BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-CLAUDE MARCUARD

Produits semi-directs et application aux nilvariétés et aux tores en théorie ergodique

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 267-287
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__267_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 267-287.

PRODUITS SEMI-DIRECTS ET APPLICATION AUX NILVARIÉTÉS ET AUX TORES EN THÉORIE ERGODIQUE

PAR

JEAN-CLAUDE MARCUARD

[Dijon]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, il est montré que les produits semi-directs, dont la base est un système quelconque et les fibres sont des tores munis d'une transformation affine avec un automorphisme ergodique τ fixé, se décomposent en produit. Ceci permet de prouver que les automorphismes des nilvariétés, dont la différentielle n'admet aucune valeur propre racine de l'unité, sont des schémas de Bernoulli, et que les transformations affines des tores vérifient la propriété de Pinsker forte.

Introduction

Un système dynamique est constitué par un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et une transformation inversible bimesurable T de X préservant la mesure finie μ. Lorsque aucune confusion n'est possible, on note (X, T) ces systèmes.

Deux systèmes (X, T) et (X', T') sont dits métriquement isomorphes, ou plus simplement isomorphes, ou les transformations sont dites conjuguées, s'il existe un isomorphisme φ entre les espaces mesurés pour lequel $\varphi \circ T = T' \circ \varphi$. Le système (X, T) se décompose en le produit des systèmes (Y, S) et (Y', S') si les systèmes (X, T) et $(Y \times Y', S \times S')$ sont isomorphes.

Un schéma de Bernoulli est un système pour lequel il existe une partition finie P telle que les partitions $\{ T^i P \}_{-\infty}^{\infty}$ soient indépendantes et engendrent X.

On sait que de nombreux systèmes classiques, les difféomorphismes d'ANOSOV [2], les automorphismes ergodiques des tores [5] sont des schémas de Bernoulli. En particulier, les automorphismes ergodiques des nilvariétés, dont la différentielle n'admet pas de valeurs propres de module 1 étant des difféomorphismes d'Anosov, ce sont des schémas de Bernoulli.

Dans le paragraphe 4, ce résultat est étendu aux automorphismes pour lesquels la différentielle n'admet pas de valeur propre racine de l'unité.

Par ailleurs, on dit qu'un système possède la propriété de Pinsker forte s'il se décompose en le produit d'un système d'entropie nulle et d'un schéma de Bernoulli. Dans le paragraphe 5, nous montrons que les transformations affines ergodiques des tores vérifient la propriété de Pinsker forte, ce qui fournit un exemple non trivial de tels systèmes, et ce qui répond à une question posée par P. C. SHIELDS dans [14].

Pour obtenir ces résultats, dans le premier paragraphe, à l'aide de la notion de partition conditionnellement très faiblement de Bernoulli par rapport à une sous-tribu, nous énonçons des théorèmes permettant d'obtenir la décomposition d'un système en un produit dont un des facteurs esi de Bernoulli.

Dans le second paragraphe, nous appliquons ces théorèmes au cas d'un produit semi-direct ergodique dont la base est un système quelconque et les fibres sont des tores sur lesquels opèrent dex transformations affines avec un automorphisme τ fixé. Par des techniques analoguees à celle de KATZNELSON [5], nous obtenons une décomposition en produit direct.

Certaines extensions par un groupe compact G sont des produits semi-directs du type précédent, et nous obtenons, dans le paragraphe 4, un théorème de décomposition pour des extensions libres de type (G, τ), où τ est un automorphisme ergodique du tore G, ce qui permet une présentation plus agréable des applications.

Je remercie mes amis J.-P. CONZE et J.-P. THOUVENOT pour leurs conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

1. Bernoulli conditionnel

J.P-. THOUVENOT [11] a donné une version conditionnelle de la définition de partition très faiblement de Bernoulli introduite par D. ORNSTEIN [7]. Ces définitions nécessitent la notion de distance $\bar{d}$ entre les suites de partitions.

Rappelons les notations de ORNSTEIN, les partitions considérées étant toujours mesurables.

Étant donnée une partition finie $P = \{ P_1 \ldots P_r \}$ dans un espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et un ensemble mesurable A, on note

$$d(P/A) = \{ \mu_A(P_i);\ 1 \leqslant i \leqslant r \} \qquad \text{et} \qquad d(P) = d(P/X)$$

les vecteurs distributions de la partition P induite sur A et sur X. La métrique usuelle sur l'espace des partitions est donnée par

$$|P-Q| = \sum_i \mu(P_i \Delta Q_i).$$

Si P et Q sont deux partitions finies, et A et B deux ensembles mesurables, on pose

$$d(P/A,\ Q/B) = \sum_i |\mu_A(P_i) - \mu_B(Q_i)|.$$

Si une propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée pour tous les atomes d'une partition P, sauf éventuellement pour un ensemble d'atomes dont la réunion a une mesure inférieure à ε, on dit que $\mathscr{P}$ est vraie pour ε-presque chaque atome de P.

Deux partitions P et Q de X sont dites ε-indépendantes, et on note $P \perp^{\varepsilon} Q$, si $d(P/B, P) < \varepsilon$ pour ε-presque chaque atome B de Q.

On définit également une distance $\bar{d}$ entre deux suites de partitions finies $\{P_i\}_1^n$, $\{Q_i\}_1^n$, non nécessairement définies sur le même espace mais ayant le même nombre d'atomes, en posant

$$\bar{d}(\{P_i\}_1^n, \{Q_i\}_1^n) = \inf \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|,$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des suites de partitions $\{\alpha_i\}_1^n$, $\{\beta_i\}_1^u$, définies sur un espace de Lebesgue auxiliaire et telles que

$$d(\mathbf{V}_1^n \alpha_i) = d(\mathbf{V}_1^n P_i), \qquad d(\mathbf{V}_1^n \beta_i) = d(\mathbf{V}_1^n Q_i).$$

Soit (X, T) un système dynamique. Si P est une partition finie de X, on note

$$(P)_T = \mathbf{V}_{-\infty}^{\infty} T^i P.$$

la tribu invariante engendrée par P.

