

# BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PISTOYE

## **Sur les sections planes des cônes circulaires obliques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 1 (1872-1873), p. 117-119

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1872-1873\\_\\_1\\_\\_117\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__117_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1872-1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur les sections planes des cônes circulaires obliques; par M. DE PISTOYE.*

(Séance du 19 février 1875)

Je me propose ici de démontrer d'une façon *élémentaire* que les sections planes d'un cône circulaire oblique sont de même nature que celles d'un cône droit, en partant des propriétés des cercles focaux.

Si, dans la démonstration du théorème de Dandelin, on remplace la sphère inscrite dans le cône et tangente au plan sécant par une sphère inscrite qui coupe le plan sécant, on établit aisément les propriétés des cercles focaux et en particulier celle-ci :

*Toute section plane d'un cône droit peut être regardée comme le lieu des points tels que, pour chacun d'eux, le rapport de sa distance à une droite donnée avec la longueur de la tangente menée de ce même point à un cercle aussi donné soit constant.*

Voici comment on peut établir la même propriété pour les sections planes des cônes circulaires obliques.

Soit S le sommet d'une cône circulaire oblique coupé par un plan X suivant la courbe  $AMA_1N$ ; je cherche la ligne droite suivant laquelle l'un des plans cycliques coupe le plan X et je mène au cône un des plans tangents parallèles à cette droite, il coupera le plan X suivant une droite AL tangente en A au cône et parallèle à la précédente. Par la droite AL, je puis donc mener un plan qui soit parallèle au plan cyclique et qui par suite coupe le cône suivant un cercle. Je cherche de même la ligne droite suivant laquelle l'autre plan cyclique coupe le plan X et je mène les deux plans tangents au cône qui sont parallèles à cette droite; ils couperont le plan X suivant deux droites par chacune desquelles on peut mener un plan parallèle au plan cyclique, mais je ne construis que celui qui coupe le cône du

même côté du plan X que le plan P. Le plan  $P_1$  ainsi construit coupe le cône suivant un cercle, le plan X suivant une droite  $A_1L$  tangente en  $A_1$  au cône,

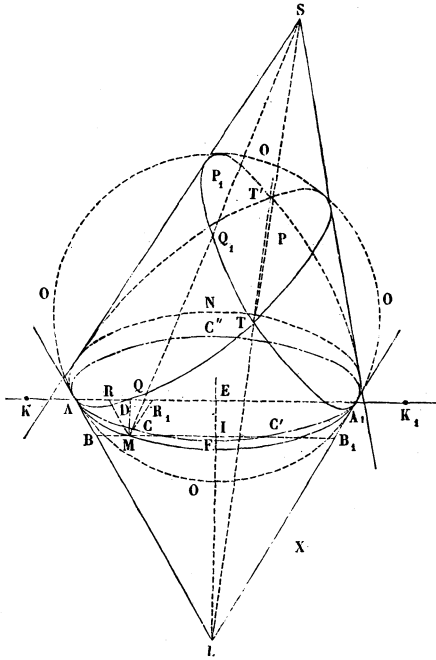


Fig. 2.

et le plan P suivant la ligne  $LTT'$ . Les cercles suivant lesquels les plans P et  $P_1$  coupent le cône se rencontrent en T et  $T'$ , et par suite sont situés sur une même sphère 0000. Les lignes AL et  $A_1L$  sont tangentes à cette sphère, elles sont donc égales. La sphère coupe le plan X suivant un cercle  $ACC'A_1C''$ .

Soit M un point quelconque de l'intersection du cône avec le plan X; je mène la génératrice de ce point, elle coupera le plan P en Q et le plan  $P_1$  en  $Q_1$ . Considérons d'abord le point Q; par le point M, je mène un plan parallèle au plan P, il coupera le plan X suivant une droite MR parallèle à la droite AL, et la droite  $AA_1$  en R.

Par le sommet S, je mène un plan parallèle au plan P, il coupera la droite  $AA_1$  en un certain point K (qui n'est qu'indiqué). La génératrice SM et la droite  $AA_1$  sont coupées par trois plans parallèles; on a donc

$$\frac{MQ}{RA} = \frac{QS}{AK}$$

Je construis de même les points  $R_1$  et  $K_1$  en menant par les points M et S les plans parallèles au plan  $P_1$ ; on a

$$\frac{MQ_1}{R_1A_1} = \frac{Q_1S}{A_1K_1},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1} = \frac{QS.Q_1S}{AK.A_1K_1} = \frac{ST^2}{AK.A_1K_1},$$

puisque la génératrice ST est tangente à la sphère.

Je mène par le point M une parallèle à la droite  $AA_1$ , elle coupe les lignes AL et  $A_1L$  aux points B et  $B_1$ , et la sphère aux points C et  $C'$  situés sur le

•cercle  $ACC'A_1C''$ . J'abaisse du point L une perpendiculaire sur la corde  $AA_1$ , elle rencontre cette corde et sa parallèle  $BB_1$  en E et en I; le point I est le milieu de la corde  $CC'$  et de la longueur  $BB_1$ .

Les produits  $MQ.MQ_1$  et  $MC.MC'$  sont égaux, les longueurs  $RA$  et  $R_1A_1$  sont respectivement égales aux longueurs  $MB$  et  $MB_1$ ; on a donc

$$\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1} = \frac{MC.MC'}{MB.MB_1} = \frac{MI^2 - IC^2}{IB^2 - MI^2},$$

et, en égalant les deux valeurs du rapport  $\frac{MQ.MQ_1}{RA.R_1A_1}$ ,

$$\frac{MI^2 - IC^2}{IB^2 - MI^2} = \frac{ST^2}{AK.A_1K_1}.$$

En ajoutant les numérateurs aux dénominateurs, cette égalité devient

$$\frac{MI^2 - IC^2}{IB^2 - IC^2} = \frac{ST^2}{ST^2 + AK.A_1K_1},$$

où  $MI^2 - IC^2$  est égal au produit  $MC.MC'$ , et aussi au carré de la longueur  $MF$  de la tangente menée du point  $M$  au cercle  $ACC'A_1C''$ . De même  $IB^2 - IC^2$  est égal à  $BA^2$ ; on a donc

$$\frac{MF^2}{BA^2} = \frac{ST^2}{ST^2 + AK.A_1K_1}.$$

J'abaisse du point  $M$  la perpendiculaire  $MD$  sur la corde  $AA_1$ ; on a

$$\frac{BA}{MD} = \frac{LA}{LE},$$

et, en remplaçant  $BA$  par sa valeur dans l'équation précédente,

$$\frac{MF^2}{MD^2} = \frac{LA^2}{LE^2} \frac{ST^2}{ST^2 + AK.A_1K_1} = \text{constante}.$$

Donc, etc.

REMARQUE. — Si les plans  $P$  et  $P_1$  étaient menés de manière à couper le cône de côtés différents du plan  $X$ , la démonstration subsisterait dans ses parties principales, et on étendrait facilement les propriétés des cercles focaux aux cercles bitangents extérieurement.