BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Le problème de Lévi pour les espaces homogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 191-201

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__191_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 191-201.

LE PROBLÈME DE LÉVI POUR LES ESPACES HOMOGÈNES

PAR

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

[Nice]

RÉSUMÉ. — On montre que tout ouvert localement pseudoconvexe non compact d'une variété homogène compacte irréductible rationnelle (par exemple grassmanienne ou hyperquadrique) est de Stein et tout ouvert localement pseudoconvexe d'une variété homogène compacte rationnelle est holomorphiquement convexe.

0. Introduction

Les domaines localement pseudoconvexes non compacts au-dessus de l'espace projectif sont de Stein (*cf.* FUJITA [3], TAKEUCHI [12], KISELMAN [7]). En revanche, GRAUERT (*cf.* NARASIMHAN [10]) a donné l'exemple d'un ouvert pseudoconvexe d'un tore qui n'est pas holomorphiquement convexe. Cet ouvert contient des « courbes intérieures » (*cf.* 3.1 infra). On montre dans ce travail qu'un ouvert localement pseudoconvexe d'une variété compacte homogène est de Stein s'il ne contient pas de courbe intégrale intérieure. En particulier, tout ouvert localement pseudoconvexe non compact d'une variété homogène compacte irréductible rationnelle (par exemple grassmannienne ou hyperquadrique) est de Stein, et tout ouvert localement pseudoconvexe d'une variété homogène compacte rationnelle est holomorphiquement convexe.

Ce travail complète un travail antérieur [6]. Il permet aussi de retrouver des résultats de FUJITA [4], MATSUGU [8], BRUN [1].

1. Fonctions plurisousharmoniques

GÉNÉRALITÉS 1.1. — Dans tout ce travail, les variétés sont supposées dénombrables à l'infini. On appelle fonction *strictement plurisousharmonique* (en abrégé spsh) toute fonction qui est localement somme d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ strictement plurisousharmonique et d'une fonction continue plurisousharmonique (en abrégé psh). Si U désigne une variété, on note TU son fibré tangent, et PTU le fibré en espaces projectifs associé.

DÉFINITION 1.2. — Soit (x, δ) un point de PTU, et soit f une fonction continue psh au voisinage de x. On dira que f est *strictement sousharmonique* (en abrégé ssh) en (x, δ) si f est la somme de deux fonctions psh au voisinage de x, dont l'une est $\mathscr{C}^\infty$ et admet une restriction strictement sousharmonique sur tout germe de courbe définissant δ. Si f est continue psh dans U, on notera $S(f)$ l'ensemble des points de PTU, où f est ssh.

PROPOSITION 1.3 :

1° *$S(f)$ est un ouvert de PTU.*

2° *Si $\sum f_i$ est une famille localement uniformément sommable de fonctions continues psh, on a l'inclusion $S(\sum f_i) \supset \bigcup S(f_i)$.*

3° *Si $S(f)$ est égal à PTU, alors f est spsh.*

Démonstration :

1° Cela résulte facilement du cas où f est $\mathscr{C}^\infty$ qui est évident.

2° On veut montrer l'inclusion $S(\sum f_j) \supset S(f_i)$. Comme $(\sum f_j) - f_i$ est psh, on se ramène au cas d'une somme de deux fonctions, cas évident.

3° Le problème étant local, on peut supposer que U est un voisinage de zéro dans $\mathbf{C}^n$. Par hypothèse, pour tout point x de PTU, il existe un réel strictement positif ε_x, tel que $f - \varepsilon_x |z|^2$ soit ssh en x, donc au voisinage de x d'après le 1°. De la compacité de l'espace projectif, il résulte qu'il existe un réel strictement positif ε tel que $f - \varepsilon |z|^2$ soit ssh en tout point se projetant suffisamment près de zéro. Ceci implique que $f - \varepsilon |z|^2$ est psh au voisinage de zéro, donc que f est spsh.