DÉFINITION 1 (THOUVENOT). — Soient (X, T) un système dynamique, et P et H deux partitions finies de X. On dit que P est (H_T)-*conditionnellement très faiblement de Bernoulli*, si pour tout ε, il existe un entier N_ε tel que, pour tout entier $m > 0$, il existe un entier k tel que, pour tout $p > k$, on ait :

$$\bar{d}(\{T^i P/(B \cap Q)\}_1^{N_\varepsilon}, \{T^i P/Q\}_1^{N_\varepsilon}) < \varepsilon, \tag{1}$$

pour ε-presque chaque atome Q de $\bigvee_{-p}^{p} T^i H$ et pour ε-presque chaque atome B de $\bigvee_{0}^{-m} T^i P$. (Cette famille d'atomes B dépend de l'atome Q.)

Le lemme suivant montrera l'équivalence de cette définition avec la suivante.

DÉFINITION 2. — Soit (X, T) un système, et soient P et H deux partitions finies de X. On dit que P est *$(H)_T$-conditionnellement très faiblement de Bernoulli* si, pour tout ε, il existe un entier N_ε tel que, pour tout entier $m > 0$ et pour ε-presque chaque fibre q de $(H)_T$, on ait :

$$\bar{d}_q(\{ T^i P/(B \cap q)\}_1^{N_\varepsilon}, \{ T^i P/q\}_1^{N_\varepsilon}) < \varepsilon \tag{2}$$

pour ε-presque chaque atome B de $\bigvee_{-m}^{0} T^i P$, la distance $\bar{d}_q$ étant prise avec la mesure conditionnelle sur la fibre q.

LEMME 1. — *Les définitions* (1) *et* (2) *ci-dessus sont équivalentes.*

Démonstration. — Soient $\{ H_1, \ldots, H_r\}$ les atomes de la partition H, et

$$q = \bigcap_{-\infty}^{\infty} T^i H_{n_i} \in (H)_T, \qquad Q = \bigcap_{-p}^{p} T^i H_{n_i} \in \bigvee_{-p}^{p} T^i H = (H)_{-p}^{p}.$$

Il résulte du lemme 2 d'ORNSTEIN [7] que

$$\begin{aligned}\bar{d}(\{ T^i P/q\}_1^N, \{ T^i P/q_r\}_1^N) &\leqslant d(\bigvee_1^N T^i P/q, \bigvee_1^N T^i P/Q)\\ &= \textstyle\sum_{A \in \bigvee_1^N T^i P} | \mu_q(A) - \mu_Q(A) | .\end{aligned}$$

Comme les tribus $\bigvee_{-p}^{p} T^i H$ tendent en croissant vers $(H)_T$, le théorème de convergence sur les espérances conditionnelles donne

$$E(1_A \,|\, \bigvee_{-p}^{p} T^i H) \to E(1_A \,|\, (H)_T) \text{ presque partout.}$$

Par application du théorème d'Egoroff, on en déduit une convergence uniforme pour ε-presque chaque $q \in (H)_T$. Donc il existe un $k(\varepsilon)$ suffisamment grand tel que, pour ε-presque chaque $q \in (H)_T$ et pour tout $p > k(\varepsilon)$, on ait :

$$\bar{d}(\{ T^i P/q\}_1^N, \{ T^i P/Q\}_1^N) < \varepsilon.$$

Soit $q = \bigcap_{-\infty}^{\infty} T^i H_{i_n}$ un atome de $(H)_T$ pour lequel la relation (2) est vraie, il résulte de l'inégalité triangulaire que, pour $Q = \bigcap_{-p}^{p} T_i H_{n_i}$,

$$\begin{aligned}&\bar{d}(\{ T^i P/(Q \cap B)\}, \{ T^i P/Q\})\\ &\quad\leqslant \bar{d}(\{ T^i P/(Q \cap B)\}, \{ T^i P/(q \cup B)\}) + \bar{d}(\{ T^i P/(q \cap B)\}_1^N, \{ T^i P/q\}_1^N)\\ &\qquad + \bar{d}(\{ T^i P/q\}_1^N, \{ T^i P/Q\}_1^N).\end{aligned}$$

Ce qui implique l'inégalité (1), avec 3 ε au lieu de ε en prenant $p > k(\varepsilon)$. La définition (2) implique la définition (1). On montre l'implication inverse par la même méthode en inversant les rôles de q et Q.

Les résultats des articles [10] et [11] de J.-P. THOUVENOT peuvent se formuler de la manière suivante.

THÉORÈME 1. — *Soient* (X, T) *un système ergodique, et* $\pi = (H)_T$ *une tribu invariante de* X. *Si* P *est une partition* π*-conditionnellement très faiblement de Bernoulli, alors le système* $((P)_T \vee \pi, T)$ *se décompose en le produit du système* (π, T) *et d'un schéma de Bernoulli* $((B)_T, T)$.

Cela signifie que l'on peut construire une partition finie B de X telle que :

$$T^i B, \qquad i \in Z \text{ sont indépendantes.}$$

$$(B)_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^i B \text{ et } \pi \text{ sont indépendantes.}$$

$$\pi \vee (B)_T = \pi \vee (P)_T.$$

Dans [11], il est montré que si P est π-conditionnellement très faiblement de Bernoulli, alors P est π-conditionnellement finiment déterminée, ce qui implique d'après [10] la conclusion du théorème.

THÉORÈME 2. — *Soient* (X, T) *un système ergodique d'entropie finie, et* (P_n) *une suite de partition de* X *telles que*

$$(P_n)_T \subset (P_{n+1})_T \qquad et \qquad \bigvee_1^{\infty} (P_n)_T = X.$$

Soit π *une tribu invariante de* X, *si chaque partition* P_n *est* π*-conditionnellement très faiblement de Bernoulli, alors le système* (X, T) *se décompose en le produit direct du système* (π, T) *et d'un schéma de Bernoulli* $((B)_T, T)$.

Démonstration. — Le système étant ergodique et d'entropie finie, il existe une partition génératrice finie P, c'est-à-dire :

$$X = (P)_T.$$

Rappelons la définition suivante. On dit qu'une partition P est contenue dans la partition Q à ε près, et on note $P \subset^{\varepsilon} Q$ s'il existe une partition Q', dont les atomes sont des réunions d'atomes de Q, telle que

$$|P - Q'| < \varepsilon.$$

D'après les hypothèses, pour tout ε, il existe un entier n et une partition $\overline{P}_n$ mesurable par rapport à la tribu $(P_n)_T$, telle que

$$P \subset \overline{P}_n.$$

Par ailleurs, d'après le théorème 1, il existe un schéma de Bernoulli $((B_\varepsilon)_T, T)$ indépendant de π tel que

$$\pi \vee (B_\varepsilon)_T = \pi \vee (P_n)_T.$$

Le facteur (π, T) étant ergodique et d'entropie finie, il existe une partition génératrice finie H telle que $(H)_T = \pi$.

