DANG-NGOC NGHIEM

Décomposition et classification des systèmes dynamiques

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 149-175

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__149_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 149-175.

DÉCOMPOSITION ET CLASSIFICATION DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

PAR

DANG-NGOC NGHIEM (*)

RÉSUMÉ. — Dans la première partie de ce papier, nous étudions le problème de l'intégration et de la désintégration des systèmes dynamiques; nous montrons qu'un système dynamique décomposable est discret (resp. continu, fini, proprement infini, simplicial, quasi large, large) si, et seulement si, presque tous ses composants possèdent la propriété correspondante. Pour les systèmes commutatifs, nous obtenons des résultats plus précis : nous montrons qu'un système commutatif peut être désintégré en des systèmes ergodiques portés par des ensembles boréliens deux à deux disjoints généralisant ainsi des résultats de DYNKIN, GUICHARDET, KIFER et PIROGOV. Nous montrons qu'il est possible d'intégrer les mesures σ-finies invariantes pour obtenir une mesure σ-finie invariante pour le système global, nous en déduisons l'existence de mesures invariantes sur un G-espace borélien standard régulier quand G est un groupe commutatif ou un groupe de Lie nilpotent généralisant ainsi un résultat de DIXMIER.

Dans la deuxième partie du papier, nous étudions les relations entre la classification des systèmes dynamiques commutatifs et la classification des algèbres de von Neumann *via* une construction due à KRIEGER. Nous montrons qu'un système dynamique est de type $I_1, \ldots, I_{\mathcal{N}}, II_1, II_\infty, III$ si, et seulement si, l'algèbre de von Neumann associée est de même type, que deux ensembles mesurables sont G-équivalents si, et seulement si, les projecteurs associés sont équivalents. En utilisant des résultats sur les produits tensoriels des algèbres de von Neumann nous déduisons des résultats nouveaux sur les produits des systèmes dynamiques.

Introduction

Dans tout ce papier, nous nous fixons un groupe localement compact séparable G, et un sous-groupe dénombrable dense K de G. Par système dynamique, nous désignons la donnée :

– d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'une W^*-algèbre $\mathcal{A}$ opérant sur $\mathcal{H}$;

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 1, Mathématiques-Informatique associée au C. N. R. S.

– d'une représentation unitaire continue U de G dans $\mathscr{H}$ telle que $U_g \mathscr{A} U_g^* = \mathscr{A}$ pour tout $g \in G$;
et on note le système dynamique $(\mathscr{A}, G, U, \mathscr{H})$, soit $\mathscr{F}$, soit $(\mathscr{A}, G, U)$, soit $(\mathscr{A}, G)$.

Notons $\mathscr{I}$ ou $\mathscr{A}^G$ l'ensemble des éléments G-invariants de $\mathscr{A}$, et $\mathscr{C}$ le centre de $\mathscr{A}$.

On dit que le système $\mathscr{F}$ est fini (resp. semi-fini) s'il existe un état normal (resp. un poids normal semi-fini) G-invariant et fidèle sur $\mathscr{A}$. Il est dit proprement infini (resp. purement infini) s'il n'existe aucun état normal (resp. poids normal semi-fini non nul) G-invariant sur $\mathscr{A}$. Il est dit infini s'il n'est pas fini.

Soit p un projecteur de $\mathscr{I}' \cap \mathscr{A}$ ($\mathscr{I}'$ désigne le commutant de $\mathscr{I}$), p est appelé un G-atome si $\mathscr{A}_p = \mathscr{I}_p$. Le système $\mathscr{F}$ est dit discret si tout projecteur du centre de $\mathscr{A}$ majore un G-atome non nul. Il est dit continu s'il n'existe aucun G-atome non nul. Nous disons que $\mathscr{F}$ est de type I s'il est discret, de type I_1 s'il est continu fini, de type II_∞ s'il est continu semi-fini proprement infini, de type III s'il est continu purement infini.

Si p est un projecteur de $\mathscr{I}$, nous avons le système induit de $\mathscr{F}$ sur p noté $\mathscr{F}_p$. Il existe un plus grand des projecteurs p de $\mathscr{I}$, soit e, tels que le système induit $\mathscr{F}_p$ soit fini; le projecteur e est appelé la partie finie de $\mathscr{F}$.

Le système $\mathscr{F}$ est dit simplicial (resp. quasi large, large) si $\mathscr{I}_e$ est abélienne (resp. si $\mathscr{I}_e = (\mathscr{C}^G)_e$, si $\mathscr{I}_e = (\mathscr{C}^G)_e$ et $e \in \mathscr{C}$) (sur tout ceci *voir* [3], [4], [5], [10] et [11]).

On dit que le système $\mathscr{F} = (\mathscr{A}, G, U, \mathscr{H})$ est commutatif si $\mathscr{A}$ est commutative. A un isomorphisme près, on peut trouver un espace de mesure $(M, \mathscr{B}, m)$ sur lequel G opère de manière mesurable laissant m quasi invariante (*cf.* [19]) tel que $\mathscr{A} = L^\infty(\mathrm{M}, \mathscr{B}, m)$, G opérant canoniquement sur $L^\infty(M, \mathscr{B}, m)$; on écrira alors $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$. Le système $(M, \mathscr{B}, m; G)$ est dit fini (resp. semi-fini) s'il existe une mesure finie (resp. σ-finie) G-invariante équivalente à m. Il est dit proprement infini (resp. purement infini) s'il n'existe aucune mesure finie (resp. σ-finie) non nulle G-invariante absolument continue par rapport à m. Il est dit infini s'il n'est pas fini (pour tout ceci *voir* [3]). Soient $E, F \in \mathscr{I}$. On dit que E et F sont G-équivalents, et on note $E \sim_G F$ s'il existe une partition $\{E_n\}_{n \in N}$ de E, une partition $\{F_n\}_{n \in N}$ de F et une suite $\{g_n\}_{n \in N}$ d'éléments de G telles que

$$g_n E_n = F_n, \qquad \forall n \in N.$$

L'application h de E sur F, définie par $h|_{E_n} = g_n|_{E_n}$, est appelée un G-isomorphisme partiel, on le note aussi (E, F, h). On écrit $E \prec_G F$ s'il existe $F' \subset F$ tels que $E \sim_G F'$. Les systèmes dynamiques discrets se subdivisent en systèmes de type $I_1, I_2, \ldots, I_n, I$ (*cf.* [3]).

Dans la section A, nous abordons l'étude de l'intégration et de la désintégration des systèmes dynamiques, la méthode utilisée suit de près celle de von Neumann concernant la réduction des W^*-algèbres. Si les résultats paraissent satisfaisants dans le cas des systèmes commutatifs, les problèmes concernant les systèmes non commutatifs ne sont pas entièrement résolus, en particulier le problème des systèmes semi-finis.

Dans les parties A-II et A-III, nous montrons qu'un système dynamique décomposable (commutatif ou non) est discret (resp. continu, fini, simplicial, quasi large, large) si, et seulement si, presque tous ses composants possèdent la propriété correspondante.

Dans les parties A-VI et A-V. nous nous restreignons aux systèmes commutatifs, et montrons qu'un système décomposable est de type $J, J = I_1, I_2, \ldots, I_{\mathcal{N}}, II_1, II_\infty, III$, si, et seulement si, presque tous ses composants sont de type J. Nous étudions ensuite la désintégration d'une mesure quasi invariante sur un G-espace borélien standard en mesures quasi invariantes ergodiques portées par des ensembles boréliens deux à deux disjoints, et établissons des relations entre le type de la mesure initiale et celui de ses composantes ergodiques.

Nous en déduisons des résultats sur les systèmes « réguliers » généralisant un résultat de DIXMIER sur l'existence de mesures invariantes équivalentes à une mesure relativement invariante (*cf.* [9]).

Nous abordons ensuite la section B. Dans [18], W. KRIEGER associe à chaque système dynamique $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ avec G dénombrable un couple d'algèbres de von Neumann $(\mathfrak{A}(\mathscr{F}), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}))$ (*voir* la définition dans la partie B-II), soit $f \to \hat{f}$ l'isomorphisme canonique de $L^\infty(M, \mathscr{B}, m)$ sur $\mathfrak{A}_0(\mathscr{F})$, on identifie $\mathscr{B}$ à un sous-ensemble de $L^\infty(M, \mathscr{B}, m)$.

Dans les parties B-II et B-III, nous rappelons et établissons quelques propriétés importantes des W^*-couples et de la construction de Krieger.

Dans la partie B-IV, nous clarifions les relations entre les systèmes induits et les W^*-algèbres réduites, plus précisément, si $E \in \mathscr{B}$, alors $\mathfrak{A}(\mathscr{F}_E) \sim \mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}}$. Nous montrons aussi que deux ensembles mesurables E, $F \in \mathscr{B}$ sont G-équivalents si, et seulement si, les projecteurs associés $\hat{E}$ et $\hat{F}$ sont équivalents dans $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$.

Dans la partie B-V, nous montrons que le système $\mathscr{F}$ est discret (resp. continu) si, et seulement si, l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ est discrète (resp. continue). Il en résulte que le système $\mathscr{F}$ est de type $I_1, \ldots, I_n, \ldots, I_{\mathscr{N}}$, II_1, II_∞ ou III si, et seulement si, l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ est de type correspondant.

Dans la partie B-VI, nous établissons quelques propriétés importantes sur le type des produits des systèmes dynamiques.

