))] (-1)^i. \end{aligned}$$

Du lemme 4.23, on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum \text{tr}(f_{0*}(\eta'_i) B_{i+1}) - \sum \text{tr}(f_{0*}(\eta_i) B_{i+1}) \\ &= \sum \text{tr} f_{0*}(\Delta_{i+1}) [B_i f_{0*} A_{i+1} - f_{0*}(A_i) B_{i+1}] \text{ mod } [ag-ga]. \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de \mathcal{C}^0 , on a donc

$$\sum \operatorname{tr}(f_{0*}(\eta'_i) B_{i+1}) = \sum \operatorname{tr}(f_{0*}(\eta_i) B_{i+1}) \bmod [ag - ga].$$

(b) $K(\alpha)$ ne dépend pas de la représentation choisie. — Il suffit de démontrer que la classe de

$$\sum \operatorname{tr}(f_{0*}(\eta_i) B_{i+1}) \quad \text{dans} \quad Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$$

n'est pas changée par les opérations élémentaires 1, ..., 5, décrites plus haut.

Effet de l'opération 1. — Soit α' l'élément de \mathcal{C}^0 obtenu de α par l'opération 1 du lemme 4.8. Si $\{\eta_i\}$ est une homotopie du complexe acyclique de α , alors la famille $\eta'_j = \eta_j$, pour $j \neq i, i+1$, et $\eta'_i = \eta_i F_k^\gamma$, $\eta'_{i-1} = F_k^{\gamma-1} \eta'_{i-1}$ en est une pour α' . Du lemme 4.8 et de la définition de $K(\alpha)$, on déduit :

$$\begin{aligned} (1) \quad K(\alpha') - K(\alpha) &= \operatorname{tr}[f_{0*}(\eta_i F_k^\gamma) F_k^{f_{0*}\gamma-1} (B_{i+1} + n f_{0*} e_k^{+1} A_{i+1})] \\ &\quad + \operatorname{tr}[f_{0*}(F_k^{\gamma-1} \eta_{i-1}) (B_i + n f_{0*} A_i e_k^1) F_k^{f_{0*}(\gamma)}] \\ &\quad - \operatorname{tr}(f_{0*} \eta_i B_{i+1}) - (-1)^{i-1} \operatorname{tr}(f_{0*} \eta_{i-1} B_i). \end{aligned}$$

Le second membre de (1) est égal (mod $[ag - ga]$), d'après le lemme 4.23, à

$$(2) = n \operatorname{tr} f_{0*}(\eta_i e_k^{+1} A_{i+1} - \eta_{i-1} A_i e_k^1).$$

De l'égalité $\eta_{i-1} A_i + A_{i+1} \eta_i = I_{E_i}$, on déduit que

$$(2) = n f_{0*} \operatorname{tr}(\eta_i e_k^{-1} A_{i+1} - A_{i+1} \eta_i e_k^1 + e_k^1).$$

Comme $e_k^{-1} = -e_k^1$ et compte tenu du lemme 4.23, il reste

$$(2) = n f_{0*} \operatorname{tr}(e_k^1) = 0 \bmod [ag - ga; Z].$$

Effet des opérations 2 et 3. — Les démonstrations sont de même nature que celle qui précède.

Effet de l'opération 4. — Elle correspond à un changement de bases simultané pour les modules E_i et C_i . Les matrices $f_{0*}(\eta_j) B_j$ sont donc inchangées, donc $K(\alpha)$ l'est aussi.

Effet de l'opération 5. — La vérification que $K(\alpha)$ est inchangée est immédiate.

Chapitre 5 : L'obstruction à l'isotopie

1. La bijection $K_p : \mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$

LEMME 5.1. — Tout élément de $\mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p$ admet un représentant du type $((1), (g))$, couple de matrice à une ligne et une colonne, où $1 \in Z[\pi_1(V)]$ désigne en fait 1.e ($1 \in Z$, e élément neutre de $\pi_1(V)$), et où g est un élément de $Z[\pi_1(Q)]$.

Démonstration. — Elle se fait en trois étapes. Dans la première, on ramène le couple (A, B) représentant un élément α de $\mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p$ à un couple de la forme (I, B') (I matrice identité). Dans la seconde étape, on ramène le couple (I, B') à un couple du type (I, B'') , où (B'') est une matrice diagonale. La dernière étape ramène le couple (I, B'') à un couple de matrices du type $((1), (g))$.