Les égalités précédentes permettent de trouver un entier N_ε tel que

$$\bar{P}_n \subset^{\varepsilon} \bigvee_{-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} T^i (B_\varepsilon \vee H).$$

Donc

$$P \subset^{2\varepsilon} \bigvee_{-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} T^i (B_\varepsilon \vee H).$$

Le corollaire 7.1 de [10] permet de déduire que la partition P est π-conditionnellement finiment déterminée, ce qui implique la conclusion du théorème.

En réalité, on utilisera, en s'inspirant de KATZNELSON [5], la notion de π-conditionnellement presque faiblement de Bernoulli, qui est plus forte que π-conditionnellement très faiblement de Bernoulli, et que nous allons introduire.

DÉFINITION 3. — Soient (X, T) un système ergodique, et P et H deux partitions finies. On dit que P est *(H_T)-conditionnellement presque faiblement de Bernoulli* si, pour tout ε, il existe un entier $K_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $K > K_0$, tout $r > 0$, et pour ε-presque chaque fibre de $(H)_T$, on a

$$\bigvee_{K}^{K^2} T^j P/q \perp^{\varepsilon} \bigvee_{-K}^{-(K+r)} T^j P/q \tag{3}$$

(au sens de la mesure μ_q conditionnelle sur la fibre q).

LEMME 2. — *Si P est une partition $(H)_T$-conditionnellement presque faiblement de Bernoulli, alors P est $(H)_T$-conditionnellement très faiblement de Bernoulli.*

Démonstration. — Soit Q_1 l'union des fibres $q \in (H)_T$ pour lesquelles la relation (3) est vraie :

$$\mu(Q_1) > 1 - \varepsilon.$$

T, préservant la mesure la relation (3), est équivalente à

$$\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, T^j\, P/q' \perp^{\varepsilon} \mathbf{V}_0^{-m}\, T^j\, P/q' \qquad \text{avec} \quad q' = T^K q.$$

Ce qui signifie que, pour ε-presque chaque atome B de $\mathbf{V}_0^{-m}\, T^j\, P$,

$$d_{q'}(\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, T^j\, P/(B \cap q'),\ \mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, T^j\, P/q') < \varepsilon.$$

D'après le lemme 1 de [7] on peut trouver deux suites de partitions $\{\alpha_i\}_{2K}^{K2+K}, \} \{\beta_i\}_{2K}^{K2+K}$ sur un espace de Lebesgue auxiliaire telles que

$$d(\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, \alpha_i) = d_{q'}(\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, T^j\, P/(B \cap q'));$$
$$d(\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, \beta_i) = d_{q'}(\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, T^j\, P/q')$$

et

$$|\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, \alpha_i - \mathbf{V}_{K2}^{K2+K}\, \beta_i| < \varepsilon.$$

Complétons arbitrairement ces suites de partitions en sorte que

$$d(\mathbf{V}_1^{K2+K}\, \alpha_i) = d_{q'}(\mathbf{V}_1^{K2+K}\, T^i\, P/(B \cap q'));$$
$$d(\mathbf{V}_1^{K2+K}\, \beta_i) = d_{q'}(\mathbf{V}_1^{K2+K}\, T^j\, P/q').$$

En tenant compte des inégalités suivantes

$$i \geqslant 2K, \qquad |\alpha_i - \beta_i| \leqslant |\mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, \alpha_i - \mathbf{V}_{2K}^{K2+K}\, \beta_i| < \varepsilon,$$
$$i \leqslant 2K, \qquad |\alpha_i - \beta_i| \leqslant 2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\bar{d}(\{T^i\, P/(B \cap q')\}_1^{K2+K}, \{T^i\, P/q'\}_1^{K2+K}) \\
&< \frac{1}{K^2+K} \textstyle\sum_{i \leqslant 2K} |\alpha_i - \beta_i| + \frac{1}{K^2+K} \sum_{i > 2K} |\alpha_i - \beta_i| \\
&< \frac{2K}{K^2+K} + \frac{K^2-K}{K^2+K}\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

On peut trouver K suffisamment grand tel que, pour $N = K^2 + K$, on ait

$$d(\{T^i\, P/(B \cap q')\}_1^N, \{T^i\, P/q'\}_1^N) < 2\,\varepsilon$$

pour tout $q' \in T^K\, Q_1$ et ε-presque chaque B de $\mathbf{V}_{-m}^{0}\, T^j\, P$.

Comme $\mu\,(T^K\, Q_1) = \mu\,(Q_1) > 1 - \varepsilon$, le lemme est démontré.

2. Produits semi-directs

Soient (Y, S) un système quelconque, et G un tore muni d'un automorphisme τ. Si f est une application mesurable de Y dans G, on considère le produit semi-direct (X, T), défini par

$$X = Y \times G; \qquad T(y, g) = (S(y), \tau(g) + f(y)).$$

Le système (Y, S) est la base du produit direct, et les systèmes $(G, \tau(.) + f(y))$ en sont les fibres. On note π_y la partition mesurable de X associée à la base Y.

THÉORÈME 3. — *Soit le système (X, T) produit semi-direct des systèmes (Y, S), et $(G, \tau + f(y))$, où τ est un automorphisme ergodique du tore G. Soient P une partition mesurable finie de Y et Q une partition en pavés du tore G.*

Alors la partition $R = P \vee Q$ est une partition de X, π_Y-conditionnellement presque faiblement de Bernoulli.