C. Q. F. D.

Notation 1.4. — Si f est continue psh dans U, on note Cf le complémentaire dans PTU de l'ensemble des points (x, δ) tels que f soit $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de x et que la différentielle de f ne s'annule pas sur δ. On note CU l'intersection des ensembles Cf lorsque f décrit l'ensemble des fonctions continues psh dans U.

PROPOSITION 1.5 :

1° *Si U est de Stein, CU est vide.*

2° *Si CU est vide, il existe une fonction strictement positive spsh sur U.*

Démonstration :

1° C'est évident.

2° Soit x dans PTU, et soit f_x telle que Cf_x ne contienne pas x. Un calcul élémentaire permet de voir que $g_x = \exp f_x$ est continue psh dans U et ssh en x, donc au voisinage de x. Lorsque x décrit PTU, les $S(g_x)$ constituent donc un recouvrement ouvert de PTU dont on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable. Soit $(g_i)_{i \in \mathbf{N}}$ la suite correspondante de fonctions. On peut choisir une suite λ_i de scalaires strictement positifs de façon que la série $\sum \lambda_i g_i$ converge uniformément sur les compacts. D'après (1.3), la somme de cette série est spsh.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 1.6. — *Si V est un ouvert de U, on a l'inclusion $CV \subset CU$. S'il existe en outre une fonction φ continue psh, positive propre dans U, et un réel α tels que V soit l'ensemble des points de U où α majore strictement φ, alors on a l'égalité $CV = CU \cap PTV$.*

Démonstration. — L'inclusion est évidente. Soit donc (x, δ) dans $PTV - CV$; il nous faut montrer que (x, δ) n'est pas dans CU. Soit f continue psh dans V telle que (x, δ) soit hors de Cf. Soit β un réel vérifiant l'inégalité $\varphi(x) < \beta < \alpha$. Posons $K = \varphi^{-1}(\beta)$. C'est un compact de V. Soit χ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ convexe croissante vérifiant $\chi(\varphi(x)) < f(x)$ et $\chi(\beta) > \|f\|_K$.

Définissons la fonction θ par

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \sup(f(z), \chi \circ \varphi(z)) && \text{si} \quad \varphi(z) \leqslant \beta, \\ \theta(z) &= \chi \circ \varphi(z) && \text{si} \quad \varphi(z) \geqslant \beta. \end{aligned}$$

Cette fonction est continue psh puisqu'au voisinage de K elle est égale à $\chi \circ \varphi$. Comme au voisinage de x elle est égale à f, (x, δ) est hors de $C\theta$.

C. Q. F. D.

Notation 1.7. — Soit Δ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, et soit $\gamma : \Delta \to U$ une courbe holomorphe lisse dans U. On note $\bar{\gamma}$ l'application naturelle de $PT\Delta = \Delta$ dans PTU.

PROPOSITION 1.8. — *Soit U une variété admettant une fonction $\mathscr{C}^\infty$ psh propre. Soit γ une courbe lisse connexe dans U. Si l'image de $\bar{\gamma}$ est contenue dans CU, celle de γ est relativement compacte.*

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que $\varphi \circ \gamma$ est constant. Or sa différentielle $d\varphi \circ d\gamma$ est identiquement nulle puisque φ est $\mathscr{C}^\infty$ psh.

C. Q. F. D.

2. Variétés pseudoconvexes et infinitésimalement homogènes

Rappels 2.1 (cf. HIRSCHOWITZ [6]). — Une variété infinitésimalement homogène est une variété X munie d'un espace vectoriel E de champs holomorphes qui engendrent l'espace tangent en tout point. Si X est une variété infinitésimalement homogène, il existe une submersion holomorphe e d'un voisinage X^* de $X \times \{0\}$ dans $X \times E$, à valeurs dans X qui induit l'identité sur X, telle que, si p désigne la projection naturelle de X^* sur X, le morphisme $(p, e) : X^* \to X \times X$ soit une submersion. Si U est un domaine localement pseudoconvexe, à fibres finies, de projection relativement compacte, au-dessus de X, alors il existe dans U une fonction positive continue psh propre (*cf.* [6], (2.1) et (2.4)). Les variétés de Stein sont infinitésimalement homogènes ainsi que les produits de variétés infinitésimalement homogènes.