Soit $(M, \mathscr{B}, m; G)$ un système dynamique commutatif, pour $E \in \mathscr{B}$, on définit $\mathrm{Supp}_G E = \mathrm{ess\,sup}_{g \in G}\, g\, E$, et on l'appelle le G-support de E. Un automorphisme de $(M, \mathscr{B}, m)$ est une bijection bimesurable de M laissant m quasi-invariante. Le groupe plein $[G]$ de G est l'ensemble des automorphismes T de M tels qu'il existe une partition $\{ E_n \}_{n \in N}$ de M, une suite $\{ g_n \}_{n \in N} \subset G$ telles que

$$T|_{E_n} = g_n|_{E_n}, \qquad \forall n \in N.$$

Pour chaque $E \in \mathscr{B}$, $m(E) > 0$, et chaque $g \in G$, on peut définir un automorphisme induit g_E sur E, généralisant celui de KAKUTANI, on définit aussi une notion de système induit $\mathscr{F}_E = (E, \mathscr{B}_E, m_E; G_E)$; l'ensemble E est dit G-fini (resp. G-discret, ...) si $\mathscr{F}_E$ est fini (resp. discret, ...) (*voir* [3]).

Section A

Décomposition des systèmes dynamiques et des mesures quasi invariantes

I. — Notations

Pour les intégrales hilbertiennes, nous utilisons les notations de [6], pour les systèmes dynamiques, nous utilisons les notations de [3].

II. — Champs de systèmes discrets et continus

Soit $z \to \mathfrak{H}(z)$ un champ ν-mesurable d'espaces de Hilbert sur un espace mesuré (Z, ν) qu'on suppose standard dans toute la suite; soient $\mathfrak{H} = \int^{+} \mathfrak{H}(z)\, d\nu(z)$, et Z l'algèbre des opérateurs diagonalisables. Pour tout $z \in Z$, soit $\mathscr{F}(z) = (\mathscr{A}(z), G, U(z))$ un système dynamique concret sur $\mathfrak{H}(z)$ (G étant un groupe localement compact séparable fixé une fois pour toutes et indépendant de z). L'application $z \to \mathcal{F}(z)$ est appelée un champ de systèmes dynamiques, ce champ est dit mesurable si :

(*a*) Le champ de W^*-algèbres $z \to \mathcal{A}(z)$ est mesurable;

(*b*) Le champ $z \to U(z)$ est un champ mesurable de représentations de G.

On note

$$\mathcal{A} = \int^{\oplus} \mathcal{A}(z)\, d\nu(z); \qquad U = \int^{\oplus} U(z)\, d\nu(z).$$

On a ainsi un système dynamique concret $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, G, U)$, et on écrit $\mathcal{A} = \int^{\oplus} \mathcal{A}(z)\, d\nu(z)$. On dit que le système $\mathcal{F}$ est décomposable. Soient $\mathcal{I}(z) = \mathcal{A}(z)^G$, $\mathcal{C}(z)$ le centre de $\mathcal{A}(z)$, $\mathcal{C}(z)^G = \mathcal{C}(z) \cap \mathcal{I}(z)$. Comme $Z \subset \mathcal{C}^G \subset \mathcal{I}$, on peut voir que le champ $z \to \mathcal{I}(z)$ est décomposable, et $\mathcal{I} = \int^{\oplus} \mathcal{I}(z)\, d\nu(z)$, et de même $\mathcal{C}^G = \int^{\oplus} \mathcal{C}(z)^G\, d\nu(z)$.

LEMME II.1. — *Soit* $E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z)$ *un projecteur de* $\mathcal{A}$. *Alors* E *est un* G*-atome si, et seulement si,* $E(z)$ *est un* G*-atome presque partout.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{H}' = E\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'(z) = E(z)\,\mathfrak{H}(z)$, d'après [6] (proposition II, § 3-6, p. 180), on a

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{H}'} = \int^{\oplus} \mathcal{A}(z)_{\mathfrak{H}'(z)}\, d\nu(z),$$

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{H}'} = \int^{\oplus} \mathcal{I}(z)_{\mathfrak{H}'(z)}\, d\nu(z).$$

Dire que E est un G-atome revient à dire que $\mathcal{A}_{\mathfrak{H}'} = \mathcal{I}_{\mathfrak{H}'}$ ce qui équivaut à $\mathcal{A}(z)_{\mathfrak{H}'(z)} = \mathcal{I}(z)_{\mathfrak{H}'(z)}$ presque partout ou encore $E(z)$ est un G-atome presque partout (*cf.* [4]).

Q. E. D.

PROPOSITION II.1. — *Soit* $\mathcal{F} = \int^{\oplus} \mathcal{F}(z)\, d\nu(z)$ *un système dynamique décomposable.* $\mathcal{F}$ *est discret* (*resp. continu*) *si, et seulement si,* $\mathcal{F}(z)$ *est discret* (*resp. continu*) *presque partout.*

Démonstration. — Supposons $\mathcal{F}$ discret, soit $E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z)$ un G-atome de $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}^G$-support I (*cf.* [4]) d'après le lemme 1, $E(z)$ est un

G-atome de $\mathscr{C}^G(z)$-support $I(z)$ presque partout, donc $\mathscr{F}(z)$ est discret partout (*cf.* [4]).

Supposons $\mathscr{F}$ décomposable continu. Soit $Y = \{ z \in Z ; \mathscr{F}(z)$ non continu $\}$. On va montrer qu'il existe un G-atome $E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z)$ avec $E(z) \neq 0$ pour $z \in Y$, on en déduira alors que Y est négligeable :

1° Par la technique classique (*cf.* [6]), on se ramène au cas où :

(*a*) Le champ $z \to \mathfrak{H}(z)$ est un champ constant $\mathscr{H}(z) = \mathfrak{H}_0$, $z \in Z$;

(*b*) Z est compact métrisable, et il existe des applications *continues* :

$$z \to T_n(z), \quad z \to T'_n(z), \quad s \to S_n(z), \quad z \to S'_n(z),$$
$$z \to U_{g_n}(z), \qquad n \in N,$$

de Z dans la boule unité $\mathscr{L}_1$ de $\mathscr{L}(\mathfrak{H}_0)$ (avec $U_{g_n}(z)$ unitaires, $\{ g_n \} = K$ un sous-groupe dénombrable dense de G) munie de la topologie forte, telles que, pour tout $z \in Z$, les $T_n(z)$ (resp. $T'_n(z)$, $S_n(z)$, $S'_n(z)$) engendrent $\mathscr{A}(z)$ (resp. $\mathscr{A}'(z)$, $\mathscr{S}(z)$, $\mathscr{S}'(z)$). On suppose que, pour tout $n \in N$, il existe $n' \in N$ tel que

$$T_n(z)^* = T_{n'}(z), \qquad T'_n(z)^* = T'_{n'}(z), \qquad S_n(z)^* = S_{n'}(z), \qquad S'_n(z)^* = S_{n'}(z)$$

pour tout $z \in Z$.

2° Soit Q l'ensemble des couples $(z, T) \in Z \times \mathscr{L}_1$, tels que :

(i) $TT'_n(z) = T'_n(z)\, T$, $\forall\, n \in N$;

(ii) T est un projecteur;

(iii) $(TT_n(z)\, T)(TS'_k(z)\, T) = (TS'_k(s)\, T)\,(TT_n(z)\, T)$, $\forall\, n \in N$, $\forall\, k \in N$;

(iv) $T \neq 0$.

Q est un sous-ensemble borélien de $Z \times \mathscr{L}_1$, tel que, pour tout $z \in Y$, l'ensemble des T tels que $(z, T) \in Q$ est non vide. D'après [6] (Appendice V), il existe une application ν-mesurable $z \to E(z)$ définie sur une partie ν-mesurable Z' contenant Y telle que $(z, E(z)) \in Q$ pour tout $z \in Z'$, on prend $E(z) = 0$ pour $z \in Z - Z'$. Les $E(z)$ sont des G-atomes d'après (iii), $E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z)$ est donc un G-atome de $\mathscr{A}$, et $E(z) \neq 0$ sur Z' contenant Y.

Le reste de la proposition en découle.

Q. E. D.

III. — Champs de systèmes finis

THÉORÈME III.1. — *Soit* $\mathcal{F} = \int^{\oplus} \mathcal{F}(z)\, d\nu(z)$ *un système dynamique décomposable.* $\mathcal{F}$ *est infini* (*resp. proprement fini*) *si, et seulement si,* $\mathcal{F}(z)$ *est fini* (*resp. proprement infini*) *presque partout.*

Démonstration :

(α) Supposons que $\mathcal{F}$ est fini, il existe dont un état normal fidèle invariant φ sur $\mathcal{A}$, en utilisant la représentation cyclique associée à φ et [6] (proposition II, § 3-11, p. 185) on peut supposer que $\mathcal{A}$ admet un vecteur $\xi = \int^{\oplus} (z)\, d\nu(z)$ totalisateur et séparateur et $\| \xi(z) \| = 1$, $\forall z \in Z$. Il en résulte que $\xi(z)$ est totalisateur et séparateur pour $\mathcal{A}(z)$, et de plus on a ξ (resp. $\xi(z)$) invariant par U_g (resp. $U(z)_g$) pour tout $g \in G$. L'état normal $\omega_{\xi(z),\xi(z)}$ est donc fidèle et invariant sur $\mathcal{A}(z)$, et $\mathcal{F}(z)$ est fini presque partout.