La démonstration de ce théorème s'inspire des techniques utilisées par KATZNELSONG [5], et nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 3 (KATZNELSON). — *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux partitions finies de l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{F}, \mu)$. Si à chaque réel positif ε correspond un ensemble mesurable E_ε de mesure $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon^2$, et si à chaque atome A de $\mathscr{A}$ et à chaque atome B de $\mathscr{B}$ correspondent respectivement des fonctions réelles mesurables φ_A et ψ_B non négatives et telles que ,*

1° $$\varphi_A(t) \geqslant 1 \quad sur\ A - E_\varepsilon\,; \qquad \psi_B(t) \geqslant 1\ sur\ B - E_\varepsilon,$$

2° $$\sum_{\mathscr{A}} \int \varphi_A\, d\mu < 1 + \varepsilon^2; \qquad \sum_{\mathscr{B}} \int \psi_B\, d\mu < 1 + \varepsilon^2,$$

3° $$\int \varphi_A . \psi_B\, d\mu = \int \varphi_A\, d\mu . \int \psi_B\, d\mu,$$

avec les partitions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont $(16\,\varepsilon)$-*indépendantes.*

LEMME 4 (KATZNELSON). — *Soit M une matrice unimodulaire de R^n à coefficients entiers et n'admettant pas de valeurs propres racines de l'unité. Soit l un entier, et soient, pout tout $m > 0$, des éléments a_m et b_m de Z^n tels que ,*

$$|a_m|, |b_m| < nm^l.$$

Alors il existe une constante K_0 telle que, pour tout $K > K_0$, les éléments

$$a = \sum_K^{K^2} M^m a_m, \qquad b = \sum_K^{K+r} M^{-m} b_m$$

sont distincts s'ils sont non nuls.

LEMME 5 (KATZNELSON). — *Soit Q une partition finie en pavés du tore G, il existe une constante l telle que, pour tout entier $m > 1$, il existe un ensemble E_m de G, $\mu(E_m) < 1/m^2$, tel que les sommes de Feyer (σ_{m^l, Q_j}) d'ordre m des fonctions indicatives des pavés Q_j vérifient*

1°
$$1 - \sigma_{m^l, Q_j}(g) \leqslant \frac{1}{1+m^2} \quad \text{sur } Q_j - E_m,$$

2°
$$\sup \sum_i \sigma_{m^l, Q_j}(g) \leqslant 1.$$

Démonstration du théorème 3. — Soient $P = \{P_1 \ldots P_s\}$ une partition mesurable quelconque de Y, et $Q = \{Q_1 \ldots Q_s\}$ une partition en pavés du tore G que nous supposerons de dimension n dans la suite. $R = P \vee Q$ est une partition de X admettant comme atomes les ensembles $(P_i \cap Q_j)$. Posons

$$\mathscr{A} = \mathbf{V}_K^{K2} T^{-m} R \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B} = \mathbf{V}_K^{K+r} T^m R.$$

Soit $\{y\}$ une fibre de la partition π_Y. Les partitions

$$\mathscr{A}_y = \mathscr{A} \cap \{y\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_y = \mathscr{B} \cap \{y\}$$

sont des partitions de la fibre $\{y\}$, et notre but est de montrer que, pour ε-presque chaque fibre de Π_Y, les partitions $\mathscr{A}_Y$ et $\mathscr{B}_Y$ sont ε-indépendantes.

Première partie. — A chaque atome $R_{ij} = P_i \cap Q_j$ de la partition R, et à tout entier m, associons la fonction réelle

(4)
$$f_{m,i,j} \cdot (y, g) = \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) 1_{pi}(y) \cdot \sigma_{m^l Q_j}(g).$$

D'après le lemme 5, il existe un ensemble E_m de mesure inférieure à $1/m^2$ tel que ces fonctions possèdent les propriétés suivantes :

(5)
$$f_{m,i,j}(y, g) \geqslant 1 \quad \text{sur } R_{ij} - (Y \times E_m),$$

(6)
$$\sup \sum f_{m,i,j}(y, g) \leqslant 1 + \frac{1}{m^2}.$$

Maintenant, à chaque atome $A = \bigcap_K^{K^2} T^{-m} R_{i_m, j_m}$ de la partition $\mathscr{A}$ associons la fonction

$$\varphi_A(y, g) = \prod_K^{K^2} T^{-m} f_{m, i_m, j_m}(y, g).$$

De même, à chaque atome $B = \bigcap_K^{K+r} T^m R_{i_m, j_m}$ de la partition $\mathscr{B}$ associons la fonction

$$\psi_B(y, g) = \prod_K^{K+r} T^m f_{m, i_m, j_m}(y, g).$$

En vertu des relations (5) et (6), ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$\varphi_A(y, g) \geqslant 1 \quad \text{sur } A - \bigcup_K^{K^2} T^{-m}(Y \times E_m),$$

$$\sum_{\mathscr{A}} \int \varphi_A \, d\mu = \prod_K^{K^2} \int T^{-m}(\sum f_{m, i_m, j_m}(y, g)) \, d\mu \leqslant \prod_K^{K^2} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right).$$

De même,

$$\psi_B(y, g) \geqslant 1 \quad \text{sur } B - \bigcup_K^{K+r} T^m(Y \times E_m),$$

$$\sum_{\mathscr{B}} \int \psi_B \, d\mu = \prod_K^{K+r} \int T^m(\sum f_{m, i_m, j_m}(y, g)) \, d\mu \leqslant \prod_K^{K+r} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right).$$

L'ensemble

$$E = (\bigcup_K^{K^2} T^{-m}(Y \times E_m)) \cup (\bigcup_K^{K+r} T^m(Y \times E_m))$$

a une mesure vérifiant

$$\mu(E) \leqslant 2 \sum_K^{\infty} \mu(Y \times E_m).$$

Donc étant donné le réel positif ε, il est possible de choisir un entier $K'_0(\varepsilon)$, tel que, pour tout $K \geqslant K'_0(\varepsilon)$, on ait $\mu(E) < \varepsilon^4$,

$$\int \sum_{\mathscr{A}} \varphi_A \, d\mu < 1 + \varepsilon^4; \qquad \int \sum_{\mathscr{B}} \psi_B \, d\mu < 1 + \varepsilon^4.$$

Soit $\{ y_0 \}$ une fibre de π_Y, à chaque atome $A \cap \{ y_0 \}$ de la partition $\mathscr{A}_{y_0}$ associons la fonction

$$\varphi_{A y_0}(g) = \varphi_A(y_0, g).$$

De même, à chaque atome $B \cap \{ y_0 \}$ de la partition $\mathscr{B}_{y_0}$ associons la fonction

$$\psi_{B y_0}(g) = \psi_B(y_0, g).$$

Par application du théorème de Fubini, on déduit aisément que les applications φ_{A_y} et ψ_{B_y} vérifient les conditions 1° et 2° du lemme 3 pour ε-presque chaque fibre $\{y\}$ de π_Y.

