BULLETIN DE LA S. M. F.

DAVID A. EDWARDS

Systèmes projectifs d'ensembles convexes compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 225-240
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__225_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 225-240.

SYSTÈMES PROJECTIFS D'ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS (*)

par

DAVID A. EDWARDS

[Oxford]

RÉSUMÉ. — Nous considérons d'abord des systèmes projectifs généraux de convexes compacts. On montre que, pour une mesure maximale quelconque sur la limite d'un tel système, on peut donner une formule qui représente toute image de cette mesure, par une projection canonique du système, au moyen de mesures maximales portées par les ensembles du système. Cela nous permet de traiter d'une façon unifiée les limites des systèmes de simplexes et de L-boules. Finalement, on montre que tout simplexe métrisable se représente comme intersestion d'une suite décroissante de simplexes de Bauer.

1. Introduction

La théorie générale des systèmes projectifs d'ensembles convexes compacts a été étudiée par CHOQUET ([2], [3]), et le cas particulier des systèmes de simplexes C de Choquet) a été étudié par DAVIES et VINCENT-SMITH [4], et (sous une forme plus restreinte) par JELLETT [5]. Ce travail est une contribution à la théorie générale; nous y étudions particulièrement le cas de l'intersection d'une famille filtrante décroissante de simplexes.

Après quelques généralités, nous obtenons un résultat général (th. 2) concernant les mesures maximales sur la limite d'un système projectif quelconque de convexes compacts. Ce théorème nous permet de traiter d'une façon assez unifiée des systèmes de simplexes et des systèmes de L-boules (déf., § 2). Nous obtenons en outre comme corollaire un résultat de Choquet concernant les points extrémaux de la limite.

(*) Un résumé des principaux résultats de ce travail a déjà été publié ; *voir :* EDWARDS (D. A.). — Suites décroissantes de simplexes, *Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse*, 13[e] année, 1973-1974, n° 16, 3 p.

Ensuite, nous examinons brièvement le cas particulier de l'intersection d'une famille décroissante de polyèdres convexes dans un espace vectoriel de dimension finie. Nous remarquons en passant une propriété (cor. 7) des simplexes qui a été utilisée récemment par KINGMAN [6] dans l'étude d'une classe des processus stochastiques.

Finalement, nous étudions le cas des *suites* décroissantes de simplexes en dimension infinie, dont l'importance a été mise en évidence d'une manière explicite par PRESTON [10], entre autres. Nous montrons que, pour de telles suites, les bonnes propriétés des éléments ne se transmettent pas nécessairement à la limite. D'une façon plus précise, nous montrons que n'importe quel simplexe métrisable peut être représenté comme intersection d'une suite décroissante de simplexes de Bauer.

Ce travail a bénéficié de l'hospitalité que j'ai reçue comme visiteur à l'Équipe d'Analyse de l'Université de Paris VI, et à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, à Bures-sur-Yvette.

2. **Définitions et notations**

Nous désignerons par *ensemble convexe compact* un sous-ensemble convexe compact X d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. En général, l'espace vectoriel dépendra de X. Nous nous servirons de la théorie générale de convexes compacts exposée dans [3] et [1], mais nous tâcherons de donner des références précises pour la plupart des résultats dont nous aurons besoin.

Étant donné un espace compact Ω, nous notons $\mathscr{C}(\Omega)$, $\mathscr{M}(\Omega)$, $\mathscr{M}_1^+(\Omega)$ respectivement, l'espace de fonctions réelles continues sur Ω, l'espace de mesures (réelles) de Radon sur Ω, et l'espace de mesures de probabilité qui sont des éléments de $\mathscr{M}(\Omega)$. Sans indication du contraire, la topologie de $\mathscr{M}(\Omega)$ sera la topologie vague $\sigma(\mathscr{M}(\Omega), \mathscr{C}(\Omega))$. Pour X un convexe compact, notons par $\prec$ l'ordre « de balayage » (*voir* [1], [3]) dans $\mathscr{M}_1^+(X)$. Nous notons $\mathscr{Z}(X)$ l'ensemble de tous les éléments maximaux de $\mathscr{M}_1^+(X)$, et nous écrivons, pour tout $\mu \in \mathscr{M}_1^+(X)$,

$$\mathscr{Z}_\mu(X) = \{\nu \in \mathscr{Z}(X);\ \nu \succ \mu\}.$$

Au lieu de $\mathscr{Z}_{\varepsilon_x}(X)$ nous écrivons simplement $\mathscr{Z}_x(X)$. Nous notons $\mathscr{E}(X)$ l'ensemble de tous les points extrémaux de X, tandis que $\mathscr{A}(X)$ (resp. $\mathscr{K}(X)$) sera l'espace de tous les éléments de $\mathscr{C}(X)$ qui sont affines (resp. convexes).