(β) Supposons $\mathcal{F}$ proprement infini. Soit $Y = \{ z \in Z ; \mathcal{F}(z)$ non proprement infini $\}$. On va montrer qu'il existe une forme linéaire positive normale invariante $\varphi = \int^{\oplus} \varphi(z)\, d\nu(z)$ telle que $\varphi(z) \neq 0$ pour tout $z \in Y$, on en déduira que Y est négligeable, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(z)$ est proprement infini presque partout. On reprend la partie 1° de la démonstration de la proposition II.1. Soit Q l'ensemble des couples $(z, \varphi) \in Z \times \mathcal{E}_1$ ($\mathcal{E}_1$ est l'ensemble des *états* normaux de $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ qui est un espace polonais pour la topologie normique) tels que

$$\text{(i)} \quad \varphi(U_{g_n}(z)\, T_k(z)\, U_{g_n}(z)^{-1}) = \varphi(T_k(z)), \qquad \forall n \in N, \quad \forall k \in N.$$

Alors Q est un sous-ensemble fermé de $Z \times \mathcal{E}_1$. D'après [6] (Appendice V), il existe une application mesurable $z \longrightarrow \varphi(z)$ définie sur une partie ν-mesurable Z' de Z telle que $(z, \varphi(z)) \in Q$ pour tout $z \in Z'$, et on prend $\varphi(z) = 0$ pour $z \in Z - Z'$. La forme linéaire positive normale $\varphi = \int^{\oplus} (z)\, d\nu(z)$ est invariante par G d'après (i), et $\varphi(z) \neq 0$ sur Z', donc sur Y. Le reste du théorème en découle.

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\mathcal{F} = \int^{\oplus} \mathcal{F}(z)\, d\nu(z)$ *un système décomposable,* $e = \int^{\oplus} e(z)\, d\nu(z)$ *la partie finie de* $\mathcal{F}$ (*cf.* [4]). *Alors* $e(z)$ *est la partie finie de* $\mathcal{F}(z)$ *pour presque tout* z, *et*

$$E^G = \int^{\oplus} E^G(z)\, d\nu(z),$$

où E^G *et* $E^G(z)$ *désignent les espérances conditionnelles invariantes canoniques associées aux systèmes* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}(z)$, $z \in Z$.

Démonstration. — La première partie résulte du théorème. Pour montrer que $E^G = \int^{\oplus} E^G(z)\, d\nu(z)$, on peut se ramener au cas où $\mathcal{F}$ est fini (par systèmes induits), on reprend alors la partie (α) de la démonstration du théorème, soient $\mathfrak{H}' = \overline{\mathcal{I}\xi}$, $\mathfrak{H}'(z) = \overline{\mathcal{I}(z)\xi(z)}$, $P = \int^{\oplus} P(z)\, d\nu$ le projecteur sur $\mathfrak{H}'$. Soit $a = \int^{\oplus} a(z)\, d\nu(z) \in \mathcal{A}$. D'après [19], on a

$$P(a\xi) = (E^G a)\xi$$

et

$$P(z)(a(z)\xi(z)) = (E^G(z)\, a(z))\xi(z), \qquad \forall z \in Z,$$

donc

$$\int^{\oplus} P(z)\, a(z)\xi(z)\, d\nu(z) = \int^{\oplus} (E^G a)(z)\xi(z)\, d\nu(z).$$

Comme $\xi(z)$ est séparateur pour $\mathcal{A}(z)$, on a

$$E^G(z)\, a(z) = (E^G a)(z) \quad \text{p. p.},$$

d'où

$$E^G = \int^{\oplus} E^G(z)\, d\nu(z).$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 2. — *Un système dynamique* $\mathcal{F} = \int^{\oplus} \mathcal{F}(z)\, d\nu(z)$ *est simplicial* (*resp. quasi large, large*) (*cf.* [5]) *si, et seulement si,* $\mathcal{F}(z)$ *est simplicial* (*resp. quasi large, large*) *presque partout.*

Démonstration :

(i) ($\mathcal{F}$ simplicial) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{I}_e$ abélienne) $\Leftarrow$ ($\mathcal{I}(z)_{e(z)}$ abélienne p. p.) ou encore ($\mathcal{F}(z)$ simplicial p. p.).

(ii) ($\mathcal{F}$ quasi-large) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{I}_{e(z)} = \mathcal{C}_e^G$) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{I}(z)_{e(z)}$ p. p.) ou encore ($\mathcal{F}(z)$ quasi-large p. p.).

(iii) La relation $e \in \mathcal{C}$ équivaut $e(z) \in \mathcal{C}(z)$ p. p.

Il résulte de (ii) et (iii) que $\mathcal{F}$ est large, si, et seulement si, $\mathcal{F}(z)$ est large presque partout.

IV. — Champs de systèmes commutatifs

Soit $\mathcal{F} = \int^{\oplus} \mathcal{F}(z)\, d\nu(z)$ un système dynamique commutatif décomposable de la forme $\mathcal{F} = (\mathcal{A}, G, U)$, où $\mathcal{A} = L^\infty(M, \mathcal{B}, m)$, m une probabilité quasi invariante sur $(M, \mathcal{B})$; d'après [6] (p. 185), en changeant si nécessaire l'espace $\mathfrak{H}$, on peut supposer que $\mathfrak{H} = L^2(M, \mathcal{B}, m)$. Soit $\xi = \int^{\oplus} \xi(z)\, d\nu(z)$ le vecteur totalisateur et séparateur canonique défini par la classe dans $L^2(M, \mathcal{B}, m)$ de la fonction χ_M. On a $\omega_{\xi,\xi} = m$. On peut supposer que, pour tout $z \in Z$, $\| \xi(z) \| = 1$ et que $\xi(z)$ est totalisateur et séparateur pour $\mathcal{A}(z)$. Posons $m(z) = \omega_{\xi(z), \xi(z)}$, nous avons alors $m = \int m(z)\, d\nu(z)$; $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}(z)$) est abélienne maximale dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathfrak{H}(z))$ et $\mathcal{A}(z) = L^\infty(M(z), \mathcal{B}(z), m(z))$, $z \in Z$.

Montrons d'abord quelques lemmes préliminaires.

LEMME IV.1. — *Soient $\mathcal{F} = (M, \mathcal{B}, m; G)$ un système dynamique commutatif, $E \in \mathcal{B}$, $m(E) \neq 0$, et soit μ une mesure sur E, $\mu \ll m$; alors μ est invariante par le groupe induit G_E (cf. [3], si, et seulement si,*

$$\mu(f \chi_E \chi_{g^{-1}E}) = \mu(f_g \chi_{gE} \chi_E), \qquad \forall f \in L^\infty(m)^+, \quad \forall g \in G.$$

Démonstration. — Le lemme résulte immédiatement des propriétés des systèmes induits (*cf.* [3]).

LEMME IV.2. — *Soient $\mathcal{F} = (M, \mathcal{B}, m; G, U)$ un système dynamique commutatif concret réalisé sur $L^2(m)$, μ une mesure σ-finie, $\mu \ll m$. On suppose que μ est invariante par un sous-groupe dense K de G. Alors μ est G-invariante.*

Démonstration. — Soit $E \in \mathcal{B}$ tel que $0 < \mu(E) < \infty$, on va montrer que μ_E est G_E-invariante : soit $h = d\mu_E/dm$, soit $y = \sqrt{h}$, considérons $\{ g \in G;\ \langle T_f T_{\chi_E} U_g^* T_{\chi_E} U_o y, y \rangle = \langle U_g T_f T_{\chi_E} U_g^* T_{\chi_E} y, y \rangle, f \in L^\infty(m) \}$.

D'après l'hypothèse et le lemme 1, cet ensemble contient K, comme il est fermé dans G, il coïncide avec G, donc μ_E est G_E-invariante d'après le lemme 1.

LEMME IV.3. — *Soit* $\mathscr{F} = \int^{\oplus} \mathscr{F}(z)\, d\nu(z)$ *un système commutatif décomposable.* $\mathscr{F}$ *est de type* I_n, $n = 1, 2, \ldots, \mathscr{N}$ *si, et seulement si,* $\mathscr{F}(z)$ *est de type* I_n *presque partout.*

Démonstration. — On peut vérifier immédiatement que, si

$$E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z) \quad \text{et} \quad F = \int^{\oplus} F(z)\, d\nu(z)$$

sont deux projecteurs de $\mathscr{A}$, alors la relation $E \sim_G F$ implique $E(z) \sim_G F(z)$ presque partout. Le lemme résulte alors du lemme II.1, de la proposition II.1 et de [3].

Q. E. D.

LEMME IV.4. — *Soit* $\mathscr{F} = \int^{\oplus} \mathscr{F}(z)\, d\nu(z)$ *un système dynamique commutatif décomposable. Si* $\mathscr{F}$ *est purement infini, alors* $\mathscr{F}(z)$ *est purement infini presque partout.*

Démonstration :

1° On utilise les notations du début du paragraphe et aussi la technique et les notations du 1° de la démonstration de la proposition II.1. Soit

$$Y = \{ z \in Z;\ \mathscr{F}(z) \text{ non purement infini} \}.$$

On va montrer qu'il existe un projecteur G-fini $E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z)$ de $\mathscr{A}$ tel que $E(z) \neq 0$ pour $z \in Y$. On en déduira alors que Y est négligeable.

2° Soit Q l'ensemble des triplets $(z, T, y) \in Z \times \mathscr{L}_1 \times \mathfrak{H}_0$ tels que :

(i) $TT'_n(z) = T'_n(z)\, T$, $\forall\, n \in N$;

(ii) T est un projecteur;

(iii) $Ty = y$;

(iv) $\langle T_n(z)\, TU^*_{g_k}(z)\, TU_{g_k}(z)\, y, y \rangle = \langle U_{g_k}(z)\, T_n(z)\, TU_{g_k}(z)^*\, Ty \rangle$, pour tout $n \in N$, pour tout $k \in N$;

(v) $\| y \| = 1$.