Première étape. — Soit (A, B) un couple de matrices représentant un élément α de $\mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p$. La matrice A étant de torsion nulle, elle se décompose, quitte à stabiliser ce qui ne change pas la classe de (A, B) dans $\mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p$, en un produit $A = A_1 \dots A_m$, où A_i est une matrice du type $E_{ij}^a = I + e_{ij}^a$ ou du type F_k^u ($u \in \pm \pi_1(V)$). Si A_m est du type F_k^u , d'après la relation élémentaire 1 du lemme 4.8, (A, B) est équivalent au couple $(A_1 \dots A_{m-1}, BA_m^{-1})$. Si A_m est du type $(I + e_{ij}^a)$ avec $i < j$, d'après la relation élémentaire 3 du lemme 4.8, on a le même résultat. Supposons enfin que $A_m = (I + e_{ij}^a)$ avec $i > j$. D'après la relation élémentaire 4 (définie dans le lemme 4.12) (A, B) est équivalent au couple

$$(A_1 \dots A_{m-1} S_{ij} (S_{ij}^{-1} A_m S_{ij}), \text{ ou } S_{ij} \text{ est la matrice de permutation.})$$

Il est clair que

$$S_{ij}^{-1} A_m S_{ij} = S_{ij}^{-1} (I + e_{ij}^a) S_{ij} = (I + e_{ji}^a).$$

D'après la relation élémentaire 3, le couple

$$(A_1 \dots A_{m-1} S_{ij} (S_{ij}^{-1} A_m S_{ij}), BS_{ij})$$

est équivalent (puisque $j < i$) au couple : $(A_1 \dots A_{m-1}, BS_{ij} (I + e_{ij}^a))$. D'après la relation 4, ce dernier couple est équivalent à

$$(A_1 \dots A_{m-1}, BS_{ij} (I + e_{ij}^a) S_{ij}^{-1}).$$

Par récurrence, on arrive ainsi à un couple du type (I, B') .

Deuxième étape. — Soit b'_{ij} l'élément de B' à la i -ième ligne et à la j -ième colonne. Pour $i < j$, d'après la relation 2, (I, B') est équivalent à $(I, B + e_{ij}^{-b'} ij)$. On voit ainsi que (I, B') est équivalent à (I, B'_1) , où B'_1 est une matrice triangulaire inférieure. Par permutations des lignes et des colonnes (correspondant à un nombre fini de relations élémentaires du quatrième type), (I, B'_1) est équivalent à un couple (I, B'_2) , où B'_2 est triangulaire supérieure. La relation élémentaire 3 permet de tuer tous les éléments de B'_2 au-dessus de la diagonale et donc de se ramener à un couple (I, B'') où B'' est diagonale.

Troisième étape. — Il suffit de montrer que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right] \sim ((1), (g))$$

On a la suite d'équivalences suivante où \sim_i signifie l'équivalence par la relation i :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right] \sim_2 \left[I, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -\lambda & \mu \end{pmatrix} \right] \sim_{3,4} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & \mu \end{pmatrix} \right] \\ & \sim_3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\lambda & \mu + \lambda \end{pmatrix} \right] \sim_{2,4} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu + \lambda \end{pmatrix} \right] \sim_5 ((1), (\mu + \lambda)). \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.2. — On note $\mathcal{O}^0(k; p; V, Q; f_0)$ le sous-espace des pseudo-isotopies de Morse ordonnées n'ayant que des points critiques d'indice p et $p+1$ en nombre au plus égal à k .

COROLLAIRE 5.3. — Avec les hypothèses du début du chapitre, l'application induite par l'inclusion $\pi_0(\mathcal{O}^0(1; p; V, Q; f_0)) \rightarrow \pi_0 \mathcal{O}_p(V, Q; f_0)$ est surjective.

Démonstration. — Elle résulte immédiatement de la démonstration précédente, chacune des opérations algébriques faites dans celle-ci correspondant à une opération géométrique qui ne change pas la classe d'isotopie dans $\mathcal{O}_p(V, Q; f_0)$.

PROPOSITION 5.4. — L'application composée

$$K_p: \mathcal{O}_p/\mathcal{S}_p \xrightarrow{i} \mathcal{O}^0/\mathcal{S} \xrightarrow{K} Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$$

est une bijection.