Un *simplexe* sera toujours un simplexe de Choquet (*voir* par exemple § II.3 de [1]). Une notion très proche de celle d'un simplexe est la notion de L-boule. Soit X un convexe compact symétrique non vide. Nous dirons que X est une *L-boule* s'il est linéairement homéomorphe à la boule unité (munie de la topologie vague) d'un espace de type L^1 dual. LAZAR [7] a caractérisé de plusieurs façons les L-boules parmis les convexes compacts symétriques; nous nous servirons d'un de ses résultats. Pour chaque fonction réelle f sur X, nous écrivons

$$(\sigma f)(x) = f(-x) \qquad (x \in X),$$

et lorsque $\mu \in \mathscr{M}(X)$, on définit une mesure odd $\mu \in \mathscr{M}(X)$ de la façon suivante :

$$(\operatorname{odd}\mu)(f) = \frac{1}{2}(\mu(f) - \mu(\sigma f)) \qquad (f \in \mathscr{C}(X)).$$

Le résultat suivant est de LAZAR [7] : *Un convexe compact symétrique non vide est une L-boule si, et seulement si,* odd μ_1 = odd μ_2 *chaque fois que* μ_1, μ_2 *sont deux éléments de* $\mathscr{L}(X)$ *avec le même barycentre.*

On appelle *système projectif* de convexes compacts une famille $(X_i)_{i \in I}$ de convexes compacts, où I est un ensemble ordonné filtrant croissant, avec un système d'applications affines continues $\Phi_{ij} : X_i \to X_j$, définies pour chaque $(i, j) \in I^2$ tel que $i \geqslant j$, et tel que

(i) $\Phi_{ii} = 1_{X_i}$ pour chaque $i \in I$,

(ii) $\Phi_{jk} \circ \Phi_{ij} = \Phi_{ik}$ chaque fois que $i \geqslant j \geqslant k$.

Par abus de notation, nous notons simplement $(X_i, \Phi_{ij})_{i, j \in I}$ ce système projectif. Pour la théorie générale de tels systèmes, on peut voir CHOQUET [2], et le volume 2 de [3]. La limite X du système $(X_i, \Phi_{ij})_{i, j \in I}$ possède une structure naturelle de convexe compact, et les applications induites $\Phi_i : X \to X_i$ (qui s'appellent *projections naturelles*) sont affines et continues.

3. Systèmes projectifs et mesures maximales

Nous conservons la notation de la fin de paragraphe 2. Nous pouvons nous permettre, sans risque de confusion, d'écrire Φ_{ij} et Φ_i respectivement, pour les applications induites $\mathscr{M}_1^+(X_i) \to \mathscr{M}_1^+(X_j)$ et $\mathscr{M}_1^+(X) \to \mathscr{M}_1^+(X_i)$. Elles sont affines continues, et $(\mathscr{M}_1^+(X_i), \Phi_{ij})_{i, j \in I}$ est un système projectif de convexes compacts.

LEMME 1. — *La limite du système projectif* $(\mathscr{M}_1^+(X_i), \Phi_{ij})_{i,j\in I}$ *s'identifie canoniquement à* $\mathscr{M}_1^+(X)$, *avec les applications* $\Phi_i : \mathscr{M}_1^+(X) \to \mathscr{M}_1^+(X_i)$ *comme projections naturelles.*

Soit Ω la limite du système $(\mathscr{M}_1^+(X_i), \Phi_{ij})$, et soit, pour tout $i \in I$, ψ_i la projection naturelle de Ω dans $\mathscr{M}_1^+(X_i)$. Rappelons qu'un point de Ω est une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que

(i) $$\mu_i \in \mathscr{M}_1^+(X_i) \text{ pour tout } i \in I,$$

(ii) $$\Phi_{ij}(\mu_i) = \mu_j \text{ pour tout couple } (i, j) \text{ avec } i \geqslant j.$$

Rappelons en outre que ψ_i est simplement l'application $(\mu_j)_{j\in J} \mapsto \mu_i$.

Pour toute $\mu \in \mathscr{M}_1^+(X)$, la famille $(\Phi_i(\mu))_{i\in I}$ est un point de Ω; notons ce point $\Phi(\mu)$. Montrons que l'application $\Phi : \mathscr{M}_1^+(X) \to \Omega$, est une injection. Supposons en effet que $\mu, \nu \in \mathscr{M}_1^+(X)$ avec $\mu \neq \nu$. Remarquons que, d'après le théorème de Weierstrass-Stone, la réunion

$$A = \bigcup_{i\in I}\{\Phi_i^* f ; f \in \mathscr{C}(X_i)\},$$

où $\Phi_i^* f \equiv f \circ \Phi_i$, est une sous-algèbre dense de $\mathscr{C}(X)$. Par conséquent, on peut choisir i dans I et f dans $\mathscr{C}(X_i)$ de telle façon que $\mu(\Phi_i^* f) \neq \nu(\Phi_i^* f)$. Cela donne $\Phi_i(\mu) \neq \Phi_i(\nu)$, donc $\Phi(\mu) \neq \Phi(\nu)$.

Mais l'application Φ est aussi une surjection. Supposons en effet que $(\mu_i)_{i\in I}$ est un point quelconque de Ω. Pour tous $i \in I$ et $f \in \mathscr{C}(X_i)$, notons $\mu(\Phi_i^* f) = \mu_i(f)$. Il est facile de voir que nous obtenons ainsi une fonctionnelle linéaire, bien définie, continue μ sur A. Parce que A est dense dans $\mathscr{C}(X)$, nous pouvons identifier μ avec un élément de $\mathscr{M}(X)$. Nous voyons en fait que $\mu \in \mathscr{M}_1^+(X)$, et que $\mu_i = \Phi_i(\mu)$ pour tout i, donc $(\mu_i)_{i\in I} = \Phi(\mu)$.

L'application $\Phi : \mathscr{M}_1^+(X) \to \Omega$ est donc bijective. Elle est aussi évidemment affine continue, donc elle est homéomorphisme. Finalement, on voit que, pour tout $i \in I$, on a $\psi_i \circ \Phi = \Phi_i$. Ainsi la démonstration s'achève.