Deuxième partie. — La fibre $\{y\}$ étant fixée il reste à vérifier que les fonctions φ_{A_y} et ψ_{B_y} satisfont également à la condition 3° du lemme 3.

Ces fonctions φ_{A_y} et ψ_{B_y} sont des polynômes trigonométriques définis sur le tore G et que nous allons expliciter. Les puissances de l'automorphisme T s'écrivent :

$$T^m(y, g) = (S^m y, \tau^m(g) + h_m(y)), \tag{7}$$

la translation $h_m(y)$ étant donnée par

$$h_m(y) = \textstyle\sum_1^m T^{m-k}(f(S^{k-1} y)).$$

L'automorphisme T est inversible et T^{-1} est également un produit semi-direct :

$$T^{-1}(y, g) = (S^{-1} y, \tau^{-1}(g) - \tau^{-1}(f(S^{-1} y)).$$

Il en résulte la relation

$$T^{-m}(u, g) = (S^{-m} y, \tau^{-m}(g) + h'_m(y)), \tag{7'}$$

avec

$$h'_m(y) = -\textstyle\sum_{k=0}^{m-1} \tau^{-m+k}(f(S^{-(k+1)} y)).$$

D'après leur définition, les fonctions φ_{A_y} et ψ_{A_y} s'écrivent :

$$\varphi_{A_y} \quad = \textstyle\prod_K^{K^2} f_{m, i_m, j_m}(T^m(y, g)), \tag{8}$$

$$\psi_{B_y}(g) = \textstyle\prod_K^{K^2} f_{m, i_m, j_m}(T^{-m}(y, g)). \tag{8'}$$

Les fonctions f_{m, i_m, j_m} sont d'après (4) du type

$$f_{m, i_m, j_m}(y, g) = 1_{p_{i_m}}(Y). \textstyle\sum \alpha_{k_m} \exp(2 i\pi \langle k_m, g \rangle)$$

où les α_{k_m} sont des scalaires, et les k_m des éléments de Z^n dépendant de Q_{j_m} et de norme inférieure à $n\, m^l$. Et d'après les relations (7) et (7'), on obtient

$$f_{m, i_m, j_m}(T^m(y, g)) \ = 1_{p_{i_m}}(S^m y) \ . \textstyle\sum \alpha_{k_m} \beta_{k_m}(y) \exp(2 i \pi \langle k_m, \tau^m(g) \rangle), \tag{9}$$

$$f_{m, i_m, j_m}(T^{-m}(y, g)) = 1_{p_{i_m}}(S^{-m} y). \textstyle\sum \alpha_{k_m} \beta'_{k_m}(y) \exp(2 i \pi \langle k_m, \tau^{-m}(g) \rangle), \tag{9'}$$

où l'on a posé

$$\beta_{k_m}(y) = \exp(2\,i\,\pi \langle k_m, h_m(y) \rangle,$$
$$\beta'_{k_m}(y) = \exp(2\,i\,\pi \langle k_m, h'_m(y) \rangle.$$

Par ailleurs à l'automorphisme τ du tore $G = R^n/Z^n$ est associé à une matrice $\tilde{M}$ à coefficients entiers et unimodulaires. On note M la matrice transposée de $\tilde{M}$. Il résulte des relations (8), (8′), (9) et (9′) que les fonctions φ_{A_y} et ψ_{A_y} sont des polynômes trigonométriques sur G admettant des fréquences respectivement du type

$$a = \textstyle\sum_K^{K2} M^m a_m\,; \tag{10}$$

$$b = \textstyle\sum_K^{K+r} M^{-m} b_m, \tag{10'}$$

a_m et b_m étant des éléments de Z^n dont la norme vérifie

$$|a_m|,\ |b_n| < n.m^l. \tag{11}$$

Si nous prouvons que la seule fréquence commune aux fonctions φ_{A_y} et ψ_{B_y}, pour tout A de $\mathscr{A}$ et tout N de $\mathscr{B}$ est zéro, alors l'inégalité 3° du lemme 3 sera démontrée car, d'après les propriétés des polynômes trigonométriques,

$$\int_G \varphi_{Ay}(g).\psi_{By}(g)\,d\mu_N = \int_G \varphi_{Gy}(g)\,d\mu_A.\int_G \psi_B(g)\,d\mu_G.$$

Or l'automorphisme τ étant ergodique, la matrice M n'admet aucune valeur propre racine de l'unité, et, d'après le lemme 4, les fonctions φ_{A_y} et ψ_{B_y} n'ont aucune fréquence commune.

C. Q. F. D.

Ce résultat nous permet de démontrer le théorème de décomposition suivant :

THÉORÈME 4. — *Soient τ un automorphisme ergodique de tore G, et (X, T) le produit semi-direct du système (Y, S) d'entropie finie et de fibre $(G, \tau(.)+f(y))$. Si le système (X, T) est ergodigue, alors il est isomorphe au produit direct des systèmes (Y, S) et (G, τ).*

Démonstration. — Il est aisé de trouver une suite (P_n) de partitions de Y, et une suite (Q_n) de partitions en pavés du tore G telles que, si $R_n = P_n \vee Q_n$, on ait

$$(R_n)_T \subset (R_{n+1})_T \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_1^{\infty}(R_n)_T = X.$$

Chaque partition R_n étant, d'après le théorème précédent, π_Y-conditionnellement presque faiblement de Bernouilli est, d'après le lemme 2, π_Y-conditionnellement très faiblement de Bernoulli. Le théorème 2 implique alors que le système (X, T) se décompose en le produit direct du système (Y, S) et d'un schéma de Bernoulli $((B)_T, T)$. Les résultats sur l'entropie des systèmes produits directs [9] et semi-directs [1] donnent respectivement :

$$h(X, T) = h(Y, S) + h((B)_T, T),$$

$$h(X, T) = h(Y, S) + h(G, \tau),$$

d'où

$$h(G, \tau) = h(B))_T, T).$$

Pour conclure, il suffir de remarquer que les automorphismes des tores étant des schémas de Bernoulli [5], il résulte du théorème d'isomorphisme de ORNSTEIN [6] que les systèmes $((B_T), T)$ et (G, τ) sont isomorphes.