Démonstration. — La surjectivité est évidente. Pour la démonstration de l'injectivité, on procède de la façon suivante : soient (A, B) , (A', B') représentant deux éléments $\overline{(A, B)}$ et $\overline{(A', B')}$ de $\mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p$ ayant même image par l'application K_p . D'après le lemme 5.1, (A, B) et (A', B') sont équivalents respectivement à $((1), (g))$ et $((1), (g'))$. Par hypothèse, on a $g - g' = \sum ar - ra + n$, où $a \in f_{0*}Z[\pi_1(V)]$, $r \in Z[\pi_1(Q)]$ et $n \in Z$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que

$$((1), (g)) \sim ((1), (g - ar + ra + n)) \bmod \mathcal{S}_p.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & ((1), (g - ar + ra + n)) \\ & \sim_1 ((1), (g - ar + ra)) \sim_5 \left[I, \begin{pmatrix} g - ar + ra & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \sim_2 \left[I, \begin{pmatrix} g + ar + ra & ar \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \sim_3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g + ra & ar \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \sim_3 \left[I, \begin{pmatrix} g + ra & ar \\ -(g + ra) & -ar \end{pmatrix} \right] \sim_2 \left[I, \begin{pmatrix} g + ra & 0 \\ 0 & -ar \end{pmatrix} \right] \\ & \sim_2 \left[I, \begin{pmatrix} g + ra & -r \\ 0 & -ar \end{pmatrix} \right] \\ & \sim_3 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & -r \\ -ara & -ar \end{pmatrix} \right] \sim_3 \left[I, \begin{pmatrix} g & -r \\ -ag - ara & 0 \end{pmatrix} \right] \\ & \sim_2 \left[I, \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \sim_5 ((1), (g)). \end{aligned}$$

2. Propriétés de l'application

$$\theta_p : \pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q; f_0)) \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z].$$

PROPOSITION 5.5. — Soient θ_p l'application composée

$$\pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q; f_0)) \xrightarrow{\lambda_p} \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0/\mathcal{S} \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z],$$

et α un élément de $\pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q; f_0))$. Alors $\theta_p(\alpha) = 0$ si, et seulement si, α contient une pseudo-isotopie sans point critique.

Démonstration. — D'après le corollaire 5.3, α est représenté par une pseudo-isotopie F n'ayant que deux points critiques c_0 , c_1 respectivement

d'indice p et $p+1$. On choisit un niveau intermédiaire entre c_0 et c_1 , une membrane ascendante M_0 de c_0 et une membrane descendante D_1 de c_1 . On fait des choix pour ces membranes comme il est dit au début du chapitre 4, et on modifie les membranes par isotopie de sorte que le couple d'intersection réduit de \overline{D}_1 et \overline{M}_0 soit du type

$$(1, g) \in Z[\pi_1(V)] \times Z[\pi_1(Q)]$$

(on peut le faire du fait que les deux points critiques c_0, c_1 se détruisent dans l'absolu). Par hypothèse, on a

$$\theta_p(F) = K_p((1, (g)) = 0 \in Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z],$$

c'est-à-dire que g est de la forme

$$\sum ar - ra + n.e, \quad \text{où } a \in Z[\pi_1(V)], \quad r \in Z[\pi_1(Q)] \quad \text{et } n \in Z.$$

On peut supposer que $\partial\overline{D}_1$ et $\partial\overline{M}_0$ se coupent transversalement en un seul point P . On fait alors « pivoter » \overline{D}_1 autour de P de façon que le couple d'intersection devienne $((-n, 1), \sum ar - ra)$ (voir chap. 1, § 2). Puis, par un changement dans le choix des champs de vecteurs le couple d'intersection devient $((0, 1), \sum ar - ra)$.