THÉORÈME 2. — *Supposons que la mesure* $\mu \in \mathscr{Z}(X)$, *et que* $i \in I$, *et soit* U *un voisinage dans* $\mathscr{M}_1^+(X_i)$ *de la mesure* $\Phi_i(\mu)$. *Alors il existe* $n_0 \in I$, *avec* $n_0 \geqslant i$, *tel que*

$$\Phi_{ni}(\mathscr{Z}_{\Phi_n(\mu)}(X_n)) \subseteq U \quad \textit{pour tout } n \geqslant n_0.$$

Autrement dit, si on choisit, pour tout $n \geqslant i$, un élément ν_n de $\mathscr{Z}(X_n)$ avec $\nu_n \succ \Phi_n(\mu)$, alors $\Phi_{ni}(\nu_n) \to \Phi_i(\mu)$ lorsque $n \to \infty$.

Pour la démonstration, il suffit de considérer un voisinage U de $\Phi_i(\mu)$ de la forme

$$U = \{\nu \in \mathscr{M}_1^+(X_i);\ \nu(f) < 0\},$$

où $f \in \mathscr{C}(X_i)$ et, bien entendu, $\mu(\Phi_i^* f) < 0$. En effet, n'importe quel voisinage de $\Phi_i(\mu)$ dans $\mathscr{M}_1^+(X_i)$ contient une intersection finie de voisinages de ce type. Parce que $\mu \in \mathscr{Z}(X)$, on peut choisir (§ I.4 de [1]) un élément h de $-\mathscr{H}(X)$ tel que

(i) $$h > \Phi_i^* {}_J,$$

et

(ii) $$\mu(h) < 0$$

Mais (p. 3 de [1]), l'ensemble

$$\bigcup \{\Phi_k^* g\,;\ g \in \mathscr{H}(X_k),\ k \in I,\ k \geqslant i\}$$

est dense dans $\mathscr{H}(X)$. Donc on peut supposer que h est de la forme $h = \Phi_k^* g$ avec $k \geqslant i$ et $g \in -\mathscr{H}(X_k)$. Maintenant, notons

$$F = \{\nu \in \mathscr{M}_1^+(X);\ \nu(\Phi_k^* g) \leqslant 0\}$$

et, pour tout $n \geqslant k$,

$$F_n = \{\nu \in \mathscr{M}_1^+(X_n);\ \nu(\Phi_{nk}^* g) \leqslant 0\}.$$

En utilisant le lemme 1, on voit que le système

$$\{(F_n, \Phi_{nm} | F_n);\ n, m \in I,\ n \geqslant m \geqslant k\}$$

est projectif dont la limite est F.
Il en résulte que

(1) $$\bigcap\nolimits_{n \in I,\, n \geqslant k} \Phi_{nk}(F) = \Phi_k(F).$$

Remarquons que F est un voisinage fermé de μ dans $\mathscr{M}_1^+(X)$, et aussi que $\Phi_i(F) \subseteq U$. Autrement dit $\Phi_{ki}(\Phi_k(F)) \subseteq U$, donc

(2) $$\Phi_k(F) \subseteq \Phi_{ki}^{-1}(U).$$

Puisque l'application $n \mapsto \Phi_{nk}(F_n)$ est décroissante, (1) et (2) impliquent l'existence d'un élément n_0 de I, avec $n_0 \geqslant k$, tel que

(3) $$\Phi_{nk}(F_n) \subseteq \Phi_{ki}^{-1}(U) \quad \text{pour tout } n \geqslant n_0.$$

Supposons maintenant que $\nu \in \mathscr{M}_1^+(X_n)$ pour un certain $n \geqslant k$, et $\nu \succ \Phi_n(\mu)$. Puisque $g \in -\mathscr{K}(X_k)$, on a $\Phi_{nk}^* g \in -\mathscr{K}(X_n)$, d'où

$$\nu(\Phi_{nk}^* g) \leqslant \langle \Phi_n \mu, \Phi_{nk}^* g \rangle = \mu(\Phi_k^* g) < 0,$$

donc $\nu \in F_n$. Par conséquent,

$$\mathscr{Z}_{\Phi_n(\mu)}(X_n) \subseteq F_n.$$

Cette inclusion donne, compte tenu de (3),

$$\Phi_{nk}(\mathscr{Z}_{\Phi_n(\mu)}(X_n)) \subseteq \Phi_{ki}^{-1}(U) \quad \text{pour tout } n \geqslant n_0.$$

En utilisant l'application Φ_{ki}, on voit ainsi que

$$\Phi_{ni}(\mathscr{Z}_{\Phi_n(\mu)}(X_n)) \subseteq U \quad \text{pour tout } n \geqslant n_0.$$

COROLLAIRE 3 (CHOQUET [2]). — *Supposons que $i \in I$, $x \in \mathscr{E}(X)$, et soit V un voisinage de $\Phi_i(x)$ dans X_i. Alors il existe $n_0 \in I$, avec $n_0 \geqslant i$, tel que*

$$\Phi_{ni}(\mathscr{E}(X_n)) \cap V \neq \varnothing \quad \textit{pour tout } n \geqslant n_0. \tag{4}$$