3. **Extension de type** (G, τ)

Afin de faciliter les démonstrations pour les applications des théorèmes précédents, nous allons énoncer des résultats analogues dans le cadre de certaines extensions.

Soient (X, T) un système dynamique, et G un groupe compact abélien séparable opérant sur X de telle sorte que

1° L'application $(x, g) \to g.x$ de $X \times G$ dans X soit mesurable.

2° Pour tout g de G, la transformation $x \to gx$ conserve la mesure μ de X. τ étant un automorphisme du groupe G, on dit que l'action de G, τ-commute avec T si, pour tout x de X et tout g de G, la relation suivante est vérifiée

$$T(gx) = \tau(g).T(x)$$

Dans ces conditions l'espace X/G des orbites des points de X sous l'action de G est invariant par T, et définit un système $(X/G, T)$ facteur du système (X, T). Si (Y, S) est un système isomorphe à $(X/G, T)$, le système (X, T) est dit une *extension de type* (G, τ) du système (Y, S). Si de plus l'action de G sur X vérifie, pour tout x de X, la condition

$$gx = x \quad \text{implique} \quad g = e,$$

l'extension est dite libre.

THÉORÈME 5. — *Soit* τ *un automorphisme ergodique du tore* G, *et* (X, T) *une extension libre de type* (G, τ) *du système* (Y, S). *Alors, si le système* (X, T) *est ergodique, il est isomorphe au produit direct des systèmes* (Y, S) et (G, τ).

Démonstration. — La démonstration du théorème résulte du lemme suivant qui permet d'envisager ces extensions comme des produits semi-directs du type précédent, et l'application du théorème 4 donne le résultat.

LEMME 6. — *Si* (X, T) *est une extension libre de type* (G, τ) *d'un système* (Y, S) *alors le système* (X, T) *est isomorphe au produit semi-direct de base* (Y, S) *et de fibre* $(G, \tau+f(y))$, *où* f *est une application mesurable de* Y *dans* G.

Démonstration. — Dans [3], il est prouvé que les espaces de mesure X et $(X/G \times G)$ sont isomorphes. Pour cela, à l'aide d'un théorème de Roklin concernant les applications multiformes sur un espace de Lebesgue, on montre que la projection π de X sur X/G admet une section mesurable $\tilde{s}$.; c'est-à-dire qu'il existe une application mesurable $\tilde{s}$ de X/G dans X, et l'isomorphisme de X et $(X/G \times G)$ est alors donné par l'application

$$\Phi(\tilde{x}, g) = g\tilde{s}(\tilde{x}); \qquad x \in X/G, \quad g \in G.$$

Les espaces X/G et Y étant isomorphes, on en déduit une application mesurable s de Y dans X, et les espaces de mesure X et $(Y \times G)$ sont conjugués par l'application φ telle que

$$\varphi(y, g) = g.s(y).$$

Dans cet isomorphisme, l'application T est conjuguée à l'application $\overline{T} = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$, soit

$$\overline{T}(y, g) = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi(y, g) = \varphi^{-1} \circ T(gs(y)).$$

Et comme l'action de G τ-commute avec T, on a

$$\overline{T}(y, g) = \varphi^{-1}(\tau(g).T(s(y)).$$

Or l'élément $T(s(y))$ appartient à l'orbite sous G de l'élément $s(S_{(y)})$, donc l'action de G étant libre, il existe un élément g_y unique de G tel que

$$T(s(y)) = g_y.s(S_{(y)})$$

d'où

$$\overline{T}(y, g) = \varphi^{-1}(\tau(g)g_y.s(S_{(y)}).$$

et par définition de φ, on obtient

$$\overline{T}(y, g) = (S_{(y)}, \tau(g)+g_{(y)}).$$

Les applications T, S, s étant mesurables, l'application qui à y de Y associe g_y de G est aussi mesurable, notons f cette application, on obtient le résultat annoncé

$$\overline{T}(y, g) = (S_{(y)}, \tau(g)+f(y)).$$

4. **Applications aux automorphismes des nilvariétés**

Dans ce paragraphe, N désigne un groupe de Lie nilpotent localement compact, connexe et simplement connexe, de série centrale descendante.

$$N \supset N^1 = [N, N] \supset \ldots \supset N^k = [N^{k-1}, N] \supset N^{k+1} = e.$$

Les algèbres de Lie ou les espaces tangents à l'identité de N, N^l, seront notés respectivement N_e, N_e^l.

Si D est un sous-groupe discret, à quotient compact (uniforme) de N, la variété compacte $X = N/D$ est dite une nilvariété.

Les groupes nilpotents et les groupes discrets étant unimodulaires la mesure de Haar sur N induit une unique mesure μ sur l'espace homogène $X = N/D$, invariante à gauche par l'action de N.

Un automorphisme A du groupe N, qui préserve le sous-groupe D, $AD = D$, induit sur $X = N/D$ une transformation mesurable, bijective, préservant la mesure μ, notée également A, et que l'on appelle automorphisme de la nilvariété X.

L'application exponentielle entre le groupe N et l'algèbre de Lie N_e permet de caractériser l'automorphisme A de N par un automorphisme dA_e de l'algèbre de Lie N_e.

L'espace $N^1 D/N^1$ est un sous-groupe normal, discret et uniforme du groupe abélien N/N^1, si bien que la variété $X_1 = N/N^1 D$ est un tore facteur de la nilvariété X, et l'automorphisme A induit un automorphisme facteur A_1 sur X_1 auquel correspond une application linéaire $dA_{1,e}$ sur l'algèbre de Lie commutative N_e/N_e^1.

De nombreuses propriétés du système dynamique (X, A) ont été étudiées en théorie ergodique.

W. PARRY [8] a montré que l'automorphisme était ergodique et un K-système si, et seulement si, l'automorphisme facteur A_1 sur le tore maximal X_1 était ergodique; ce qui revient à dire que l'application linéaire $dA_{1,e}$ de N_e/N_e^1 n'admet aucune valeur propre racine de l'unité.

Lorsque l'application dA_e sur N_e n'admet aucune valeur propre de module 1, l'automorphisme A de X est un difféomorphisme d'Anosov, et il s'ensuit d'un résultat d'AZENCOTT [2] que le système (X, A) est un schéma de Bernoulli.