D'après la démonstration de la proposition 5.4, on peut passer du couple $((1, (\sum ar - ra))$ au couple $((1, (0))$ par une suite d'opérations élémentaires 1, ..., 5, chacune de ces opérations algébriques correspondant à une opération géométrique qui ne change pas la classe d'isotopie de F dans $\mathcal{O}_p(V, Q^{n+2}, f_0)$. Il en résulte donc que F est isotope dans $\mathcal{O}_p(V, Q^{n+2}; f_0)$ à une pseudo-isotopie G n'ayant que deux points critiques d_0, d_1 , l'un d'indice p , l'autre d'indice $p+1$, muni d'une membrane ascendante M_0 pour d_0 et d'une membrane descendante D_1 pour d_1 dont le couple d'intersection est $(1, 0)$. Après une isotopie de ces membranes, on peut supposer que $\partial\overline{D}_1$ et $\partial\overline{M}_0$ se coupent en un point exactement et transversalement, et que l'intérieur de \overline{D}_1 et de \overline{A}_0 sont disjoints. D'après le lemme 2.9, les deux points critiques d_0 et d_1 sont en position de destruction mutuelle. Il en résulte que G est isotope dans $\mathcal{F}_p^0(V, Q^{n+2}; f_0)$ à une pseudo-isotopie sans point critique.

LEMME 5.6. — *L'application composée*

$$\begin{aligned} \theta_p &= i \circ K_p \circ \chi_p : \pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q^{n+2}; f_0)) \\ &\rightarrow \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{C}^0/\mathcal{S} \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z] \end{aligned}$$

est surjective sous les hypothèses : $n \geq 5$ et $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de montrer que la composition

$$\pi_0(\mathcal{O}^0(1, p; V, Q^{n+2}; f_0) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q^{n+2}; f_0)) \xrightarrow{i \circ k_p \circ \chi_p} Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z$$

est surjective. Soit $g \in \pi_1(Q)$. Considérons un petit disque plongé $(D_+^{p+1}, D^p) \rightarrow (Q, f_0(V))$ ne rencontrant $f_0(V)$ que transversalement le long de D^p . D'après le lemme 2.10, $\partial_+ D^{p+1} = \partial D_+^{p+1} - \dot{D}^p$ et D^{p+1} définissent les projections des membranes de deux points critiques

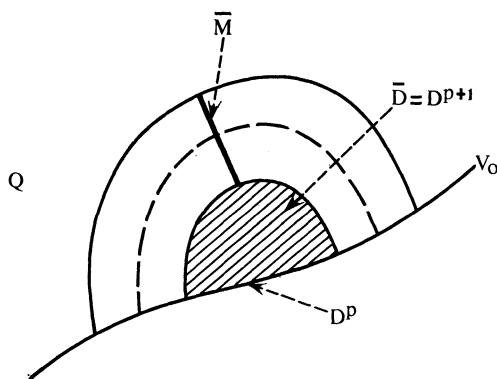


Fig. 5.1

complémentaires d'indice p et $p+1$ d'une pseudo-isotopie F . Soit (Q_p, V_p) un niveau intermédiaire entre ces deux points critiques. Notons \bar{M} (resp. \bar{D}) la membrane ascendante (resp. descendante) du point critique d'indice p (resp. $p+1$), dont la projection \bar{M} (resp. \bar{D}) sur Q_p correspond à l'anse duale de l'anse plongée définie par $\partial_+ D_+^{p+1}$ (resp. est D_+^{p+1}) (voir fig. 5.1).

Soit $\partial \Delta^{p+1}$ le bord de la coupole correspondant au point d'indice $p+1$, qui coupe \bar{M} en un seul point P' . On prend un point de base \star de V_p , α (resp. β) un chemin dans V_p joignant \star à $\partial \bar{M}$ (resp. $\partial \bar{D}$) et un champ de vecteurs sur α (resp. β) normal à V_p induisant à une extrémité le vecteur tangent à \bar{M} (resp. \bar{D}) rentrant. En choisissant convenablement les chemins et les champs, on peut supposer que le couple d'intersection réduit est $(1, 0)$. Soit δ un chemin dans Q , joignant \star à $\partial \Delta$, tel que le

nombre d'intersection de $\partial\Delta$ et \overline{M} en P' (l'unique point de $\partial\Delta \cap \overline{M}$)
soit égal à $\pm g$, où g est l'élément donné de $\pi_1(Q)$.

Soit \bar{D}' le $p+1$ disque obtenu en faisant la somme connexe de l'intérieur de \bar{D} , avec $\partial\Delta$ le long du chemin $\beta^{-1} \star \delta$. D'après le lemme 2.10, \bar{M} et \bar{D}' définissent les membranes d'une pseudo-isotopie dont l'invariant est la classe du couple $((1), (g))$. En faisant des sommes connexes d'exemplaires de $\partial\Delta^{p+1}$, on peut atteindre tout élément de $Z[\pi_1(Q)]$.