L'ensemble Q est fermé dans $Z \times \mathscr{L}_1 \times \mathfrak{H}_0$. Pour $z \in Y$, l'ensemble des (T, y) de $\mathscr{L}_1 \times \mathfrak{H}_0$ tels que $(z, T, y) \in Q$ est non vide. Il existe donc (*cf.* [6], Appendice V) des applications ν-mesurables $z \longrightarrow E(z)$ et $z \longrightarrow \eta(z)$ définies dans une partie ν-mesurable Z' de Z contenant Y telles que $(z, E(z), \eta(z)) \in Q$ pour tout $z \in Z'$; on prend $E(z) = 0$ et $\eta(z) = 0$ pour $z \in Z - Z'$. Soient

$$E = \int^{\oplus} E(z)\, d\nu(z) \qquad \text{et} \qquad \eta = \int^{\oplus} \eta(z)\, d\nu(z),$$

E est un projecteur de $\mathscr{A}$. D'après (iv), $\omega_{\eta, \eta}$ définit une mesure K_E-invariante sur E et par suite G_E-invariante. Donc E est un projecteur G-fini.

Q. E. D.

LEMME IV.5. — *Soit* $\mathscr{F} = \int^{\oplus} \mathscr{F}(z)\, d\nu(z)$ *un système commutatif décomposable. Si* $\mathscr{F}$ *est semi-fini, alors* $\mathscr{F}(z)$ *est semi-fini presque partout.*

Démonstration. — D'après [3], nous avons $I = \sum_{n \in N} E_n$, où E_n sont des projecteurs G-finis deux à deux orthogonaux de $\mathscr{A}$, on en déduit immédiatement que $I(z) = \sum_n E_n(z)$, où $E_n(z)$ sont des projecteurs G-finis deux à deux orthogonaux de $\mathscr{A}(z)$, et par suite $\mathscr{F}(z)$ est semi-fini (*cf.* [3]) pour presque tout $z \in Z$.

Q. E. D.

Il résulte de ce qui précède le théorème suivant.

THÉORÈME IV.1. — *Un système dynamique commutatif décomposable* $\mathscr{F} = \int^{\oplus} \mathscr{F}(z)\, d\nu(z)$ *est fini (resp. semi-fini proprement infini, purement infini, discret, continu) si, et seulement si,* $\mathscr{F}(z)$ *possède la propriété correspondante pour presque tout* z.

COROLLAIRE. — *Un système dynamique commutatif décomposable* $\mathscr{F} = \int^{\oplus} \mathscr{F}(z)\, d\nu(z)$ *est de type* J, $J = I_1, I_2, \ldots, I_{\mathscr{N}}, II_1, II_\infty, III$ *si, et seulement si,* $\mathscr{F}(z)$ *est de type* J *pour presque tout* z.

V. — Désintégration des systèmes dynamiques

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{A}, G, U)$ un système dynamique concret opérant sur un espace de Hilbert séparable $\mathfrak{H}$, et soit Z une sous-W^*-algèbre de $\mathscr{C}^G$. La désintégration de $\mathfrak{H}$, de $\mathscr{A}$, de U, et par suite de $\mathscr{F}$, par rapport à Z ne présente aucune difficulté. En particulier, en prenant $Z = \mathscr{C}^G$, on obtient une désintégration de $\mathscr{F}$ en des systèmes centralement ergodiques (i. e. tels que $\mathscr{C}^G(z) = \mathbf{C}\, I(z)$).

En ce qui concerne les systèmes dynamiques commutatifs, d'après un résultat de G. W. MACKEY (*cf.* [19]) tout système dynamique concret sur un espace séparable provient d'un G-espace borélien standard $(M, \mathscr{B})$ pour lequel l'application $G \times M \ni (g, x) \to gx \in M$ est mesurable muni d'une mesure quasi-invariante m.

THÉORÈME V.1. — *Soit $(M, \mathscr{B})$ un G-espace borélien standard avec G localement compact séparable, soit m une probabilité sur M quasi invariante par G. Il existe un espace borélien standard Z, une application mesurable p de M sur Z, une désintégration*

$$m = \int_Z m_z(d\nu(z), \qquad \text{ou} \quad \nu = p(m),$$

de m associée à p, tels que :

1° *$p_0\, g = p$ pour tout $g \in G$;*

2° *Pour tout $z \in Z$, m_z est une probabilité sur M quasi invariante et ergodique;*

3° *m_z est concentrée sur l'ensemble borélien invariant $p^{-1}(z)$, $z \in Z$. Cette désintégration est essentiellement unique dans le sens suivant : si Z', p', ν', $m = \int_{Z'} m'_{z'}\, d_{\nu'}(z')$ sont les éléments d'une autre désintégration possédant ces propriétés, alors il existe un ensemble ν-négligeable $N \subset Z$, un ensemble ν'-négligeable $N' \subset Z'$ et une bijection bimesurable (par rapport à ν et ν') f de $Z - N$ sur $Z' - N'$ tels que, pour tout $z \in Z - N$, on ait $m'_{f(z)} = m_z$.*

Le système $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ est fini (resp. semi-fini, proprement infini, purement infini, discret continu, de type $I_1, \ldots, I_{\mathscr{N}}$, II, II_∞, III), si, et seulement si, le système $\mathscr{F}(z) = (M, \mathscr{B}, m_z; G)$ possède la propriété correspondante pour presque tout z.

Démonstration. — D'après un résultat de MACKEY et VARADARAJAN (*cf.* [19], [24]) on peut supposer que M est un espace compact métrisable et que l'application $G \times M \ni (g, x) \to gx \in M$ est continue. Dans cette situation, pour toute mesure bornée μ sur M, l'application $G \ni g \to g\,\mu$ est vaguement continue.

Soit $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}^G$ l'ensemble des éléments invariants de $\mathscr{B}$, on note $\mathfrak{H} = L^2(m)\xi$ la classe de χ_M dans $L^2(m)$, T_f l'opérateur de multiplication pour $f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B})$, $\mathscr{A} = \{ T_f ; f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B}) \}$, U la représentation continue canonique associée à m de G dans $\mathfrak{H}$, $\mathscr{I} = \mathscr{A}^G$. D'après [19], nous avons

$$\mathscr{I} = \{ T_f ; f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B}_0) \}.$$

Soit $p \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B}, m)$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, telle que T_p engendre $\mathscr{I}$, soit $Z_0 =$ support de ν, avec $\nu = p(m)$, soit $m = \int_{Z_0} m_z \, d\nu(z)$ une désintégration de m associée à p (*cf.* [1], chap. VI). Comme $p(M)$ est ν-mesurable et porte la mesure ν (*cf.* [1], chap. V, p. 70), en enlevant un ensemble ν-négligeable de Z_0, on peut supposer que :

(*a*) m_z est une probabilité pour tout $z \in Z_0$;

(*b*) m_z est concentrée sur $p^{-1}(z)$, $\forall z \in Z_0$;

(*c*) $m = \int_{Z_0} m_z \, d\nu(z)$;

(*d*) p est surjective de M sur Z_0.

Soit $\mathfrak{H} = \int_{Z_0}^{\oplus} \mathfrak{H}(z) \, d\nu(z)$ une désintégration de $\mathfrak{H}$ sur Z_0 associée à la désintégration de m comme dans [16], lemme 6-4, p. 371 (ou [15]), avec

$$\mathfrak{H}(z) = L^2(M, \mathscr{B}, m_z),$$

$$T_f = \int^{\oplus} T_f^z \, d\nu(z), \qquad \forall f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B}),$$

où T_f^z désigne l'opérateur de multiplication sur $L^2(M, \mathscr{B}, m_z)$ associé à f;

$$\xi = \int^{\oplus} \xi(z) \, d\nu(z), \qquad \text{où} \quad \omega_{\xi(z), \xi(z)} = m_z,$$

$$\mathscr{A}(z) = \{ T_f^z ; f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B}) \}.$$

La représentation U de G dans $\mathfrak{H}$ est décomposable, on peut désintégrer U (*cf.* [7]),

$$U_g = \int^{\oplus} U_g^z \, d\nu(z), \qquad \forall g \in G,$$

où U^z désigne une représentation *continue* de G dans $\mathfrak{H}(z)$, pour tout $z \in Z_0 - N_0 = Z_1$, où N_0 est un ensemble ν-négligeable.

Soit K un sous-groupe dénombrable dense de G; soit $\mathscr{S}$ un ensemble dénombrable de fonctions continues sur M dense dans $\mathscr{C}(M)$ pour la topologie uniforme. Comme

$$T_{f_g} = U_g T_f U_g^*, \qquad \forall f \in \mathscr{C}(M), \quad \forall g \in G$$

ou

$$\int^{\oplus} T_{f_g}^z \, d\nu(z) = \int^{\oplus} U_g^z \, T_f^z \, U_g^{z*} \, d\nu(z),$$

il existe un ensemble ν-négligeable N_1 de Z_1 tel que, pour tout $z \in Z_2 = Z_1 - N_1$, on ait

$$T_{f_g}^z = U_g^z \, T_f^z \, U_g^{z*}, \qquad \forall f \in \mathscr{S}, \quad \forall g \in K.$$

Pour f fixée dans $\mathscr{S}$, soient η_z et ψ_z deux vecteurs quelconques de $\mathfrak{H}(z)$, les applications $G \ni g \to \langle T_{f_g}^z \eta_z, \psi_z \rangle$ et $G \ni g \to \langle U_g^z \, T_f^z \, U_g^z \eta_z, \psi_z \rangle$ sont continues (la première d'après la remarque du début de la démonstration) comme elles coïncident sur K, elles sont donc égales; il en résulte que

$$T_{f_g}^z = U_g^z \, T_f^z \, U_g^{z*}, \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{L}^\infty(M, \mathscr{B}) \text{ et tout } g \in G.$$

La mesure m_z est donc quasi invariante pour tout $z \in Z_2$.