PROPOSITION 2.2. — *Si la variété X est homogène sous l'action du groupe de Lie réel G, alors elle est infinitésimalement homogène.*

Démonstration. — Si on suppose X connexe, on peut supposer G connexe. L'application $(g, x) \to g.x$ est $\mathscr{C}^\infty$ par rapport à l'ensemble des variables et holomorphe par rapport à la seconde; l'application orbitale $g \to gx$ est de rang constant et surjective. C'est donc une submersion. Sa différentielle est une surjection de l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ sur l'espace tangent en x à X. Lorsque x varie, cette différentielle définit une application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathscr{G}$ dans l'espace des champs holomorphes sur X. L'image de cette application est l'espace E cherché.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.3. — *Si X est un fibré localement trivial à base S variété de Stein et à fibre F espace homogène compact, alors X est infinitésimalement homogène.*

Démonstration. — Si t est un vecteur tangent en un point x de X, il provient d'un champ τ holomorphe sur un voisinage de la fibre en x, puisqu'on peut choisir ce voisinage isomorphe au produit de F par un ouvert de Stein de S. Notons Π la projection de X sur S, et T le faisceau tangent sur X. Alors $\Pi_* T$ est un faisceau analytique, localement libre de type fini sur S, et τ définit un élément de sa fibre réduite en $\Pi(x)$. D'après le théorème A de Cartan, cet élément provient d'une section globale de $\Pi_* T$, c'est-à-dire d'un champ holomorphe sur X dont, en particulier, la valeur en x est t.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 2.4. — On dit que U est *pseudoconvexe* s'il existe dans U une fonction positive continue psh propre (pour cela, il suffit que l'enveloppe « pseudoconvexe » de tout compact de U soit compacte). Nous dirons que U est $\mathscr{C}^\infty$ pseudoconvexe, s'il existe dans U une fonction positive, $\mathscr{C}^\infty$ psh propre.

PROPOSITION 2.5. — *Si U est pseudoconvexe et infinitésimalement homogène, alors U est réunion croissante d'ouverts $\mathscr{C}^\infty$ pseudoconvexes.*

Démonstration. — Soit φ positive continue psh propre dans U. Posons

$$U_\alpha = \{ z \in U;\ \varphi(z) < \alpha \}.$$

Il nous suffit de trouver un ouvert relativement compact $\mathscr{C}^\infty$ pseudoconvexe contenant U_α. Soit B un voisinage compact de 0 dans E, tel que e soit défini sur $U_{\alpha+3} \times B$. Soit θ une mesure positive $\mathscr{C}^\infty$ à support dans B telle que, si on pose

$$\varphi_\theta(z) = \langle \theta(x),\ \varphi \circ e(z, x) \rangle,$$

on ait

$$\| \varphi - \varphi_\theta \|_{U_{\alpha+2}} < 1.$$

La fonction φ_θ est psh puisque θ est positive et que, pour tout x, $\varphi \circ e(z, x)$ est psh. Nous allons voir que φ_θ est $\mathscr{C}^\infty$; choisissons une densité $\mathscr{C}^\infty$ positive dz sur $U_{\alpha+2}$ et une fonction $\mathscr{C}^\infty$ ψ à support compact dans $U_{\alpha+2}$. On a

$$\langle \varphi_\theta(z)\, dz,\ \psi(z) \rangle = \langle \theta(x)\, dz,\ \varphi \circ e(z, x)\, \psi(z) \rangle.$$

L'application (p, e) de $U_{\alpha+2} \times B$ dans $U_{\alpha+2} \times U$ est propre, et on a

$$\langle \varphi_\theta(z)\, dz,\ \psi(z) \rangle = \langle (p, e)_* \theta(x)\, dz,\ \varphi(z_1)\, \psi(z_2) \rangle.$$

Comme θ et dz sont $\mathscr{C}^\infty$, et que (p, e) est une submersion, $(p, e)_*\, \theta(x)\, dz$ est une mesure $\mathscr{C}^\infty$ qui peut donc s'écrire $\alpha(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2$, où α est $\mathscr{C}^\infty$. On a donc

$$\varphi_\theta(z) = \langle \alpha(z_1, z)\, dz_1,\ \varphi(z_1) \rangle,$$

ce qui est évidemment $\mathscr{C}^\infty$. Posons alors

$$V = \{ z \in U_{\alpha+2} \, ; \, \varphi_\theta(z) < \alpha+1 \}.$$

L'hypothèse sur θ assure que V contient U_α et est relativement compact dans $U_{\alpha+2}$, ce qui implique que $(\alpha+1-\varphi_\theta)^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ psh propre dans V.