Pour la démonstration, soit f un élément de $\mathscr{C}(X_i)$ tel que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(\Phi_i(x)) = 1$, et $\operatorname{supp} f \subseteq V$. Pour tout $n \geqslant i$, choisissons $\nu_n \in \mathscr{Z}_{\Phi_n(x)}(X_n)$, et notons $f_n = \Phi_{ni}^* f$. Alors le théorème 2 donne $\nu_n(f_n) \to f(\Phi_i(x)) = 1$ lorsque $n \to \infty$. Mais si nous notons, pour $n \geqslant i$, $y \in X_n$,

$$g_n(y) = \sup\{ l(y);\ l \in \mathscr{A}(X_n),\ l \leqslant f \},$$

alors $\nu_n(f_n) = \nu_n(g_n)$ pour tout $n \geqslant i$ (*voir* § I.4 de [1]). Si la condition (4) n'est pas vérifiée pour un certain n de I tel que $n \geqslant i$, alors f_n est nulle sur $\mathscr{E}(X_n)$, donc g_n est nulle dans X_n. Donc on a, pour cet n, $\nu_n(f_n) = \nu_n(g_n) = \nu_n(0) = 0$. Mais on a montré que $\nu_n(f_n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$, donc (4) doit être vrai pour n suffisamment grand.

COROLLAIRE 4 (DAVIES et VINCENT-SMITH [4]). — *Soit $(X_i, \Phi_{ij})_{i, j \in I}$ un système projectif de simplexes. Alors la limite X du système est également un simplexe.*

Supposons que $x \in X$ et que $\mu \in \mathscr{Z}_x(X)$. Pour tout $n \in I$, l'ensemble $\mathscr{Z}_{\Phi_n(x)}(X_n)$ contient une seule mesure, soit μ_n. Il est édivent, puisque $\mu \succ \varepsilon_x$, que $\Phi_n(\mu) \succ \Phi_n(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\Phi_n(x)}$. Mais puisque X_n est un simplexe, il en résulte que $\mu_n \succ \Phi_n(\mu)$. Donc le théorème 2 implique que, pour tout $i \in I$, $\Phi_{ni}(\mu_n) \to \Phi_i(\mu)$ lorsque $n \to \infty$. Cela montre que, quel que soit i, $\Phi_i(\mu)$ dépend seulement de x et non du choix de μ (si un tel choix existe). Mais la famille $(\Phi_i(\mu))_{i \in I}$ détermine μ, ainsi μ est uniquement déterminé par x. Donc X est un simplexe.

COROLLAIRE 5. — *Soit $(X_i, \Phi_{ij})_{i, j \in I}$ un système projectif de L-boules tel que toutes les applications Φ_{ij} soient linéaires. Alors la limite X du système est également une L-boule.*

L'ensemble X est convexe compact symétrique non vide. Soit x un élément de X, et soient μ, ν des éléments de $\mathscr{Z}_x(X)$. On montrera que $\operatorname{odd}\mu = \operatorname{odd}\nu$. Pour tout $n \in I$, choisissons μ_n dans $\mathscr{Z}_{\Phi_n(\mu)}(X_n)$ et ν_n dans $\mathscr{Z}_{\Phi_n(\nu)}(X_n)$.

Alors, pour tout $i \in I$, $\Phi_{ni}(\mu_n) \to \Phi_i(\mu)$ lorsque $n \to \infty$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Phi_{ni}(\operatorname{odd}\mu_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{odd}\Phi_{ni}(\mu_n) \\ &= \operatorname{odd}\Phi_i(\mu) = \Phi_i(\operatorname{odd}\mu). \end{aligned}$$

De même, $\Phi_{ni}(\operatorname{odd}\nu_n) \to \Phi_i(\operatorname{odd}\nu)$ lorsque $n \to \infty$. Mais, pour tout n, X_n est une L-boule, et $\Phi_n(x)$ est à la fois le barycentre de μ_n et de ν_n, donc $\operatorname{odd}\mu_n = \operatorname{odd}\nu_n$, d'où

$$\Phi_{ni}(\operatorname{odd}\mu_n) = \Phi_{ni}(\operatorname{odd}\nu_n).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\Phi_i(\operatorname{odd}\mu) = \Phi_i(\operatorname{odd}\nu),$$

pour tout $i \in I$, donc $\operatorname{odd}\mu = \operatorname{odd}\nu$.

Un cas particulier important de la théorie ci-dessus est celui où la famille (X_i) est une famille filtrante décroissante de convexes compacts dans un espace localement convexe E et les applications Φ_{ij} sont les inclusions $X_i \subsetneq X_j$ $(i \geqslant j)$ (PRESTON [10] a mis nettement en évidence l'importance de tels systèmes dans la mécanique statistique). Lorsque, en outre, l'espace E est de dimension finie, nous pouvons dans certains cas obtenir des conclusions plus fortes. Passons à cette situation.

4. Familles décroissantes de polyèdres convexes de dimension finie

Dans un espace euclidien R^d (de dimension finie), nous désignerons par *polyèdre convexe* tout convexe compact X tel que $\mathscr{E}(X)$ soit fini; notons $v(X)$ le nombre d'éléments de $\mathscr{E}(X)$.