COROLLAIRE 5.7 :

(a) L'application canonique $i: \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{C}^0/\mathcal{S}$ envoie surjectivement $\mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p$ sur l'image de $\chi_*: \pi_0(\mathcal{O}(V, Q^{n+2}; f_0)) \rightarrow \mathcal{C}^0/\mathcal{S}$ définie dans la proposition 4.16.

(b) Dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q; f_0)) & \xrightarrow{\chi_{p*}} & \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \pi_0(\mathcal{O}(V, Q; f_0)) & \xrightarrow{\chi_*} & \text{Im } \chi \subset \mathcal{C}^0/\mathcal{S} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow K_p \\ \nearrow K \end{array} \quad \begin{array}{c} Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z] \\ \\ \end{array}$$

les trois applications $i : \mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p \rightarrow \text{Im } \chi$, K_p et $K \mid \text{Im } \chi$ sont des bijections.

Démonstration. — L'affirmation (a) résulte immédiatement de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{O}(V, \mathcal{Q}^{n+2}; f_0)) & \leftarrow & \pi_0(\mathcal{O}_p(V, \mathcal{Q}^{n+2}; f_0)) \\ \downarrow \chi_* & & \downarrow \chi_{p*} \\ \mathcal{C}^0/\mathcal{S} & \xleftarrow{i} & \mathcal{C}_p/\mathcal{S}_p \end{array}$$

de la proposition 5.4 et du lemme 5.6, compte tenu de la bijection $K_n : \mathcal{C}_n / \mathcal{S}_n \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$.

L'affirmation (b) résulte immédiatement du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Im} \chi & \xleftarrow{i} & \mathcal{C}_p / \mathcal{S}_p \\ & \searrow \scriptstyle K/\mathrm{Im} \chi & \swarrow \scriptstyle K \\ & \mathbb{Z}[\pi_1(Q)]/[ag-ga; \mathbb{Z}] & \end{array}$$

de la proposition 5.4 et de (a).

3. Unicité des chemins de réordonnement

On vient d'associer à toute pseudo-isotopie de $\mathcal{O}(V, Q; f_0)$ in invariant algébrique dans $Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$. Comme on ne sait pas le faire pour une pseudo-isotopie quelconque, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 5.8. — *L'application induite par l'inclusion*

$$\pi_0(\mathcal{O}(V^n, Q^{n+2}; f_0)) \xrightarrow{j_*} \pi_0(\mathcal{F}(V, Q; f_0))$$

est bijective.

Démonstration. — On sait par le chapitre 3 que j_* est surjective.

La démonstration de l'injectivité de j_* est formellement identique à celle de la connexité de l'espace des fonctions ordonnées ([1], chap. V, § 1) dès qu'on a dans notre situation les lemmes semi-locaux suivants [1] : lemme du triangle, des singularités indépendantes, d'apparition d'un bec. Leur démonstration, à base de transversalité, est facile.

Remarque. — C'est le seul endroit de la démonstration de la proposition 1 de l'introduction où l'on a besoin de familles à un paramètre.

4. Fin de démonstration de la proposition 1

On note θ l'application composée

$$\pi_0(\mathcal{O}(V, Q; f_0)) \xrightarrow{\chi} \mathcal{C}^0/\mathcal{S} \xrightarrow{K} Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$$

et

$$\Theta = \theta \circ j_*^{-1} : \pi_0(\mathcal{F}^0(V, Q, f_0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}(V, Q, f_0)) \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$$

PROPOSITION 5.9. — *On suppose que le plongement $f_0 : V^n \rightarrow Q^{n+2}$ ($n \geq 5$) est à fibré normal trivial et que $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$ est un isomorphisme. Soient $F \in \mathcal{F}^0(V, Q, f_0)$, et \bar{F} sa composante connexe. Alors $\Theta(\bar{F}) = 0$ si, et seulement si, F est isotope à une isotopie.*

Démonstration. — F est isotope à une pseudo-isotopie F' de $\mathcal{O}_p(V, Q, f_0)$ vérifiant $\Theta(\bar{F}) = \theta_p(F')$. Donc, d'après la proposition 5.5, F' est isotope à une pseudo-isotopie sans critique, elle-même isotope à $f_0 \times \text{id}_I$ d'après le lemme 2.2.