Comme $\mathscr{I}$ est l'algèbre des opérateurs diagonalisables et $\mathscr{I} = (\mathscr{A} \cup U_G)'$, il existe un ensemble ν-négligeable N_2 de Z_2, tel que

$$(\mathscr{A}(z) \cup U_G^z)' = C.I(z), \qquad \forall z \in Z_3 = Z_2 - N_2.$$

Autrement dit, m_z est quasi invariante et ergodique pour tout $z \in Z_3$; soit Z un sous-ensemble de Z_3, de complémentaire ν-négligeable, tel que la structure borélienne induite sur Z soit standard; on a donc démontré l'existence d'une désintégration possédant les propriétés requises.

L'unicité résulte de [1], chap. VI; le reste du théorème résulte des résultats de IV.

D'après [8], on dit que G opère régulièrement sur M si l'espace borélien quotient des orbites M/G est dénombrablement séparé. Soit m une mesure σ-finie quasi invariante de M. Soient p l'application canonique de M sur M/G, et ν une pseudo-image de m par p (i. e. $\nu = p(\overline{m})$, où $\overline{m}$ est une mesure positive finie équivalente à m). Chaque point de M/G est un espace homogène n'admettant qu'une classe de mesures quasi invariantes (*cf.* [17]). On dira qu'un espace homogène est fini (resp. semi-fini, de type I, ...) si le système dynamique associé est fini (resp. semi-fini, de type I, ...).

COROLLAIRE 1. — *Soient* $(M, \mathscr{B})$ *un* G*-espace borélien standard, avec* G *localement compact séparable,* m *une mesure* σ*-finie quasi invariante. On suppose que* G *opère régulièrement sur* M. *Soit* $\bar{\nu}$ *une pseudo-image de* m *sur* M/G. *Soit le système* $(M, \mathscr{B}, m; G)$ *est fini (resp. semi-fini, proprement infini, purement infini, discret, continu, de type* $I_1, \ldots, I_{\mathscr{N}}, II_{\infty}, III$*) si, et seulement si, presque tous les espaces homogènes de* M/G *possèdent la propriété correspondante.*

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses du corollaire* 1, *il existe une mesure* σ*-finie invariante par* G *et équivalente à* m *si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1° *G est commutatif;*

2° *G est un groupe de Lie nilpotent connexe;*

3° *G est discret.*

Démonstration. — En effet si l'une de ces conditions est vérifiée, chaque espace homogène est semi-fini, par suite $(M, \mathscr{B}, m; G)$ est semi-fini.

Q. E. D.

Remarques. — Dans [9], DIXMIER a démontré le corollaire 2 (cas G commutatif) avec l'hypothèse supplémentaire que m est relativement invariante par G (sur ce problème *voir* aussi [2]).

Le théorème IV.1 montre que l'on peut « intégrer » les mesures σ-finies invariantes sur les systèmes composants pour obtenir une mesure σ-finie invariante sur le système global.

Section B

Classification des systèmes dynamiques et classification des algèbres de von Neumann

I. — Notations

Soient $\mathfrak{A}$ une W^*-algèbre, $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ l'ensemble des éléments unitaires de $\mathfrak{A}$, et $\mathfrak{A}_0$ une sous-W^*-algèbre de $\mathfrak{A}$, nous notons

$$\mathscr{N}(\mathfrak{A}_0) = \{ u \in \mathscr{U}(\mathfrak{A}); u\, \mathfrak{A}_0\, u^* = \mathfrak{A}_0 \}.$$

On a $\mathscr{U}(\mathfrak{A}_0) \subset \mathscr{N}(\mathfrak{A}_0)$. On désigne par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ le groupe de tous les automorphismes de $\mathfrak{A}$. Pour $u \in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$, on définit $i_u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ par $i_u(.) = u.u^*$. Si $u \in \mathscr{N}(\mathfrak{A}_0)$, il est clair que $i_u|_{\mathscr{A}_0}$ est dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_0)$.

II. — Catégorie des W^*-couples

1. Définitions

Nous rappelons quelques résultats et notations classiques : une sous-W^*-algèbre $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}$ est dite *régulière* si $\mathscr{N}(\mathfrak{A}_0)$ engendre $\mathfrak{A}$ (*cf.* [8], [18]). Nous appelons W^*-couple un couple $\mathscr{P} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ où $\mathfrak{A}$ est une W^*-algèbre, $\mathfrak{A}_0$ est une sous-W^*-algèbre abélienne maximale régulière de $\mathfrak{A}$ (*cf.* [18]).

Soient $(\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}_0^1)$, et $(\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_0^2)$ deux W^*-couples, un morphisme de $(\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}_0^1)$ dans $(\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_0^2)$ est un morphisme α de $\mathfrak{A}^1$ dans $\mathfrak{A}^2$ tel que :

(*a*) $\alpha(\mathfrak{A}_0^1) \subset \mathfrak{A}_0^2$;

(*b*) Si $U_1 \in \mathscr{N}(\mathfrak{A}_0^1)$, il existe $U_2 \in \mathscr{N}(\mathfrak{A}_0^2)$ tel que

$$\alpha(U_1\, a\, U_1^*) = U_2\, \alpha(a)\, U_2^*, \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{A}_0^1; \tag{1}$$

(*c*) Si $U_2 \in \mathscr{N}(\mathfrak{A}_0^2)$, il existe $U_1 \in \mathscr{N}(\mathfrak{A}_0^2)$ vérifiant la condition (1).

Nous obtenons ainsi une catégorie appelée la catégorie des W^*-couples.

2. W^*-couples réduits

PROPOSITION II.1. — *Soient* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ *un* W^**-couple, et* $\hat{E}$ *une projection de* $\mathfrak{A}_0$*; le couple* $(\mathfrak{A}_{\hat{E}}, \mathfrak{A}_{\hat{E}})$ *est un* W^**-couple appelé le* W^**-couple réduit sur* $\hat{E}$*, et est noté* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)_{\hat{E}}$.

Démonstration :

(*a*) $\mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ est abélienne maximale dans $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$: soit $\hat{E}\, a\, \hat{E} \in \mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ tel que

$$\hat{E}\, a_0\, \hat{E}\hat{E}\, a\, \hat{E} = \hat{E}\, a\, \hat{E}\hat{E}\, a_0\, \hat{E}, \qquad \forall\, a_0 \in \mathfrak{A}_0.$$

Comme $\mathfrak{A}_0$ est abélienne maximale, il en résulte que $\hat{E}\, a\, \hat{E} \in \mathfrak{A}_0$, donc $\hat{E}\, a\, \hat{E} \in \mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ et $\mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ est bien abélienne maximale.

(*b*) $\mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ est régulière dans $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$: soient $U \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}_0)$, et $g = i_U|_{\mathcal{A}_0}$, $g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_0)$. Comme dans [3], IV, soit $g_{\hat{E}}$ l'automorphisme induit de g sur $\hat{E}$, il existe une famille orthogonale $\{\hat{E}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de projections de $\mathfrak{A}_0$ de somme $\hat{E}$, et une suite $\{k(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{Z}$ telles que

$$g_{\hat{E}}(a) = \sum_{n \in \mathbf{N}} g^{k(n)}(\hat{E}_n a), \qquad \forall a \in \mathfrak{A}_0,$$
$$\{g^{k(n)} \hat{E}_n\}_{n \in \mathbf{N}} \quad \text{est une partition de } \hat{E}.$$

Soit $U(g_{\hat{E}}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} U^{k(n)} \hat{E}_n + (I - \hat{E})$; il est clair que $\hat{E} U(g_{\hat{E}}) \hat{E} \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}_{0\hat{E}})$ (dans $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$); soit N le groupe engendré par $\{U(g_{\hat{E}})_{\hat{E}}, U \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}_0)\}$. On a $N \subset \mathcal{N}(\mathfrak{A}_{0\hat{E}})$. Nous allons montrer que N et $\mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ engendrent $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$: soit $U \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}_0)$, et considérons $\hat{E} U \hat{E}$; par le lemme IV.3 de [3], il existe une famille orthogonale $\{\hat{F}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de projections dans $\mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ de somme $\hat{E}$ et une suite $\{l(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{Z}$ telles que :

$$\hat{E} U \hat{E} = \sum_{n \in \mathbf{N}} U(g_{\hat{E}})^{l(n)} \hat{F}_n.$$

Donc, pour tout $U \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}_0)$, $\hat{E} U \hat{E}$ appartient à la W^*-algèbre engendrée par $N \subset \mathcal{N}(\mathfrak{A}_{0\hat{E}})$ et $\mathfrak{A}_{0\hat{E}}$, cette W^*-algèbre est égale à $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$ par la régularité de $\mathfrak{A}_0$ et [6] (proposition I, § 2-1, p. 16).

3. **Quotients**

PROPOSITION II.2. — *Soient* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ *un* W^**-couple,* α *un morphisme de* $\mathfrak{A}$ *dans une* W^**-algèbre* $\mathfrak{M}$; *alors* $(\alpha(\mathfrak{A}), \alpha(\mathfrak{A}_0))$ *est un* W^**-couple, appelé le* W^**-couple quotient de* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ *par* α.

Démonstration. — Soit $\hat{E}$ le support de α, on a $\hat{E} \in \text{centre}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}_0$; comme $\alpha(\mathfrak{A}_0) \sim \mathfrak{A}_{0\hat{E}}$ et $\alpha(\mathfrak{A}) \sim \mathfrak{A}_{\hat{E}}$, la proposition résulte de la proposition II.1.