PROPOSITION 6. — *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille filtrante décroissante de polyèdres convexes dans* R^d *telle qu'il existe un entier* p *avec* $v(X_i) \leqslant p$ *pour tout* $i \in I$. *Alors* $X \equiv \bigcap \{ X_i ; i \in I \}$ *est un polyèdre, et l'on a* $v(X) \leqslant p$. *Si* $v(X) = p$, *alors il existe* $i_0 \in I$ *tel que* $v(X_i) = p$ *pour tout* $i \geqslant i_0$, *et on peut choisir des étiquettes pour les points extrémaux :*

$$\mathscr{E}(X_i) = \{x^{i1}, x^{i2}, \ldots, x^{ip}\} \qquad (i \geqslant i_0),$$
$$\mathscr{E}(X) = \{x^1, x^2, \ldots . x^p\},$$

de telle façon que, pour chaque $r = 1, 2, \ldots, p$, $x^{ir} \to x^r$ *lorsque* $i \to \infty$.

Le cas où $p = 0$ est trivial. Supposons donc que $p \geqslant 1$. Soient $x^1, x^2, \ldots, x^k$ des points distincts dans $\mathscr{E}(X)$, et choisissons un voisinage V_r de tout x^r de telle façon que $V_1, V_2, \ldots, V_k$ soient des ensembles disjoints. Il existe (cor. 3) un $i_0 \in I$ tel que

$$\mathscr{E}(X_i) \cap V_r \neq \varnothing \quad \text{pour tout } i \geqslant i_0 \text{ et tout } r = 1, 2, \ldots, k.$$

Il en résulte que $k \leqslant v(X_i)$ pour tout $i \geqslant i_0$, donc $v(X) \leqslant v(X_i)$ pour tout $i \geqslant i_0$, d'où $v(X) \leqslant p$. Si $v(X) = p$, alors $v(X_i) = p$ pour tout $i \geqslant i_0$.

Supposons maintenant que $v(X) = p$, et prenons $k = \text{p}$. Notons x^{ir} le (seul) point dans $\mathscr{E}(X_i) \cap V_r$ lorsque $i \geqslant i_0$. On va démontrer que $x^{ir} \to x^r$ lorsque $i \to \infty$. Il suffit de le faire pour $r = 1$. Soit V un voisinage de x^1. Alors (cor. 3), il existe $i_1 \geqslant i_0$ tel que

$$\mathscr{E}(X_i) \cap V_1 \cap V \neq \varnothing \quad \text{pour tout } i \geqslant i_1.$$

Donc $x^{i1} \in V$ pour tout $i \geqslant i_1$, donc $\text{x}^{i1} \to x^1$ lorsque $i \to \infty$.

En utilisant ici les corollaires 4 et 5 nous aboutissons immédiatement au corollaire suivant.

COROLLAIRE 7. — *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille filtrante décroissante de simplexes (resp. L-boules) dans* R^d *telle que l'intérieur de l'intersection*

$$X \equiv \bigcap \{ X_i ; i \in I \}$$

ne soit pas vide. Alors X *et tous les* X_i *sont des simplexes (resp. L-boules) de dimension* d, *et la dernière phrase de la proposition 6 reste vraie avec* $p = d+1$ *(resp.* $2d$*).*

En fait $v(X_i)$ est ici constant partout dans la famille.

Le corollaire 7, dans le cas des simplexes, a été utilisé récemment par KINGMAN [6] dans l'étude de certains processus stochastiques.

Si on omet la condition concernant l'intérieur de X, la dernière partie du corollaire 7 risque de ne pas être vraie. Par exemple, si on prend comme X_n l'enveloppe convexe dans R^2 des points $(\pm 1, 0)$ et $(0, n^{-1})$, alors $(0, n^{-1}) \in \mathscr{E}(X_n)$, mais $(0, 0) = \lim (0, n^{-1})$ n'appartient pas à $\mathscr{E}(X)$. La condition du corollaire 7 concernant l'intérieur de X écarte cette possibilité. Il serait intéressant d'avoir un résultat de la même sorte pour les simplexes de dimension infinie.

5. Suites décroissantes de simplexes de Bauer

Dans le cadre du paragraphe 3, on peut se demander : quelles propriétés des éléments X_i du système projectif $(X_i)_{i \in I}$ se transmettent nécessairement à la limite X ? Nous avons vu (cor. 4 et 5), par exemple, que si chaque X_i est un simplexe (resp. L-boule), alors X est également un simplexe (resp. L-boule). Mais il se peut que certaines propriétés de régularité des ensembles X_i ne se conservent pas en passant à la limite. Dans cette direction un théorème frappant (font nous avons besoin) est le suivant :

THÉORÈME 8 (LAZAR *et* LINDENSTRAUSS [8]). — *Soit Δ un simplexe métrisable de dimension infinie. Alors il existe une suite de surjections affines $\psi_n : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$, où Δ_n est un simplexe de dimension n, pour tout n, telle que Δ soit la limite du système projectif :*

$$\ldots \xrightarrow[\psi_3]{} \Delta_3 \xrightarrow[\psi_2]{} \Delta_2 \xrightarrow[\psi_1]{} \Delta_1 \xrightarrow[\psi_0]{} \Delta_0.$$

Ce résultat montre, par exemple, qu'on peut ainsi fabriquer à partir de bons simplexes un simplexe Δ tel que $\mathscr{E}(\Delta)$ soit dense dans Δ (*voir* [9] pour l'existence d'un tel simplexe). Dans le théorème 8, le système projectif est restreint; en particulier, les applications données sont surjectives. Qu'arrive-t-il lorsque dans un système projectif (X_i, Φ_{ij}) quelconque les (Φ_{ij}) sont injectives? Dans ce cas, on peut également fabriquer des simplexes métrisables quelconques en partant de simplexes assez réguliers.