PROPOSITION 2.6. — *Soit U une variété pseudoconvexe et infinitésimalement homogène. Soient c un champ holomorphe sur U, et $\bar{\gamma} : \Delta \to U$ une courbe intégrale connexe de c. Si $\bar{\gamma}(\Delta)$ rencontre CU, alors $\bar{\gamma}(\Delta)$ est contenu dans CU.*

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que $\bar{\gamma}^{-1}(CU)$ est ouvert. Soit φ une fonction positive continue psh propre dans U, et posons

$$U_\alpha = \{ z \in U ; \, \varphi(z) < \alpha \}.$$

Soit $t \in \Delta$ tel que $\bar{\gamma}(t) = (x, \delta)$ soit dans CU. Soit α supérieur à $\varphi(x)$, et soit G le groupe à un paramètre d'automorphismes locaux de U défini par c. Pour g suffisamment voisin de 0 dans G, $g(U_{\alpha+1})$ est défini, et contient U_α, et U_α contient $g\,x$. Si on note aussi g, l'automorphisme local induit par g sur PTU, on a d'après (1.6), $(x, \delta) \in CU_{\alpha+1}$, d'où $g(x, \delta) \in C(g\, U_{\alpha+1})$, d'où $g(x, \delta) \in CU_\alpha$, d'où $g(x, \delta) \in CU$. Comme $g(x, \delta) = \bar{\gamma}(t+g)$, ceci prouve que $\bar{\gamma}^{-1}(CU)$ est ouvert.

C. Q. F. D.

3. Courbes intégrales intérieures

DÉFINITION 3.1. — Soient (X, E) une variété infinitésimalement homogène, U un domaine au-dessus de X, c un élément de E, $\hat{c}$ le champ correspondant sur U, et $\gamma : \Delta \to U$ une courbe intégrale maximale de $\hat{c}$. Si l'image de γ est relativement compacte, on dira que γ est une courbe intégrale intérieure dans U.

Rappel 3.2 (*cf.* DIEUDONNÉ [2], 18.2.10). — Si γ est une courbe intégrale intérieure son domaine d'existence Δ est $\mathbf{C}$ tout entier.

PROPOSITION 3.3. — *Une variété de Stein n'admet pas de courbe intégrale intérieure.*

Démonstration. — Soit $\gamma : \mathbf{C} \to U$ une application holomorphe d'image relativement compacte. Alors $\gamma^* : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(\mathbf{C})$ a pour image l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{C}$ à cause du théorème de Liouville. Si U est de Stein, $\mathcal{O}(U)$ sépare les points ce qui prouve que γ est constante.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3.4. — *Soit X une variété pseudoconvexe infinitésimalement homogène. Si X n'a pas de courbe intégrale intèrieure, X est de Stein.*

Démonstration. — Soit φ psh continue propre dans X, et soit

$$X_\alpha = \{ z \in X ;\ \varphi(z) < \alpha \}.$$

Si les X_α sont de Stein, ils sont de Runge les uns dans les autres, ce qui implique que X est de Stein. D'après 2.5, on peut donc supposer que φ est $\mathscr{C}^\infty$. Supposons que X n'est pas de Stein, et construisons dans X une courbe intégrale intérieure. D'après (1.5) et la solution du problème de Levi (*cf.* NARASIMHAN [11]), CX est non vide : soit (x, δ) dans CX, et soit c un champ sur X qui définisse δ en x. Soit $\gamma : \Delta \to X$ la courbe intégrale maximale passant par x de c. D'après (2.6), $\bar{\gamma}(\Delta)$ est contenu dans CX. D'après (1.8), γ est une courbe intégrale intérieure dans x.