Q. E. D.

4. **Produits tensoriels**

PROPOSITION II.3 (*cf.* [23]). — *Soient* $\mathcal{P}_1 = (\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}_0^1)$ *et* $\mathcal{P}_2 = (\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_0^2)$ *deux* W^**-couples; alors* $(\mathfrak{A}^1 \otimes \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_0^1 \otimes \mathfrak{A}_0^2)$ *est un* W^**-couple appelé le produit tensoriel de* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$, *et est noté* $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

5. Produits

PROPOSITION II.4. — *Soit* $((\mathfrak{A}^i, \mathfrak{A}_0^i))_{i \in J}$ *une famille de* W^**-couples; alors* $(\prod_J \mathfrak{A}^i, \prod_J \mathfrak{A}_0^i)$ *est un* W^**-couple appelé le produit des* $(\mathfrak{A}^i, \mathfrak{A}_0^i)$, $i \in J$, *et est noté* $\prod_J (\mathfrak{A}^i, \mathfrak{A}_0^i)$. *Réciproquement, si* $(E_i)_{i \in J}$ *est une famille orthogonale des projection du centre de* $\mathfrak{A}$ *de somme* I, *alors* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0) \sim \prod_J (\mathfrak{A}_{E_i}, \mathfrak{A}_{0E_i})$.

La démonstration est immédiate.

III. — Le foncteur de Krieger et ses propriétés fondamentales

Dans ce paragraphe, nous étudions une construction due à W. KRIEGER qui associe canoniquement à tout système dynamique commutatif séparable un W^*-couple. Dans son papier (*cf.* [18]), KRIEGER fait la construction pour les systèmes ergodiques, mais on peut vérifier facilement que la construction reste valable pour tous les systèmes dynamiques séparables; pour faciliter la lecture, nous rappelons quelques notations de cette construction et ses propriétés fondamentales.

1. La construction de Krieger

Soit $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ un système dynamique séparable, i. e. G est un groupe dénombrable et $(M, \mathscr{B}, m)$ est un espace de Lebesgue, soit $\mathscr{I} = \mathscr{I}(\mathscr{F})$ la sous-σ-algèbre des éléments invariants de $\mathscr{B}$. Pour $x \in M$, soit $\mathscr{H}_x$ l'espace de Hilbert avec une base orthonormale $(e_y)_{y \in \mathrm{Orb}_G x}$. Le champ $x \to \mathscr{H}_x$ est muni d'une structure mesurable de la manière suivante : un champ de vecteurs $x \to v_x \in \mathscr{H}_x$, $x \in M$ est mesurable si la fonction $x \to \langle v_x, e_{gx} \rangle$, $x \in M$, est mesurable pour tout $g \in G$. On prend alors $\mathscr{H} = \int_M^{\oplus} \mathscr{H}_x \, dm(x)$.

(*a*) *La première représentation covariante de* $(L^\infty(\mathscr{B}), [G])$ *dans* $\mathscr{H}$. — On définit une représentation $L^\infty(\mathscr{B}) \ni a \to \hat{a} = \int_M^{\oplus} \hat{a}_x \, dm(x) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ par

$$\hat{a}_x e_y = a(y) e_y, \qquad \text{pour } x \in M \quad \text{et} \quad y \in \mathrm{Orb}_G x.$$

On note $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}) = \{ \hat{a}; a \in L^\infty(\mathscr{B}) \}$.

Soit $S \in [G]$, on définit $\hat{S} = \int_M^{\oplus} \hat{S}_x \, dm(x)$, où $\hat{S}_x e_y = e_{Sy}$, pour $x \in M$, $y \in \mathrm{Orb}_G x$.

On note $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathscr{F})$ la W^*-algèbre engendrée par $\mathfrak{A}_0$ et $\{ \hat{S}; S \in [G] \}$; le couple de représentations $a \to \hat{a}$ et $S \to \hat{S}$ est un couple covariant de représentations de $(L^\infty(\mathscr{B}), [G])$ (*cf.* [18], lemma 2.2). $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0)$ est un W^*-couple, et $\widehat{L^\infty(\mathscr{I})}$ est le centre de $\mathfrak{A}$.

(*b*) *La seconde représentation covariante de* $(L^\infty(\mathscr{B}), [G])$ *dans* $\mathscr{H}$. — Pour tout $a \in L^\infty(\mathscr{B})$, on définit $\tilde{a} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ par

$$\tilde{a} = \int_M^{\oplus} \tilde{a}_x \, dm(x), \qquad \tilde{a}_x v_x = a(x) v_x \quad \text{pour } x \in M \text{ et } v_x \in \mathscr{H}_x.$$

Pour tout $S \in [G]$, on définit l'opérateur $\tilde{S}$ unitaire de $\mathscr{H}$ par

$$\tilde{S} v = \int_M^{\oplus} \int \left(\frac{dS\,m}{dm}(x) \right)^{1/2} v_{S^{-1}x} \, dm(x),$$

pour

$$x \in M \quad \text{et} \quad v = \int_M^{\oplus} v_x \, dm(x) \in \mathscr{H}.$$

Le couple de représentations $a \to \tilde{a}$ et $S \to \tilde{S}$ du système $(L^\infty(\mathscr{B}), [G])$ est covariant, et on a $(\widetilde{L^\infty(\mathscr{B})} \cup [\tilde{G}])'' = \mathscr{A}'$.

2. Le foncteur de Krieger

LEMME III.1. — *Soient* $\mathscr{F}_i = (M_i, \mathscr{B}_i, m_i, G_i)$, $i = 1, 2$, *deux systèmes dynamiques; soit* Φ *un morphisme faible de* $\mathscr{F}_1$ *dans* $\mathscr{F}_2$ (*cf.* [3], I). *Alors* Φ *induit un unique morphisme* $\tilde{\Phi}$ *de* $(\mathfrak{A}(\mathscr{F}_2), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_2))$ *dans* $(\mathfrak{A}(\mathscr{F}_1), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_1))$ *tel que*

$$\hat{\Phi} a = \tilde{\Phi} a, \qquad \forall a \in L^\infty(\mathscr{B}_2).$$

Si $h_2 \in [G_2]$ *et* $h_1 \in [G_1]$ *sont tels que* $\Phi h_1 = h_2 \Phi$, *alors* $\hat{\Phi} \tilde{h}_2 = \tilde{h}_1$.

Et réciproquement, tout morphisme de $(\mathfrak{A}(\mathscr{F}_2), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_2))$ *dans* $(\mathfrak{A}(\mathscr{F}_1), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_1))$ *s'obtient de cette manière.*

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

Il résulte de ce lemme que la construction de KRIEGER définit un foncteur contravariant de la catégorie des systèmes dynamiques séparables dans la catégorie des W^*-couples.

Rappelons le théorème suivant de KRIEGER.

THÉORÈME III.1 (*cf.* [18]). — *Soit $\mathcal{F}$ un système dynamique séparable. La W^*-algèbre $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ est finie (resp. semi-finie, proprement infinie, purement infinie) si et seulement si le système dynamique possède la propriété correspondante.*

Démonstration. — Krieger a donné la démonstration dans le cas des systèmes ergodiques, mais la méthode reste valable dans le cas général (*cf.* [18], théorème 2.4, pour une autre démonstration *voir* [3]).

KRIEGER a démontré aussi (*cf.* [18], théorème 3.2) que son foncteur transforme un produit en un produit tensoriel.

IV. — Systèmes induits, W^*-algèbres réduites et comparaison des projections

1. Systèmes induits et W^*-algèbres réduites

LEMME IV.1. — *Soient $E \in \mathcal{B}$, $F \in \mathcal{B}$ tels que* $\mathrm{Supp}_G E \subset \mathrm{Supp}_G F$. *L'application $\hat{E} a \hat{E} \to \tilde{F}\hat{E} a \hat{E}\tilde{F}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$ sur $\mathfrak{A}_{\hat{E}\tilde{F}}$.*

Démonstration. — Comme $\tilde{F} \in \mathfrak{A}'$, l'application $\hat{E} a \hat{E} \to \tilde{F}\hat{E} a \hat{E}\tilde{F}$ est un morphisme de $\mathfrak{A}_{\hat{E}}$ sur $\mathfrak{A}_{\hat{E}\tilde{F}}$; il nous reste à démontrer que cette application est injective : supposons que $\tilde{F}\hat{E} a \hat{E}\tilde{F} = 0$ avec un $a \in \mathfrak{A}$; soit $\{E_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables de M telles que $E_n \nearrow M$, $m(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$0 = \tilde{F}\hat{E} a \hat{E}\tilde{F} \int_{E_n}^{\oplus} e_x \, dm(x) = \int_{F \cap E_n} \hat{E}_x a_x \hat{E}_x e_x \, dm(x), \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Donc

$$(1) \qquad \hat{E}_x a_x \hat{E}_x e_x = 0 \quad m \text{ presque tout } x \text{ de } F.$$

Comme $\hat{E}_{gx} a_{gx} \hat{E}_{gx} = \hat{E}_x a_x \hat{E}_x$ m-presque tout x de M, pour un g fixé de G (*cf.* [18], lemma 2.1) la relation (1) implique

$$(2) \qquad \hat{E}_x a_x \hat{E}_x e_x = 0 \quad m \text{ presque tout } x \text{ de } \mathrm{Supp}_G F.$$

Cette relation est l'hypothèse $\mathrm{Supp}_G E \subset \mathrm{Supp}_G F$ entraîne

$$\hat{E}_x a_x \hat{E}_x e_x = 0 \quad m \text{ presque tout } x \text{ de } M$$

puisqu'elle est clairement vérifiée pour m-presque tout x dans $M \setminus \mathrm{Supp}_G E$).