THÉORÈME 9. — *Soit Δ un simplexe métrisable de dimension infinie. Alors il existe un espace vectoriel topologique localement convexe séparé V tel que*

(i) *il existe dans V un simplexe T qui est affinement homéomorphe à Δ,*

(ii) *il existe dans V une suite décroissante $(T_n)_{n \geq 0}$ de simplexes de Bauer telle que*

$$T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Nous rappelons qu'un *simplexe de Bauer* est un simplexe X tel que $\mathscr{E}(X)$ soit un sous-ensemble fermé de X.

Nous déduirons le théorème 9 du théorème 8 au moyen d'une suite de lemmes.

LEMME 10. — *Soient X, A deux simplexes de dimension finie $n+1$, et soient Y, B deux simplexes de dimension n, tels que B soit une face de A. Supposons que $\Phi : X \to Y$ est une surjection affine, et que $v : Y \to B$ est une bijection affine. Alors il existe une bijection affine $u : X \to A$ et une rétraction affine $\psi : A \to B$ telles que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Soit $\mathscr{E}(Y) = \{ y^0, y^1, \ldots, y^n \}$. Les ensembles $\Phi^{-1}(y^r)$, où $r = 0, 1, ..., n$, sont des faces non vides disjointes de X. En choisissant, pour tout r, un point x^r dans $\mathscr{E}(X) \cap \Phi^{-1}(y^r)$, nous obtenons $n+1$ points $x^0, x^1, \ldots, x^n$ qui sont affinement indépendants. Nous pouvons écrire

$$\mathscr{E}(X) = \{ x^0, x^1, \ldots, x^n, x^{n+1} \}.$$

L'enveloppe convexe de $x^0, x^1, \ldots, x^n$ est une face de Z de X. La restriction de Φ à Z est une bijection $\alpha : Z \to Y$, donc $w = v \circ \alpha$ est une bijection de Z sur B. Donc on peut étendre w à $u : X \to A$ de telle façon que u soit une bijection affine. L'application $\alpha^{-1} \circ \Phi$ est évidemment une rétraction affine de X sur Z. Il existe donc une rétraction ψ de A sur B telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[d, "w"] \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Par conséquent le diagramme de l'énoncé est commutatif.

Nous allons travailler dans l'espace $V = l^1$ des suites réelles absolument sommables

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

avec la norme habituelle :

$$\|x\| = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Pour tout entier $m \geqslant 1$, notons

$$e^m = (\delta_{m1}, \delta_{m2}, \ldots),$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Ecrivons e^0 pour l'élément neutre (zéro) de V. Pour tout entier $m \geqslant 0$, on construit l'enveloppe convexe

$$E_m = \operatorname{conv}\{e^0, e^1, \ldots, e^m\};$$

on note par P_m l'opérateur

$$x \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots)$$

dans V. On pose bien entendu $P_0 = 0$.

LEMME 11. — *Soient X, Y deux simplexes de dimensions finies $n+1$, n respectivement, et soit $\Phi : X \to Y$ une surjection affine. Soit B un simplexe de dimension n qui est contenu dans $c\,E_n$ (où $c > 0$), soit $\gamma : Y \to B$ une bijection affine, et soit* $\varepsilon > 0$. *Alors il existe un simplexe A de dimension $n+1$ qui est contenu dans $(c+\varepsilon)\,E_{n+1}$, et une bijection affine $\delta : X \to A$, tels que :*

(i) *B est une face de A;*

(ii) *$P_n A = B$;*

(iii) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & A \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ Y & \xrightarrow[\gamma]{} & B \end{array}$$

est commutatif, où η est la restriction de P_n à A.

Le lemme 10 nous permet de supposer, pour la démonstration, que Y est une face de X, et que Φ est une rétraction affine de X sur Y. Soit

$$\mathscr{E}(Y) = \{y^1, y^2, \ldots, y^{n+1}\},$$

et soit x^1 le (seul) point de $\mathscr{E}(X)$ en dehors de Y. Alors les points

$$\gamma(y^1),\ \gamma(y^2),\ \ldots,\ \gamma(y^{n+1}),\ \gamma(\Phi(x^1))+\varepsilon e^{n+1}$$

sont affinement, indépendants, et leur enveloppe convexe A est une partie de $(c+\varepsilon) E_{n+1}$. Evidemment,

$$\mathscr{E}(B) = \{\gamma(y^1),\ \gamma(y^2),\ \ldots,\ \gamma(y^{n+1})\},$$

d'où les propriétés (i) et (ii). Sur $\mathscr{E}(X)$, définissons

$$\delta(y^s) = \gamma(y^s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n+1),$$
$$\delta(x^1) = \gamma(\Phi(x^1))+\varepsilon e^{n+1}.$$

On obtient ainsi une bijection $E(X) \to E(A)$ qui s'étend d'une façon unique en une bijection affine de X sur A que nous notons encore δ. La propriété (iii) est évidente.

Supposons maintenant que $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de simplexes de dimension finie dans V telle que

$$(5) \quad \begin{cases} \text{(i)} \quad \text{tout } S_n \text{ est de dimension } n; \\ \text{(ii)} \quad S_n \subseteq E_n \text{ pour tout } n; \\ \text{(iii)} \quad S_n \text{ est une face de } S_m \text{ lorsque } m > n; \\ \text{(iv)} \quad P_n S_m = S_n \text{ lorsque } m > n. \end{cases}$$

Lorsque $m \geqslant n$, soit p_{mn} la restriction de P_n à S_m. Alors $(S_n, p_{mn})_{m, n \geqslant 0}$ est un système projectif. Notons sa limite S, et les projections naturelles $p_n : S \to S_n$. On va montrer que S s'identifie avec un certain sous-ensemble T de V qui est l'intersection d'une suite décroissante de simplexes de Bauer dans V.