Nous allons étendre ce résultat au cas d'un automorphisme A ergodique pour lequel l'application dA_e admet des valeurs propres de module 1 non racines de l'unité. Auparavant, nous allons prouver à l'aide de l'exemple suivant que de tels automorphismes existent.

Soit N le groupe de Lie nilpotent localement compact, de dimension 6, formé par l'ensemble des matrices du type

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (x_i \in R).$$

Soit D le sous-groupe discret uniforme formé par l'ensemble des matrices ci-dessus à coefficients x_i entiers.

Pour déterminer des automorphismes de la nilvariété N/D, il est plus aisé de travailler dans l'algèbre de Lie N_e, formée par l'ensemble des matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (a_i \in R).$$

Cette algèbre de Lie est engendrée par les six matrices X_i pour lesquelles $a_i = 1$ et $a_j = 0$ pour $j \neq i$.

On vérifie aisément qur tous les crochets de Lie sont nuls sauf

$$[X_2, X_3] = X_5, \qquad [X_2, X_4] = X_6.$$

La série centrale descendante de l'algèbre est donnée par

$$N_e \supset N_e^1 = \{X_5, X_6\} \supset N_e^2 = \{0\}.$$

Soit la matrice (6×6)

$$dA_e = \left[\begin{array}{cccc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 & & \\ 2 & -1 & 5 & 0 & & \\ 2 & -1 & -7 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & \\ \hdashline \times & \times & \times & \times & -2 & 1 \\ \times & \times & \times & \times & 1 & -1 \end{array}\right],$$

où les croix représentent des coefficients entiers arbitraires. Comme

$$dA_e(X_5) = [dA_e(X_2),\, dA_e(X_3)],$$
$$dA_e(X_6) = [dA_e(X_2),\, dA_e(X_4)],$$

la matrice dA_e définit un automorphisme de l'algèbre de Lie. Cette matrice étant à coefficients entiers et de déterminant égal à 1, l'automorphisme A, associé sur le groupe N, préserve strictement le sous-groupe D, et définit un automorphisme A de la nilvariété N/D.

Les valeurs propres de la matrice dA_e sont les zéros du polynôme

$$P(x) = (x^4+8x^3+10x^2+8x+1)(x^2+3x+1)$$

Ce polynôme admet deux zéros α et $\bar{\alpha}$ de module 1, donnés par

$$\alpha = \frac{-(4-\sqrt{6})+i\sqrt{2(4\sqrt{6}-9)}}{2},$$

et quatre zéros λ, $1/\lambda$, λ', $1/\lambda'$, de module différent de 1, et donnés par

$$\lambda = \frac{-(4+\sqrt{6})-\sqrt{2(4\sqrt{6}+9)}}{2},$$

$$\lambda' = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Le polynôme $P(x)$ étant à coefficients dans le corps Q des rationnels, si les scalaires α et $\bar{\alpha}$ étaient des racines de l'unité, il existerait un entier positif n pour lequel les polynômes $P(x)$ et x^n-1 admettraient un P. G. C. D. de degré 2 et à coefficients rationnels. Or étant donné la nature des zéros de $P(x)$, il est facile de vérifier que ce polynôme $P(x)$ n'admet aucun facteur de ce type en dehors de (x^2+3x+1), qui ne peut convenir car ses zéros ne sont pas racines de l'unité. Nous avons ainsi construit un exemple d'automorphismes ergodiques de nilvariété, dont la différentielle admet des valeurs propres de module 1, qui ne sont pas racines de l'unité, et pour lesquelles le théorème suivant s'applique.

THÉORÈME 6. — *Soit A un automorphisme d'une nilvariété $X = N/D$. Si la différentielle dA_e n'admet aucune valeur propre racine de l'unité, le système (X, A) est un schéma de Bernoulli.*

Démonstration. — Soit

$$N \supset N^1 \supset \ldots \supset N^l \supset N^{l+1} \ldots \supset N^k \supset N^{k+1} = e$$

la série centrale descendante du groupe nilpotent N. Le sous-groupe fermé $N^{l+1} D$ est normal dans $N^l D$, et le groupe quotient

$$G_l = \frac{N^l D}{N^{l+1} D}$$

est un groupe compact abélien, donc un tore qui agit librement et continûment sur la nilvariété $X_{l+1} = N/N_{l+1} D$. L'action de G_l sur X_{l+1} se traduit par l'application de $(X_{l+1} \times G)$ dans X_{l+1} définie par

$$x_{l+1}^{l+} = x N^{l+1} D, \qquad g = x_l N^{l+1} D \to g . x_{l+1} = x_l x N^{l+1} D.$$

L'espace des orbites associé est la nilvariété $X_l = N/N^l D$.

En raison de l'invariance stricte des sous-groupes N^l et D, l'automorphisme A induit des automorphismes A_l sur les nilvariétés X_l, et des automorphismes τ_l sur les tores G_l.

Les relations

$$A_{l+1}(g x_{l+1}) = A(x_l x N^{l+1} D) = A x_l A x N^{l+1} D = \tau_l(g) . A_{l+1}(x).$$

montrent que le système (X_{l+1}, A_{l+1}) est une extension libre de type (G_l, τ_l) du système (X_l, A_l).

Par conséquent, on peut considérer le système (X, A) comme le résultat d'une suite de k extensions de type (G, τ) à partir du système (X_1, A_1), où τ est un automorphisme du tore G.

La différentielle dA_e n'admettant aucune valeur propre racine de l'unité, il en est de même des différentielles des automorphismes A_l et τ_l. L'application répétér du théorème 5 montre que le système (X, A) est isomorphe au système produit

$$(X_1, A_1) \times (G_1, \tau_1) \times \ldots \times (G_k, \tau_k).$$

Chacun de ses systèmes étant un schéma de Bernoulli, on sait qu'il en est de même de leur produit.

Remarque. — Lorsque l'application dA_e admet des valeurs propres racines de l'unité, qui sont valeurs propres des automorphismes τ_k et non de dA_1, on sait [8] que les systèmes (X, A) sont des K-systèmes, et un problème intéressant serait de déterminer si ce sont ou non des schémas de Bernoulli. Signalons dans cette direction que R. L. ADLER et P. C. SHIELDS [13] ont obtenu une condition suffisante pour qu'un produit semi-direct d'un schéma de Bernoulli par des rotations soit un schéma de Bernoulli.