LEMME 5.10 (*d'addition*). — Soient $F : V \times [0, 1] \rightarrow Q \times [0, 1]$ une pseudo-isotopie de $\mathcal{F}^0(V^n, Q^{n+2}, f_0)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1 de l'introduction induisant au niveau $V \times \{1\}$ un plongement f_1 . Soit F_1 une pseudo-isotopie de $\mathcal{F}^0(V^n, Q^{n+2}; f_1)$ considérée comme plongement de $V \times [1, 2] \rightarrow Q \times [1, 2]$. On suppose F (resp. F_1) verticale sur $V \times [1 - \varepsilon, 1]$ (resp. $V \times [1, 1 + \varepsilon]$). Alors la pseudo-isotopie

$$F_2 = F \cup F_1 : V \times [0, 2] \rightarrow Q \times [0, 2]$$

a pour invariant $\Theta(F \cup F_1) = \Theta(F) + \Theta(F_1)$.

Démonstration. — D'après le corollaire 5.3, F est isotope à une pseudo-isotopie F' n'ayant que deux points critiques, l'un d'indice p , l'autre d'indice $p+1$. Soit $H_t : Q \times I \rightarrow Q \times I$ une isotopie (fixe sur $Q \times \{0\}$) telle que $H_1 \circ F = F'$. On appelle h_t la restriction de H_t au niveau $Q \times \{1\}$, et on pose $F'_1 = (h_1 \times \text{id}_{[1,2]}) \circ F_1$. D'après le corollaire 5.3, il existe une pseudo-isotopie F''_1 isotope à F'_1 n'ayant que deux points critiques l'un d'indice p , l'autre d'indice $p+1$. Il est clair que $F \cup F_1$ est isotope à $F' \cup F''_1$.

Soit (e_0, f_0) (resp. (e_1, f_1)) les deux points critiques de F' (resp. F''_1) d'indice respectif p et $p+1$. On peut supposer que le couple d'intersection associé à un système de bimembranes de (e_0, f_0) (resp. (e_1, f_1)) est du type $((1), (g))$ (resp. $(1), (g'')$). On a alors

$$\begin{aligned} \Theta(F) &= \Theta(F') = [g] \in Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z] \\ (\text{resp. } \Theta(F_1) &= \Theta(F''_1) = [g']) \end{aligned}$$

Pour calculer l'invariant attaché à $F' \cup F''_1$, on ordonne ses points critiques en faisant descendre e_1 en-dessous de f_0 . Les points critiques e_1 et f_0 étant indépendants, le couple d'intersection relatif à e_1 et f_0 est nul. Le couple de matrices associé à $F' \cup F''_1$ est donc du type :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} g & \alpha \\ 0 & g' \end{pmatrix}.$$

L'invariant attaché à $F' \cup F''_1$ est donc

$$\Theta(F' \cup F'') = \text{tr}(B f_{0*}(A^{-1})) = [g + g'] = [g] + [g'] = \Theta(F) + \Theta(F').$$

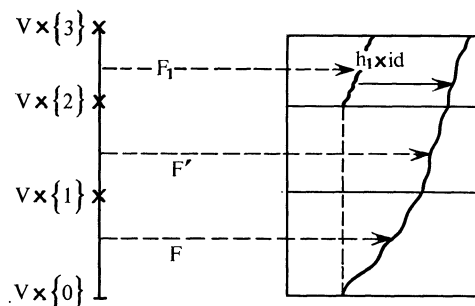
On est maintenant en mesure de terminer la démonstration de la proposition 1. La surjectivité de l'application

$$\Theta : \pi_0(\mathcal{F}^0(V^n, Q^{n+2}; f_0)) \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$$

résulte de la surjectivité des applications θ_p et i_* (prop. 5.5 et 3.4) dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_0(\mathcal{O}_p(V, Q, f_0)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_0(\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)) \\
 \searrow \theta_p & & \swarrow \Theta \\
 & Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z] &
 \end{array}$$