Pour tout n, soit

$$F_n = \overline{\operatorname{conv}}\{e^0,\ e^{n+1},\ e^{n+2},\ e^{n+3},\ \ldots\},$$

c'est-à-dire l'enveloppe convexe fermée pour la topologie de la norme. Alors F_n est un simplexe pour la topologie vague $\sigma(l^1, c^0)$ de $V = l^1$, et l'ensemble

$$\mathscr{E}(F_n) = \{e^0,\ e^{n+1},\ e^{n+2},\ e^{n+3},\ \ldots\},$$

est vaguement fermé. Pour tout n, prenons

$$T_n = \operatorname{conv}(S_n \cup F_n).$$

Alors T_n est un simplexe, qui, en outre, est de Bauer, parce que

$$\mathscr{E}(T_n) = \mathscr{E}(S_n) \cup \mathscr{E}(F_n).$$

Puisque

$$\begin{aligned} S_{n+1} \cup F_{n+1} &\subseteq (\operatorname{conv}(S_n \cup \{e^{n+1}\})) \cup F_{n+1}, \\ &\subseteq \operatorname{conv}(S_n \cup F_n), \end{aligned}$$

on voit que $T_{n+1} \subseteq T_n$. Donc, $(T_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de simplexes de Bauer, et nous notons T son intersection. Pour tout n, notons $i_n : S_n \to S_n$ l'application identique, et q_n la restriction de P_n à T. Remarquons que $q_n T = S_n$ pour tout n. En effet, $P_m T_m = S_m$ et, pour tout couple (m, n) tel que $m > n$, on a $P_n = P_n P_m$, donc $P_n T_m = S_n$. Mais $S_n \subseteq T$, donc notre assertion est évidente.

LEMME 12. — *Il existe une bijection affine continue* $\beta : S \to T$ *telle que tous les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "p_n"'] \arrow[d, "\beta"'] & S_n \arrow[d, "i_n"] \\ T \arrow[r, "q_n"'] & S_n \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Ici il s'agit de la topologie vague sur T.

Pour la construction de β, remarquons d'abord qu'un point typique de S est une suite $(x^n)_{n \geq 0}$ de vecteurs $x^n \in V$ telle que $x^n \in S_n$ et $P_n x^{n+1} = x^n$ pour tout n. Pour toute telle suite $(x^n)_{n \geq 0}$, il existe une suite réelle $x = (x_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$\begin{aligned} x^0 &= (0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots), \\ x^1 &= (x_1, 0, 0, \ldots\ldots), \\ x^n &= (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Mais $x^n \in S_n \subseteq E_n$, donc $\sum_{r=1}^{n} |x_r| \leq 1$, pour tout n. Donc $x \in V$ avec $\|x\| \leq 1$. Maintenant il est évident que $x \in T$ et que $q_n x = x^n$ pour tout n. Si on pose $\beta((x^n)) = x$, on obtient une application affine $\beta : S \to T$ telle que les diagrammes du lemme soient commutatifs. Il nous reste à démontrer que β est surjective et continue.

La surjectivité de β est facile à voir, parce que si $x \in T$, et on définit x^n par $x^n = q_n x$, on obtient ainsi une suite $(x^n)_{n \geq 0} \in S$ telle que $\beta((x^n)) = x$.

Pour la continuité de β, remarquons qu'il est équivalent de démontrer la continuité de l'inverse β^{-1}. Choisissons $(y^n) \in S$ et remarquons qu'une base de voisinages dans S du point (y^n) est constituée de toutes les intersections finies d'ensembles de la forme

$$G = \{(x^n) \in S;\ |\sum_{r=1}^{N} (x_r^n - y_r^n)\xi_r| < \varepsilon\},$$

où $\varepsilon > 0$, N est un entier positif, et les ξ_r sont des scalaires. Mais

$$\beta G = \{x \in T;\ |\sum_{r=1}^{N} (x_r - y_r)\xi_r| < \varepsilon\},$$

qui est un voisinage de $y = \beta((y^n))$ dans T pour la topologie $\sigma(V, c_0)$. Par conséquent, β^{-1}, donc β, est continu.

On dit que deux systèmes projectifs de convexes compacts $(X_i, \Phi_{ij})_{i, j \in I}$, $(Y_i, \chi_{ij})_{i, j \in I}$, ayant le même ensemble ordonné d'indices I, sont *équivalents* s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de bijections affines continues, appelées *liaisons*, telle que tous les diagrammes,

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\Phi_{ij}"'] \arrow[d, "\alpha_i"'] & X_j \arrow[d, "\alpha_j"] \\ Y_i \arrow[r, "\chi_{ij}"'] & Y_j \end{tikzcd}$$

où $i, j \in I$ et $i > j$, soient commutatifs. Supposons ces conditions remplies. Notons par X, Y respectivement les limites des deux systèmes, et soient $(\Phi_i)_{i \in I}$, $(\chi_i)_{i \in I}$ les deux familles de projections naturelles.

LEMME 13. — *Il existe une bijection affine continue $\alpha : X \to Y$ telle que tous les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi_i"] \arrow[d, "\alpha"'] & X_i \arrow[d, "\alpha_i"'] \\ Y \arrow[r, "\chi_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Ce résultat est probablement bien connu. En tout cas, nous pouvons le laisser au lecteur comme exercice.