C. Q. F. D.

Rappel 3.5. — Soit X une variété compacte irréductible homogène simplement connexe. Alors (*cf.* e. g. GOTO [5]), X est le quotient d'un groupe G semi-simple complexe par un sous-groupe maximal H. L'action de G sur X définit (*cf.* 2.2) un espace vectoriel E de champs holomorphes sur X qui fait de X une variété infinitésimalement homogène.

PROPOSITION 3.6. — *Soit* (X, E) *comme dans* (3.5). *Soit U un domaine pseudoconvexe au-dessus de X. Si U contient une courbe intégrale intérieure, alors $U = X$.*

Démonstration. — Elle est parallèle à celle du théorème 3.8 dans [6].

Soient $\gamma : \mathbf{C} \to U$ une courbe intégrale intérieure, et φ une fonction continue psh propre dans U. Alors $\varphi \circ \gamma$ est psh bornée, donc constante. On va d'abord montrer que φ est constante au voisinage de $\gamma(\mathbf{C})$. Posons $x = \gamma(0)$. Il nous suffit de montrer que φ est constante au voisinage de x. Avec les notations de (3.5), on peut supposer que H est le sous-groupe d'isotropie de la projection de x. Soit c un champ de E, tel que γ soit une courbe intégrale du champ associé sur U. Soit Γ le sous-groupe à un paramètre engendré par c dans G. Comme H est maximal, un argument de dimension assure qu'il existe un entier p tel que l'application produit de $(\Gamma \times H)^p$ dans G soit ouverte à l'origine. Soit W un voisinage de l'identité dans G suffisamment petit pour que W^{2p} agisse sur $\gamma(\mathbf{C})$ qui est relativement compact. Soit g un élément de W suffisamment voisin de l'identité pour qu'on puisse écrire $g = g_1' g_1'' g_2' \ldots g_p' g_p''$ avec g_k' dans $\Gamma \cap W$ et g_k'' dans $H \cap W$. Il nous suffit de montrer que $\varphi(x) = \varphi(g(x))$. Posons :

$$g_k = g_k' g_k'', \qquad y_0 = \gamma(\mathbf{C}), \qquad y_k = y_0 \cup g_k(y_{k-1}).$$

Montrons que Y_k, qui est une réunion finie de courbes intégrales intérieures est connexe : c'est le cas pour Y_0; si Y_{k-1} est connexe $g_k(Y_{k-1})$ l'est aussi. Comme Y_{k-1} contient Y_0 et à cause de la définition de H et Γ, $g_k(Y_{k-1})$ rencontre Y_0, donc Y_k est connexe. La fonction φ qui est localement constante sur Y_p, y est donc constante, et $\varphi(x) = \varphi(g(x))$.

Soit maintenant U' une composante connexe de l'ouvert de U constitué par les points par où passe une courbe intégrale intérieure à U. On va montrer que U' est fermé, ce qui permettra de conclure que $U' = U$, donc que φ est localement constante dans U, donc que U est compact. D'après ce qui précède, φ est constante dans U', donc dans $\overline{U'}$, qui est donc compact. Pour g suffisamment voisin de l'identité dans G, on peut donc définir $g(\overline{U'})$. Si $g^{-1}(x)$ est dans U', ce qui est possible dès que x est adhérent à U', g transforme une courbe intégrale intérieure passant par $g^{-1}(x)$ en une courbe intégrale intérieure passant par x. Il reste à remarquer que si U est compact, c'est un revêtement de X, ce qui, puisque X est simplement connexe implique $U = X$.

