BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARIE GOURSAUD
JACQUES VALETTE

Sur l'enveloppe injective des anneaux de groupes réguliers

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 91-102
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__91_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 91-102.

SUR L'ENVELOPPE INJECTIVE DES ANNEAUX DE GROUPES RÉGULIERS

par

JEAN-MARIE GOURSAUD et JACQUES VALETTE

[Poitiers]

RÉSUMÉ. — Dans cet article, certaines algèbres de groupe, pour lesquelles l'enveloppe injective est de type I, sont déterminées.

Soient G un groupe discret, et $W(G)$ la W^*-algèbre associée à G. Dans [9], KANIUTH caractérise les groupes pour lesquels $W(G)$ est de type I ou II, cette étude a été poursuivie par M. SMITH dans [20]. Récemment, FORMANEK a déterminé la partie de type I de $W(G)$ [8]. Nous obtenons des résultats analogues pour l'enveloppe injective de KG dans le cas où KG est un anneau régulier, résultats donnés par le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Soit KG un anneau de groupe régulier où K désigne un corps commutatif de caractéristique $p > 0$ ou de caractéristique 0 contenant les racines n-ièmes de l'unité. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° *G contient un sous-groupe abélien d'indice fini;*

2° *L'enveloppe injective de KG est de type I;*

3° *L'enveloppe injective de KG est de type I borné.*

De plus, si G est dénombrable 1°, 2°, 3° *sont équivalentes à*

4° *KG est un V-anneau.*

Malgré l'analogie des résultats dans le cas où $\mathbf{C}(G)$ est régulier, entre le type de l'enveloppe injective de $\mathbf{C}(G)$ et celui de $W(G)$, ces deux théories sont distinctes comme le montre le théorème 6.2 de B. H. NEUMANN dans [15].

Dans la seconde partie, nous étudions les anneaux tels que tout A-module à gauche simple soit Σ-injectif, anneaux que nous appellerons

(Σ-V)-anneaux à gauche. Cette étude nous permet de donner une démonstration algébrique simple d'un théorème de FARKAS et SNIDER caractérisant les groupes dénombrables G pour lesquels KG est un V-anneau [7].

On rappelle qu'un anneau régulier de Baer est de type I s'il contient un idempotent abélien fidèle, fini si tout inversible à gauche est inversible. Pour de plus amples détails, on se reportera à [10] et à [19].

Si S est un sous-ensemble d'un anneau A, et M un A-module à gauche, on note $r(S)$ l'annulateur à droite de S dans M, $l(N)$ l'annulateur à gauche d'un sous-ensemble N de M dans A. Un A-module à gauche M est dit Σ-injectif si toute somme directe de copies de M est injective.

1. Partie de type I de l'enveloppe injective de KG

Dans toute cette partie, on supposera que KG est un anneau régulier [4], *et que K est un corps commutatif de caractéristique $p > 0$ ou de caractéristique 0 contenant les racines n-ièmes de l'unité.*

Si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ est un élément de KG, l'ensemble $\{ g_i ; i = 1, \ldots, n \}$ est appelé le support de x.

LEMME 1.1. — *Sous les hypothèses précédentes, si e est un idempotent abélien de KG, alors $e\, KG\, e$ est commutatif.*

e étant un idempotent abélien de KG, l'anneau $e\, KG\, e$ est un anneau réduit [19]. Soit H le sous-groupe de G engendré par le support de e et le support de deux éléments x et y de KG. KH est un anneau semi-simple [4], et $e\, KH\, e$ est un produit d'anneaux de matrices sur des corps commutatifs. $e\, KH\, e$ étant réduit, c'est un produit de corps commutatifs, ce qui prouve que les éléments exe et eye commutent. Par conséquent, $e\, KG\, e$ est commutatif.

On désignera par Δ le sous-groupe du groupe G formé des éléments n'ayant qu'un nombre fini de conjugués, et, par θ l'homomorphisme de KG dans $K\Delta$, défini par

$$x = \sum a_i g_i, \qquad \theta(x) = \sum_{g_i \in \Delta} a_i g_i.$$

Si H est un sous-groupe de G, on désignera par H' le sous-groupe dérivé de H.