Enfin, nous sommes prêt à démontrer le théorème 9.

Soit Δ un simplexe métrisable de dimension infinie. Il doit être la limite d'un système projectif

$$\ldots \xrightarrow[\psi_3]{} \Delta_3 \xrightarrow[\psi_2]{} \Delta_2 \xrightarrow[\psi_1]{} \Delta_1 \xrightarrow[\psi_0]{} \Delta_0$$

satisfaisant aux conditions du théorème 8. On peut construire un système projectif équivalent

$$\text{(6)} \qquad \xrightarrow[\gamma_3]{} \Gamma_3 \xrightarrow[\gamma_2]{} \Gamma_2 \xrightarrow[\gamma_1]{} \Gamma_1 \xrightarrow[\gamma_0]{} \Gamma_0$$

tel que, pour tout n, Γ_n soit une face de Γ_{n+1}, et γ_n soit une rétraction affine de Γ_{n+1} sur Γ_n. On construit le nouveau système par induction. Notons par $v_n : \Delta_n \to \Gamma_n$ les liaisons (*voir* définition avant le lemme 13) et posons $\Gamma_n = E_n$ pour tout n. Supposons que l'on a construit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Il s'agit de construire une bijection affine $v_{n+1} : \Delta_{n+1} \to \Gamma_{n+1}$ et une surjection affine $\gamma_n : \Gamma_{n+1} \to \Gamma_n$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{n+1} \arrow[r, "\Psi_n"'] \arrow[d, "v_{n+1}"] & \Delta_n \arrow[d, "v_n"] \\
\Gamma_{n+1} \arrow[r, "\gamma_n"'] & \Gamma_n
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour cela, il suffit d'utiliser le lemme 10. Le lemme 13 nous dit que Δ est la limite du système (6).

Pour finir la démonstration, on construit une suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ de simplexes satisfaisant aux conditions (5), et pour tout n une bijection affine $\alpha_n : \Gamma_n \to S_n$ de telle façon que tous les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{n+1} \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"'] & \Gamma_n \arrow[d, "\alpha_n"] \\
S_{n+1} \arrow[r, "\pi_n"'] & S_n
\end{tikzcd}$$

où π_n est la restriction à S_{n+1} de P_n soient commutatifs. En admettant l'existence d'une telle suite, on peut (lemme 13) identifier Δ avec la limite du système $(S_n, p_{mn})_{m, n \geqslant 0}$. Alors l'application du lemme 12 termine la démonstration.

Il ne nous reste plus qu'à construire les suites (S_n) et (α_n). Demandons plus, en exigeant que les S_n satisfassent non seulement aux conditions (5), mais aussi à la condition

$$\text{(8)} \qquad S_n \subseteq (1 - 2^{-n}) E_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Commençons par poser $S_0 = E_0$; alors l'application $\alpha_0 : \Gamma_0 \to S_0$ est parfaitement déterminée. Supposons que nous avons déjà défini $S_0, S_1, \ldots, S_n$ et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ selon nos règles. Pour définir S_{n+1} et α_{n+1}, on utilise le lemme 11 avec $X = \Gamma_{n+1}$, $Y = \Gamma_n$, $\Phi = \gamma_n$, $B = S_n$, $\gamma = \alpha_n$, $c = (1-2^{-n})$, $\varepsilon = 2^{-n-1}$; alors S_{n+1} sera l'ensemble A, et α_{n+1} sera l'application δ. On a $c+\varepsilon = 1-2^{-n-1}$, d'où la relation (8), mais avec $n+1$ au lieu de n. Le diagramme du lemme 11 donne (7), avec de la commutativité, et les conditions (5) sont évidemment satisfaites. Donc les deux suites (S_n) (α_n) existent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (E. M.). — *Compact convex sets and boundary integrals.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Ergebnisse der Mathematik*, 57).

[2] CHOQUET (G.). — Mesures coniques, affines et cylindriques, « *Symposia Mathematica* », vol. 2, p. 145-182. — London, Academic Press, 1969 (*Publicazione dell Istituto nazionale di alta Matematica*).

[3] CHOQUET (G.). — *Lectures on analysis*, Volumes 1, 2 and 3. — New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[4] DAVIES (E. B.) and VINCENT-SMITH (G. F.). — Tensor products, infinite products and projective limits of Choquet simplexes, *Math. Scand.*, Kobenhavn, t. 22, 1968, p. 145-164.

[5] JELLETT (F.). — Homomorphismes and inverse limits of Choquet simplexes, *Math. Z.*, t. 103, 1968, p. 219-226.

[6] KINGMAN (J. F. C.). — *Anticipation processes* (à paraître).

[7] LAZAR (A. J.). — The unit bull in conjugate L_1 spaces, *Duke math. J.*, t. 39, 1972, p. 1-8.

[8] LAZAR (A. J.) and LINDENSTRAUSS (J.). — Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representation matrices, *Acta Math.*, Uppsala, t. 126, 1971, p. 165-193.

[9] POULSEN (E. T.). — A simplex with dense extreme points, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 11, 1961, p. 83-87.

[10] PRESTON (C. J.). — *Specification of random fields* (à paraître).

(Texte reçu le 12 juillet 1974.)

David A. EDWARDS,
Mathematical Institute,
24-29 St-Giles,
Oxford 0X1 3LB,
Grande-Bretagne.