C. Q. F. D.

Rappel 3.7. — Soit X une variété compacte homogène rationnelle. Alors (*cf.* GOTO [5] et TITS [13]), X est le quotient $G[\Sigma]$ d'un groupe G semi-simple complexe d'algèbre de Lie notée aussi G par un sous-groupe parabolique noté $G(\Sigma)$, où Σ désigne un système de racines de G (les notations sont celles de TITS [13]). L'action de G sur X définit un espace vectoriel G de champs holomorphes sur X qui fait de X une variété infinitésimalement homogène. Les seuls sous-groupes compris entre $G(\Sigma)$ et G sont de la forme $G(\Sigma')$, où Σ' est un sous-système de Σ. Si Σ' est un tel système, la projection naturelle de X sur $X' = G[\Sigma']$ est une fibration localement triviale dont la fibre X'' est encore une variété compacte homogène rationnelle.

PROPOSITION 3.8. — *Soit X comme dans* (3.7). *Soit U un domaine pseudoconvexe au-dessus de X. Si U contient une courbe intégrale intérieure,* *alors il existe un sous-système Σ' de Σ, différent de Σ, tel que si Π désigne la projection de X sur $X' = G[\Sigma']$, il existe un domaine pseudoconvexe U' sur X' tel que U soit un fibré localement trivial à fibre connexe compacte et base U'.*

Démonstration. — Soit c un champ sur X tel que le champ correspondant sur U admette une courbe intégrale intérieure à U. Soit Γ le sous-groupe à un paramètre engendré par c dans G. Le groupe engendré par $G(\Sigma)$ et Γ est de la forme $G(\Sigma')$ (*cf.* WARNER [14], 1.2.1.1). Soit u sur une courbe intégrale intérieure à U. On peut supposer que $G(\Sigma)$ est le sous-groupe d'isotropie de la projection x de u. Un raisonnement analogue à la démonstration de 3.6 permet de voir que, avec les notations de 3.7, la trace de U au-dessus de $\Pi^{-1}\Pi(x)$ est un revêtement. Soit A une composante connexe de ce revêtement : comme $\Pi^{-1}\Pi(x)$ est simplement connexe, A est isomorphe à X''. Notons ρ la projection de U sur X, et φ une fonction continue psh sur U. Soit U_0 l'ensemble des points u de U par où passe une section notée $L u$ de ρ au-dessus d'une fibre de Π. Comme U_0 est manifestement ouvert et contient A, il suffit de montrer que U_0 est fermé pour prouver que U_0 égale U. Soit donc u adhérent à U_0, et soit Z la composante connexe de u dans $(\Pi\circ\rho)^{-1}(\Pi\circ\rho)\,u$. C'est un fermé de U. On vérifie que l'ensemble des points de Z adhérent à U_0 est ouvert et fermé dans Z. Comme il contient u, c'est Z tout entier. Dans U_0, à cause du principe du maximum, φ est constante sur les fibres de $\Pi\circ\rho$. Par continuité, il en résulte que φ est localement constante et donc constante sur Z. Cela implique que Z est relativement compact donc compact. Par suite, u est dans U_0, et U_0 égale U. La relation d'équivalence dont les classes sont les sous-ensembles de la forme $L u$ dans U est propre et plate : elle admet un quotient U', et si Y est un germe de variété transverse à $L u$ en u, de dimension égale à la codimension de $L u$, c'est-à-dire à la dimension de X', la projection de Y sur U' est un plongement ouvert. La projection de U sur X' respecte évidemment la relation d'équivalence, donc se factorise à travers U' : soit $\rho' : U' \to X'$ le morphisme correspondant. En décrivant localement U' à l'aide d'un germe Y comme ci-dessus, on voit que ρ' est étale. Le passage au quotient $q : U \to U'$ est une fibration localement triviale à fibre compacte connexe. La fonction φ se factorise à travers q, et la fonction φ' correspondante sur U' est continue psh propre, donc U' est pseudoconvexe.

C. Q. F. D.

4. Conclusion

THÉORÈME 4.1. — *Soient X une variété infinitésimalement homogène, et U un domaine pseudoconvexe non compact au-dessus de X.*

1° *Si U ne contient pas de courbe intégrale intérieure, U est de Stein.*

2° *Si X est rationnelle compacte, U est holomorphiquement convexe.*

3° *Si X est rationnelle compacte irréductible (cf. 3.5), U est de Stein.*

Démonstration :

1° C'est (3.4).