Par conséquent,

$$\hat{E} a \hat{E} \int_{E_n}^{\oplus} e_x \, dm(x) = \int_{E_n}^{\oplus} \hat{E}_x a_x \hat{E}_x e_x \, dm(x) = 0, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Comme $\left\{ \int_{E_n}^{\oplus} e_x \, dm(x) \right\}_{n \in \mathbf{N}}$ est une famille séparatrice de vecteurs pour $\mathfrak{A}$, on a $\hat{E} a \hat{E} = 0$.

Q. E. D.

LEMME IV.2. — *Soit $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ un système dynamique séparable, soit (E, F, h) un G-isomorphisme partiel. L'opérateur $\hat{h} = \int_M^{\oplus} \hat{h}_x \, dm(x)$, défini par*

$$\hat{h}_x e_y = \begin{cases} e_{hy} & \text{si } y \in \mathrm{Orb}_G x, \quad y \in E, \\ 0 & \text{si } y \in \mathrm{Orb}_G x, \quad y \notin E, \end{cases} \tag{3}$$

est une isométrie partielle de $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ et

$$\hat{h}^* = \hat{h}^{-1}, \qquad \hat{h}^* \hat{h} = \hat{E}, \qquad \hat{h} \hat{h}^* = \hat{F}. \tag{4}$$

Si $k \in [G]$, $E' \in \mathscr{B}$, $F' \in \mathscr{B}$, soit $h = k|_{E' \cap k^{-1} F'}$, alors h est un G-isomorphisme partiel de $E' \cap k^{-1} F'$ sur $k E' \cap F'$ et $\hat{h} = \hat{F}' \hat{k} \hat{E}'$.

Démonstration. — Il est clair que $\hat{h} \in \mathfrak{A}(\mathscr{F})$, la vérification de (4) et du reste du lemme est immédiate.

THÉORÈME IV.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un système dynamique séparable, soit E un sous-ensemble mesurable non négligeable de M. Alors*

$$(\mathfrak{A}_{\hat{E}}, \mathfrak{A}_{0\hat{E}}) \sim (\mathfrak{A}(\mathscr{F}_E), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_E)).$$

Démonstration. — Soient $\hat{E} = \int_M^{\oplus} \hat{E}_x \, dm(x)$, $\mathscr{H}(\mathscr{F}_E)$ l'espace de Hilbert associé au système induit $\mathscr{F}_E$; on identifie $\mathscr{H}_x(\mathscr{F}_E) \subset \mathscr{H}_x(\mathscr{F})$, $\mathscr{H}(\mathscr{F}_E) \subset \mathscr{H}(\mathscr{F})$. On a

$$\hat{E}_x \mathscr{H}_x(\mathscr{F}) = \mathscr{H}_x(\mathscr{F}_E), \qquad \forall x \in M,$$

puisque $\mathrm{Orb}_{G_E} x = E \cap \mathrm{Orb}_G x$, $\forall x \in E$ (*cf.* [3]).

Par suite,

$$\int_E^{\oplus} \hat{E}_x \mathscr{H}_x(\mathscr{F})\, dm(x) = \int_E^{\oplus} \mathscr{H}_x(\mathscr{F}_E)\, dm_E(x) = \mathscr{H}(\mathscr{F}_E). \tag{5}$$

Considérons le sous-espace $\int_E^{\oplus} \hat{E}_x \mathscr{H}_x(\mathscr{F})\, dm(x) = \tilde{E}\hat{E}\mathscr{H}(\mathscr{F})$; il est clair que

$$\mathfrak{A}(\mathscr{F}_E) \subset \mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}\tilde{E}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_E) = \mathfrak{A}_0(\mathscr{F})_{\hat{E}\tilde{E}}.$$

Pour montrer que $\mathfrak{A}(\mathscr{F}_E) = \mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}\tilde{E}}$, il suffit, d'après le lemme 2 et [6] (proposition I.2.1, p. 16) que, pour tout $g \in G$, on a

$$\tilde{E}\hat{E}\hat{g}\hat{E}\tilde{E} \in \mathfrak{A}(\mathscr{F}_E).$$

Par le lemme 2, on a $\hat{E}\hat{g}\hat{E} = \hat{h}$, où $h = g|_{E \cap g^{-1}E}$, h est un G-isomorphisme partiel. Comme h est aussi un G_E-isomorphisme partiel (*cf.* [3], IV, Lemma 3), par le lemme 2, on a $\tilde{E}\hat{E}\hat{g}\hat{E}\tilde{E} = \hat{E}\hat{h}\hat{E} \in \mathfrak{A}(\mathscr{F}_E)$.

Q. E. D.

COROLLAIRE. — *Soient $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ un système dynamique séparable, et E un ensemble mesurable non négligeable. Alors E est G-fini (resp. G-semi-fini, G-proprement infini, G-purement infini) si et seulement si $\hat{E}$ est fini (resp. semi-fini, proprement infini, purement infini).*

Démonstration. — Le type de E (resp. $\hat{E}$) est défini comme le type de $\mathscr{F}_E$ (resp. $\mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}}$); le corollaire est une conséquence du théorème et de Théorème III.1.

Remarques. — Soit $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de M en sous-ensembles invariants; alors $\mathscr{F} = \sum_n \mathscr{F}_{E_n}$ et $\hat{E}_n \in \mathrm{Centre}(\mathfrak{A}(\mathscr{F}))$, et on a

$$(\mathfrak{A}(\textstyle\sum_n \mathscr{F}_{E_n}), \mathfrak{A}_0(\sum_n \mathscr{F}_{E_n})) = \prod_n (\mathfrak{A}(\mathscr{F}_{E_n}), \mathfrak{A}_0(\mathscr{F}_{E_n})).$$

Le foncteur de Krieger transforme donc une somme en un produit.

2. Comparaison des ensembles mesurables et comparaison des projections

THÉORÈME IV.2. — *Soient $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ un système dynamique séparable, $E \in \mathscr{B}$, $F \in \mathscr{B}$. Alors E et F sont G-équivalents si et seulement si $\hat{E}$ et $\hat{F}$ sont équivalents dans $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$.*

Démonstration. — La condition est nécessaire suivant le lemme 2. Supposons que $\hat{E} \sim \hat{F}$ (dans $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$), par le théorème de comparabilité (*cf.* [3]) et la relation $\widehat{L^\infty(\mathscr{I})}$ = Centre ($\mathfrak{A}(\mathscr{F})$), on peut supposer que $E \prec_G F$ avec un G-isomorphisme partiel (E, F', h), $F' \subset F$ (*cf.* [3]).

1° Supposons que F est G-fini : par le corollaire du théorème IV.1, $\hat{F}$ est $\mathfrak{A}$-fini, mais puisque $\hat{F} \sim_{\mathfrak{A}} \hat{F}' F$, on a (*cf.* [6], Théorème III.8.1) $\hat{F} = \hat{F}'$ ou $F = F'$ et $E \sim_G F$.

2° Supposons que F est G-proprement infini : la relation $\hat{E} \sim_{\mathfrak{A}} \hat{F}$ implique que les supports centraux de $\hat{E}$ et $\hat{F}$ coïncident, comme $\widehat{L^\infty(\mathscr{I})}$ = Centre $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$, on déduit que

$$\mathrm{Supp}_G E = \mathrm{Supp}_G F.$$

Comme $\hat{F}$ est proprement infini (dans $\mathfrak{A}$), $\hat{E}$ est aussi proprement infini (dans $\mathfrak{A}$). Par le corollaire de théorème IV.1, E est G-proprement infini, et le corollaire 3 du théorème de Hopf (*cf.* [3], VI) implique que $F \prec_G E$. Par suite $E \sim_G F$ (*cf.* [3], V, proposition 1).

3° Nous obtenons le résultat pour le cas général en décomposant F en partie G-fini et en partie G-proprement infini et utilisant le corollaire du théorème IV.1.

Q. E. D.

V. — Systèmes discrets (continus) et W^*-algèbres discrètes (continues)

PROPOSITION V.1. — *Soient $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ un système dynamique séparable et E un ensemble non négligeable de M. Alors E est un G-atome si et seulement si $\hat{E}$ est une projection abélienne de $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$.*

Démonstration :

1° Soit $E \in \mathscr{B}$ un G-atome non négligeable de M; Suivant [3] (proposition VII-2), $\mathfrak{A}(\mathscr{F}_E)$ est abélienne; comme $\mathfrak{A}(\mathscr{F}_E) \sim \mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}}$ (*cf.* Théorème IV.1), on a $\mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}}$ abélienne, i. e. $\hat{E}$ est une projection abélienne de $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$.

2° Supposons que E est une projection abélienne de $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$, alors $\mathfrak{A}(\mathscr{F})_{\hat{E}} = \text{Centre}(\mathfrak{A}(\mathscr{F}))_{\hat{E}}$ (*cf.* [6]), ce qui implique

$$\widehat{L^{\infty}(\mathscr{B})}_{\hat{E}} = \mathfrak{A}_0(\mathscr{F})_{\hat{E}} = \widehat{L^{\infty}(\mathscr{I})}_E$$

ou

$$\mathscr{B}_E = \mathscr{I}_E,$$

autrement dit, E est un G-atome.

Q. E. D.

THÉORÈME V.1. — *Soit* $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ *un système dynamique séparable. Alors* $\mathscr{F}$ *est discret* (*resp. continu*) *si et seulement si* $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ *est discrète* (*resp. continue*).

Démonstration :

1° Supposons que $\mathscr{F}$ est discret; suivant [3] (III, théorème 1), il existe un G-atome B dont le G-support est M, la proposition V.1 implique que $\hat{B}$ est une projection abélienne de $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ dont le support central est I, par conséquent $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ est discrète (*cf.* [6]).