5. Application aux transformations affines ergodiques des tores

Une transformation affine $T = R_a \circ A$ sur le tore $X = R^n/Z^n$ est composée d'un automorphisme algébrique A et d'une translation R_a de vecteur a de X.

L'automorphisme A se relève d'une manière unique en une transformation linéaire de R^n qui préserve Z^n, donc telle que sa matrice A sur la base canonique de R^n soit unimodulaire et à coefficients entiers. Comme ces transformations affines préservent la mesure de Haar sur le tore, on a un exemple simple de système dynamique (X, T) dont les propriétés ergodiques ont été caractérisées par F. J. HAHN [4].

1° Si la matrice A n'admet pas des valeurs propres racines de l'unité, alors la transformation affine $T = R_a \circ A$ est mélangeante pour tout a de X.

2° Si la matrice A n'admet que $\lambda = 1$ comme valeur propre racine de l'unité, et si le sous-groupe fermé engendré par $(A-I)X$ et a est égal à X, alors la transformation $T = R_a \circ A$ est ergodique et non mélangeante.

3° Si la matrice A admet des racines de l'unité différentes de 1 comme valeurs propres, alors la transformation $T = R_a \circ A$ n'est jamais ergodique.

LEMME 7 (CONZE [3]). — *Si $T = R_a \circ A$ est une transformation affine du groupe compact X, la partition de Pinsker du système (X, T) est une partition de X en classe modulo un sous groupe H de X, normal, fermé, et invariant par A. La restriction de A à H est un automorphisme ergodique.*

On rappelle qu'un système vérifie la propriété de Pinsker forte s'il se décompose en le produit d'un système d'entropie nulle et d'un schéma de Bernoulli.

THÉORÈME 7. — *Soit $T = R_a \circ A$ une transformation affine ergodique du tore X. Alors le système (X, T) vérifie la propriété de Pinsker forte.*

Démonstration. — D'après le lemme 7, la partition de Pinsker du système (X, T) est une partition en classe modulo un sous-groupe H fermé et invariant par A. Ce sous-groupe agit continûment et librement sur X, et l'espace des orbites est le groupe quotient X/H qui est également un tore, car le sous-groupe H est fermé dans X. De plus, pour tout x de X et tout h de H, on a

$$T(h+x) = A\,h + A\,x + a = (A/H)\,h + Tx,$$

donc le système (X, T) est une extension libre de type $(H, A/H)$ du système $(X/H, T_{X/H})$.

Comme la restriction A/H est un automorphisme ergodique du tore H, le théorème 5 montre que le système (X, T) est isomorphe au produit des systèmes $(X/H\ T_{X/H})$ et $(H, A/H)$. Le facteur $(X/H, T_{X/H})$ est par construction le facteur de Pinsker, et le système $(H, A/H)$ est un schéma de Bernoulli.

COROLLAIRE. — *Les transformations affines mélangeantes des tores sont des schémas de Bernoulli.*

Démonstration. — En effet, dans ce cas, l'automorphisme A est ergodique. Sur tout facteur du type X/H l'automorphisme A est aussi ergodique, et la transformation T est un K-système si bien que la tribu de Pinsker est triviale.

Remarques.

1° En fait, le corollaire 1 découle simplement du théorème de Katznelson [5] en remarquant que si l'automorphisme A est ergodique, alors les transformations $R_a \circ A$ et A sont conjuguées par la translation R_b, où b est l'unique solution de l'équation $(A - I)\,b = a$.

2° Du point de vue spectral, le facteur de Pinsker d'entropie nulle, est un système à spectre quasi discret d'après les résultats de Parry.

3° Par un raisonnement purement algèbrique, on peut montrer qu'étant donnée une transformation affine T ergodique du tore X, le système (X, T)

est un facteur d'un système formé par le produit d'une transformation affine mélangeante sur un tore et d'une transformation affine ergodique d'entropie nulle. Et le résultat de [12] permet alors de retrouver le théorème 7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABRAMOV (L. M.) and ROKHLIN (V. A.). — The entropy of a skew product of measure-preserving transformations, *Amer. math. Soc. Transl.*, Series 2, t. 48, 1965, p. 255-265; et [en russe] *Vestnik Leningr. Univ.*, t. 17, 1962, n° 7, p. 5-13.

[2] AZENCOTT (R.). — Difféomorphismes d'Anosov et schémas de Bernoulli, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, série A, 1970, p. 1105-1107.

[3] CONZE (J.-P.). — *Propriétés ergodiques des extensions de systèmes dynamiques par des groupes compacts*, Thèse Sc. math., Univ. Paris VI, 1971.

[4] HAHN (F. J.). — On affine transformations of compact abélian groups, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 428-446.

[5] KATZNELSON (Y.). — Ergodic automorphisms of T^n are Bernoulli shifts, *Israel. J. Math.*, t. 10, 1970, p. 186-195.

[6] ORNSTEIN (D. S.). — Bernoulli schift with the same entropy are isomorphic, *Advances in Math.*, t. 4, 1970, p. 337-352.

[7] ORNSTEIN (D. S.). — Imbedding Bernoulli shifts in flows "*Contributions to ergodic theory and probability*", p. 178-218. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 160).

[8] PARRY (W.). — Ergodic properties of affine transformations and flows and nilmanifolds, *Amer. J. Math.*, t. 91, 1969, p. 757-771.

[9] ROKHLIN (V. A.). — Lectures on the entropy theory, *Russian. Math. Surveys*, t. 22, n° 5, 1967, p. 1-52.

[10] THOUVENOT (J.-P.). — Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli, *Israel J. Math.* (à paraître).

[11] THOUVENOT (J.-P.). — Remarques sur les systèmes dynamiques donnés avec plusieurs facteurs. *Israel. J. Math.* (à paraître).

[12] THOUVENOT (J.-P.). — Une classe de systèmes pour laquelle la conjecture de Pinsker est vraie, *Israel. J. Math.* (à paraître).

[13] SHIELDS (P. C.) and ADLER (R. L.). — *Skew products of Bernoulli shifts with rotations*, II (à paraître).

[14] SHIELDS (P. C.). — Discussion Professor Ornsteins's paper, *Annals of Probab.*, t. 1, 1973, p. 59.

(Texte reçu le 21 janvier 1975.)

Jean-Claude MARCUARD,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
21000 Dijon.