2° On raisonne par récurrence sur la dimension de X, ce qui, grâce à (3.8), permet de se ramener à 3°.

3° Résulte de 1° d'après (3.6).

Remarque 4.2. — On sait (*cf.* HIRSCHOWITZ [6], 2.4) que si X est compact et U est localement pseudoconvexe à fibres finies, U est pseudoconvexe. Il reste donc essentiellement à voir si les domaines infinis localement pseudoconvexes sont pseudoconvexes (ce n'est pas toujours le cas même au-dessus des variétés homogènes compactes, *cf.* [6], 2.8).

Cas particuliers. — Tout ouvert non compact localement pseudoconvexe d'une variété grassmanienne est de Stein. Cela répond à une question posée par MARTINEAU.

Pour finir, voici un exemple inquiétant de domaine localement pseudoconvexe infini :

Exemple 4.3. — D'après MORIMOTO [9], il existe un réseau Γ dans $\mathbf{C}^2$ tel que $\mathbf{C}^2/\Gamma$ soit non compact (Γ est de rang trois sur $\mathbf{Z}$) mais n'admette pas d'autre fonction holomorphe que les constantes. On peut compléter Γ en un réseau $\hat{\Gamma}$ de $\mathbf{C}^2 \oplus \mathbf{C}$ tel que $\hat{\Gamma} \cap \mathbf{C}^2 = \Gamma$ et que $X = \mathbf{C}^2 \oplus \mathbf{C}/\hat{\Gamma}$ soit compact. Le morphisme naturel de $U = \mathbf{C}^2/\Gamma \times \mathbf{C}$ dans X est un revêtement. Le domaine U est d'holomorphie au-dessus de X et n'est pas holomorphiquement convexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUN (J.). — *Sur le problème de Levi dans certains fibrés* (Preprint).

[2] DIEUDONNÉ (J. A.). — Éléments d'analyse, IV. — Paris, Gauthier-Villars, 1971.

[3] FUJITA (R.). — Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, *J. Math. Soc. Japan*, t. 15, 1963, p. 443-473.

[4] FUJITA (R.) — Domaines sans point critique intérieur sur l'espace produit, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1964-1965, t. 4, p. 493-514.

[5] GOTO (M.). — On algebraic homogeneous spaces, *Amer. J. of Math.*, t. 76, 1954, p. 811-818.

[6] HIRSCHOWITZ (A.). — Pseudoconvexité au-dessus d'espaces plus ou moins homogènes, *Invent. Math.*, Berlin, t. 26, 1974, p. 303-322.

[7] KISELMAN (C. O.). — On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, *Acta Math.*, Uppsala, t. 117, 1967, p. 1-35.

[8] MATSUGU (Y.). — The Levi problem for a product manifold, *Pac. J. of Math.*, t. 46, 1973, p. 231-233.

[9] MORIMOTO (A.). — Non compact complex Lie groups without non-constant holomorphic functions, "*Proceedings of the Conference on complex analysis*" [1964, Minneapolis], p. 256-272. — Berlin, Springer-Verlag, 1965.

[10] NARASIMHAN (R.). — The Levi Problem in the theory of functions of several complex variables, "*Proceedings of the international congress of mathematicians*" [1962, Stockholm], p. 385-388. — Djursholm, Institut Mittag-Leffer, 1963.

[11] NARASIMHAN (R.). — The Levi Problem for complex spaces, II, *Math. Annalen*, t. 146, 1962, p. 195-215.

[12] TAKEUCHI (A.). — Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, *J. Math. Soc. Japan*, t. 16, 1964, p. 159-181.

[13] TITS (J.). — Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. *Mem, Acad. Roy. Belg.*, t. 29, 1955, p. 1-268.

[14] WARNER (G.). — *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, I. — Berlin. Heildeberg, New York, Springer-Verlag, 1972 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 188).

(Texte reçu le 26 septembre 1974.)

André HIRSCHOWITZ,
Institut de Mathématiques,
Université de Nice,
Parc Valrose,
06034 Nice Cedex.