La démonstration de l'injectivité de Θ est analogue à celle du théorème d'unicité des h -cobordismes ayant même torsion ([7], th. 11.3). Soient F et F_1 deux pseudo-isotopies de $\mathcal{F}^0(V, Q, f_0)$ telles que $\Theta(F) = \Theta(F_1)$. On peut supposer F verticale sur un voisinage de $V \times \partial[0, 1]$, et considérer F' comme un plongement de $V \times [2, 3]$ dans $Q \times [2, 3]$ vertical sur un voisinage de $V \times \partial[2, 3]$. On note f_1 la restriction de F à $V \times \{1\}$. D'après la surjectivité de l'application Θ , il existe une pseudo-isotopie $F' : V \times [1, 2] \rightarrow Q \times [1, 2]$ de $\mathcal{F}^0(V, Q, f_1)$ telle que $\Theta(F') = -\Theta(F) = -\Theta(F_1)$ (remarquer que f_1 a les mêmes propriétés que f_0). On note f_2 la restriction de F' à $V \times \{2\}$. D'après le lemme d'addition et la proposition 5.9, $F \cup F'$ est isotope à $f_0 \times \text{id}_{[0, 2]}$. Soient $H_t : Q \times [0, 2] \rightarrow Q \times [0, 2]$ une isotopie (fixe sur $Q \times \{0\}$) telle que $F \cup F' = H_1 \circ (f_0 \times \text{id}_{[1, 2]})$, et h_t sa restriction au niveau $Q \times \{2\}$. La pseudo-isotopie $F'_1 = (h_1 \times \text{id}_{[2, 3]}) \circ F_1$ a même invariant que F_1 et se raccorde à $F \cup F'$ le long de $V \times \{2\}$:



Alors $F \cup F' \cup F'_1$ est isotope à $(f_0 \times \text{id}_{[1, 2]}) \cup F_1$. D'autre part, puisque $\Theta(F') = -\Theta(F'_1)$, $F \cup F' \cup F'_1$ est aussi isotope à F . Il en résulte que F et F_1 sont isotopes (mod f_0).

On a comme dans le cas du h -cobordisme le lemme suivant :

LEMME 5.11 (de dualité). — Soit F une pseudo-isotopie satisfaisant aux hypothèses de la proposition 1 induisant les plongements f_0 et f_1 aux extrémités $V \times \{0\}$ et $V \times \{1\}$. Notons $\Theta(F, f_0)$ (resp. $\Theta(F, f_1)$) l'invariant de F considéré comme élément de

$$\mathcal{F}^0(V^n, Q^{n+2}; f_0) \text{ (resp. } \mathcal{F}^0(V^n, Q^{n+2}; f_1)).$$

On a alors

$$\Theta(F, f_1) = (-1)^n \overline{\Theta(F, f_0)},$$

où $\overline{(\)} : Z[\pi_1(Q)] \rightarrow Z[\pi_1(Q)]$ désigne la conjugaison

$$\overline{(\sum n_g g)} = \sum n_g g^{-1}.$$

ADDITIF [8 novembre 1975]. — A. HATCHER a signalé que son calcul de la seconde obstruction (correspondant au facteur $Wh_1(\pi_1(M), Z_2 \times \pi_2(Q))$ du théorème A de l'introduction) est faux en général. En conséquence, le principal résultat de cet article (proposition 1 de l'introduction) ne découle pas du travail de HATCHER.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CERF (J.). — *La stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*. — Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques, 39, p. 5-173).
- [2] HATCHER (A.) et WAGONER (J.). — Pseudo-isotopies of compact manifolds, *Astérisque*, 1973, n° 6, 275 p.
- [3] HATCHER (A.). — Concordance and isotopy of smooth embeddings in low codimensions, *Invent. Math.* (à paraître).
- [4] HUDSON (J.). — Concordance and isotopy of PL embeddings; *Annals of Math.*, t. 91, 1970, p. 425-448.
- [5] KERVAIRE (M.). — Le théorème de Barden-Mazur-Stallings, *Comment. Math. Helvet.*, t. 40, 1965, p. 31-43.
- [6] MILNOR (J.). — Whitehead torsion, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 72, 1966, p. 358-426.
- [7] MILNOR (J.). — *Lecture on the h-cobordism theorem*. — Princeton, Princeton University Press, 1965 (Princeton mathematical Notes).
- [8] MORLET (C.). — *Automorphismes et plongements de variétés*, Cours Peccot, Collège de France, Paris, 1969.
- [9] PERRON (B.). — Pseudo-isotopie en codimension 2, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, Série A, 1973, p. 455-458.

(Texte reçu le 12 février 1975.)

Bernard PERRON,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences Mirande,
Campus universitaire,
21000 Dijon.