2° Supposons que $\mathscr{F}$ est purement infini; par le théorème III.1, $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ est purement infinie, donc continue.

3° Supposons que $\mathscr{F}$ est continu et semi-fini; suivant [3] (VI, proposition 1), il existe une suite décroissante $\{E_n\}_{n \in N}$ d'ensembles mesurables G-finis de M telle que

$$\text{Supp}_G E_n = M \qquad \text{et} \qquad E_n \setminus E_{n+1} \sim_G E_{n+1}, \qquad \forall n \in N.$$

La suite $\{E_n\}_{n \in N}$ est une suite décroissante de projections finies de $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$I =$ le support central de E_n, $E_n \setminus E_{n+1} \sim_{\mathfrak{A}} E_{n+1}$, $\forall n \in N$ (théorème IV.3).

Comme $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ est semi-finie (théorème III.1), le corollaire de la proposition 7, p. 233, de [6] implique que $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ est continue.

4° A partir des 1°, 2°, 3° et des remarques du paragraphe IV, on déduit le théorème.

Q. E. D.

Du théorème précédent et du corollaire du théorème IV.1, on déduit le suivant.

THÉORÈME V.2. — *Soit* $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ *un système dynamique séparable, soit* $E \in \mathscr{B}$. *Alors E est fini* (*resp. semi-fini, proprement infini, purement infini, discret, continu*) *si et seulement si la projection* $\hat{E}$ *possède la propriété correspondante.*

THÉORÈME V.3. — *Le système dynamique séparable* $\mathscr{F}$ *est de type J,* $J = I_1, \ldots, I_{\mathscr{N}}, II_1, II_\infty, III$ *si et seulement si* $\mathfrak{A}(\mathscr{F})$ *est de type J.*

En utilisant un théorème de GUICHARDET sur la caractérisation des W^*-algèbres discrètes (*cf.* [15]), le théorème V.1 et [18] (Lemma 2.5), nous obtenons un nouveau résultat.

THÉORÈME V.4. — (*Caractérisation des systèmes séparables discrets*). — *Soient* $\mathscr{F} = (M, \mathscr{B}, m; G)$ *un système dynamique séparable, et* $\mathscr{I}$ *la sous-*σ*-algèbre des éléments invariants de* $\mathscr{B}$. *Alors* $\mathscr{F}$ *est discret si et seulement si la condition suivante est vérifiée :*

Si $h \in \mathrm{Aut}(M, \mathscr{B}, m)$ *est tel que* $h B = B$, *pour tout* $B \in \mathscr{I}$, *alors* $h \in [G]$.

Remarques.

(*a*) La nécessité de la condition est claire par la structure des systèmes discrets séparables (*cf.* [3], VII, théorème 1), il serait intéressant de trouver une démonstration directe de la réciproque sans utiliser le résultat de GUICHARDET.

(*b*) La condition « $\mathscr{F}$ est séparable » est essentielle : prendre pour $(M, \mathscr{B}, m)$ l'intervalle $(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue, et et $G = \mathrm{Aut}(M, \mathscr{B}, m)$, ce système est ergodique, il satisfait à la condition du théorème et il n'est pas discret (puisque $\mathscr{F}$ est ergodique et m n'est pas atomique).

VI. — Produits des systèmes dynamiques séparables

Dans [3] (VIII), nous avons donné quelques propriétés des produits des systèmes dynamiques. En utilisant le foncteur de Krieger et les propriétés des produits tensoriels des W-algèbres (*cf.* [6],) nous déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME VI.1. — *Soient* $\mathscr{F}_1$ *et* $\mathscr{F}_2$ *deux systèmes dynamiques séparables,* $\mathscr{F}_1 = (M_1, \mathscr{B}_1, m_1; G_1)$ $\mathscr{F}_2 = (M_2, \mathscr{B}_2, m_2; G_2)$. *Alors :*

1° $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *est purement infini si et seulement si l'un des* $\mathscr{F}_1$ *et* $\mathscr{F}_2$ *est purement infini.*

2° $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *est continu si et seulement si l'un des* $\mathscr{F}_1$ *et* $\mathscr{F}_2$ *est continu.*

3° $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *est discret si et seulement si* $\mathscr{F}_1$ *et* $\mathscr{F}_2$ *sont discrets.*

4° $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$ *est fini* (*resp. semi-fini*) *si et seulement si* $\mathscr{F}_1$ *et* $\mathscr{F}_2$ *sont finis* (*resp. semi-finis*).

Remarques.

(*a*) Le théorème VI.1 reste valable si on suppose que G_1 et G_2 sont deux groupes séparables (non nécessairement dénombrables) grâce au lemme A.IV-2.

(*b*) On peut donner une démonstration directe du théorème VI.1 sans utiliser le foncteur de Krieger (nous laissons la démonstration au soin du lecteur). Le théorème VI.1 reste-t-il encore valable si l'on enlève l'hypothèse que G_1 et G_2 sont séparables ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Intégration.* Chap. 1-9. — Paris, Hermann, 1957-1969 (*Act. scient. et ind.*, 1175, 1281, 1306, 1343; *Bourbaki* 13, 21, 25, 29, 35).

[2] BRUNEL (A.), DANG NGOC (N.) et THOUVENOT (J.-P.). — Un problème d'existence de mesures invariantes, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Série B, t. 10, 1974, p. 211-227.

[3] DANG NGOC NGHIEM. — On the classification of dynamical systems, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Série B, t. 9, 1973, p. 397-425.

[4] DANG NGOC NGHIEM. — Sur la classification des systèmes dynamiques non commutatifs, *J. funct. Anal.*, t. 15, 1974, p. 188-201.

[5] DANG NGOC NGHIEM et LEDRAPPIER (F.). — Sur les systèmes dynamiques simpliciaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 277, 1973, Série A, p. 777-779.

[6] DIXMIER (J.). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien.* — Paris, Gauthier-Villars, 1969 (*Cahiers scientifiques*, 25).

[7] DIXMIER (J.). — *Les C*-algèbres et leurs représentations.* — Paris, Gauthier-Villars, 1969 (*Cahiers scientifiques*, 29).

[8] DIXMIER (J.). — Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini, *Annals of Math.*, t. 59, 1954, p. 279-286.

[9] DIXMIER (J.). — Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Série 4, t. 2, 1969, p. 423-436.

[10] DOPLICHER (S.), KASTLER (D.) and STØRMER (E.). — Invariant states and asymptotic abelianness, *J. funct. Anal.*, t. 3, 1969, p. 419-434.

[11] DYE (H. A.). — On groups of measure preserving transformations, I., *Amer. J. Math.*, t. 81, 1959, p. 119-159.

[12] DYNKIN (E. B.). — Representation of excessive measures and excessive functions. Appendix : The decomposition of quasi-invariant measures into ergodic measures, by Ju. I. Kifer and S. A. Pirogov, *Russian math. Surveys*, t. 27, 1972, p. 43-84.

[13] DYNKIN (E. R.). — The initial and final behaviour of trajectories of Markov processes, *Russian math. Surveys*, t. 26, 1971, p. 165-185.
[14] GUICHARDET (A.). — Sur la décomposition des mesures quasi invariantes en mesures ergodiques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 257, 1963, Série A, p. 1747-1748.
[15] GUICHARDET (A.). — Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 77-101.
[16] GUICHARDET (A.) et KASTLER (D.). — Désintégration des états quasi invariants des C^*-*algèbres*, *J. Math. pures et appl.*, t. 49, 1970, p. 349-380.
[17] KRIEGER (W.). — On non-singular transformations of a measure space, I., *Z. Wahrcheinlichkeitstheorie*, t. 11, 1969, p. 83-97.
[18] KRIEGER (W.). — On constructing non-isomorphic hyperfinite factors of type III, *J. funct. Anal.*, t. 6, 1970, p. 97-109.
[19] MACKEY (G. W.). — Point realizations of transformation groups, *Illinois math. J.*, t. 6, 1962, p. 327-335.
[20] MACKEY (G. W.). — Ergodic theory and virtual groups, *Math. Annalen*, t. 166, 1966, p. 187-207.
[21] RUELLE (D.). — *Statistical mechanics*. — New York, Benjamin, 1969.
[22] TAKESAKI (M.). — Conditional exceptations in von Neumann algebras, *J. funct. Anal.*, t. 9, 1972, p. 306-321.
[23] TOMIYAMA (J.). — On some types of maximal abelian subalgebras, *J. funct. Anal.*, t. 10, 1972, p. 373-386.
[24] VARADARAJAN (V. S.). — Groups of automorphisms of Borel spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 109, 1963, p. 191-220.

Remarque. — Nous avons généralisé, par une méthode totalement différente (article à paraître *Invariant weights on decomposable von Neumann algebras*) les lemmes IV.4 et IV.5 aux systèmes non commutatifs.

Soit $\mathscr{F} = \int^{\oplus} \mathscr{F}(z)\, d\nu(z)$ un système décomposable, alors $\mathscr{F}$ est semi-fini si, et seulement si, $\mathscr{F}(z)$ est fini ν-p. p. Autrement dit, il existe un poids n. s. f. invariant sur $\mathscr{A}_+$ si, et seulement si, il existe un poids n. s. f. invariant sur $\mathscr{A}(z)_+$ pour presque tout z.

Ce résultat implique en particulier le théorème sur la semi-finitude des algèbres de von Neumann décomposables.

(Texte reçu le 18 juin 1974.)

DANG-NGOC NGHIEM,
Laboratoire de Probabilités,
Université de Paris-VI,
4, place Jussieu, Tour 56,
75230 Paris Cedex 05.