LEMME 1.2. — *Si KG contient un idempotent abélien e non nul, alors $[G : \Delta]$ est fini, et G contient un sous-groupe H d'indice fini tel que H' soit fini.*

Soit $(g_i)_{i\in I}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo Δ; l'idempotent abélien e s'écrit donc $e = \sum_{i=1}^{n} a_i, g_i$, avec $a_i \in K\Delta$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a donc $\theta\,(eg_1^{-1}) \neq 0$.

D'autre part, $K\Delta$ étant un anneau régulier, $\theta\,(eg_1^{-1})$ est un élément d'un anneau semi-simple [4] contenu dans $K\Delta$. Il existe donc un élément z inversible de $K\Delta$ tel que $\theta\,(eg_1^{-1})\,z = \theta\,(eg_1^{-1}\,z)$ soit un idempotent non nul ([12], p. 159).

Soit $a = eg_1^{-1}\,z$; $e\,KG\,e$ étant commutatif (lemme 1.1), on a les relations suivantes :

$$axaya = ayaxa, \qquad \forall (x, y) \in KG^2$$

et

$$agxagya = agyagxa, \qquad \forall (x, y, g) \in KG^2 \times G.$$

Il résulte du lemme 1.3 de [17] les relations

$$\theta(a)\,xagya = \theta(a)\,yagxa,$$

$$\text{(1)} \qquad \theta(a)\,\theta(xa)\,ya = \theta(a)\,\theta(ya)\,xa.$$

Supposons $[G:\Delta]$ infini, et soit H_1 le centraliseur du support de $\theta\,(a)$. H_1 est d'indice fini dans G. Comme $e = \sum_{i=1}^{n} a_i\,g_i$, on a

$$a = \theta(a) + \sum_{g_i \neq 1} a'_i\,g_i \qquad \text{avec} \quad a'_i \in K\Delta.$$

Si Δ_1 désigne le sous-groupe de G engendré par Δ et les éléments g_i du support de a, $[G:\Delta]$ étant infini, H_1 n'est pas contenu dans Δ_1. Il existe donc un élément g de H_1 n'appartenant pas à Δ_1. Si dans (1), on remplace x par g, on obtient

$$\theta(a)\,\theta(ya)\,ga = 0, \qquad \text{car} \quad \theta(ga) = 0.$$

On en déduit que $\theta\,(a)\,g\,\theta\,(a) = 0$ et, par conséquent, $\theta\,(a) = 0$, d'où la contradiction.

D'autre part, l'égalité (1) implique :

$$\text{(2)} \qquad \theta(a)\,x\,\theta(a)\,y\,\theta(a) = \theta(a)\,y\,\theta(a)\,x\,\theta(a)$$

pour tout élément x et tout élément y de $K\Delta$. $\theta\,(a)$ est donc un idempotent abélien de $K\Delta$. Soit $H = H_1 \cap \Delta$; de (2), on déduit que les éléments de H vérifient

$$\theta(a)\,xy = \theta(a)\,yx, \qquad (x, y) \in H^2.$$

Donc

$$0 = \theta(a)xy - \theta(a)yx = \theta(a), \qquad (1 - yxy^{-1}x^{-1}) = \theta(a)(1 - [y, x]).$$

Les éléments $(1 - [y, x])$ formant un système générateur de l'idéal à droite $\omega(H')$, le sous-groupe H' est fini ([3], théorème 1).

Si T est l'ensemble des sous-groupes d'indice fini de G, on pose $M = \bigcap_{L \in T} L'$. M est un sous-groupe normal de G.

THÉORÈME 1.3. — *Sous les hypothèses précédentes, si la partie de type I de l'enveloppe injective de KG est non nulle, alors M est un sous-groupe fini de G, et cette partie est isomorphe à l'enveloppe injective de $K[G/M]$.*

La première assertion découle du lemme 1.2 car, dans ces conditions, KG contient un idempotent abélien d'après [19]. M étant un sous-groupe normal fini, $\omega(M)$ est un idéal bilatère engendré par un idempotent central h, et $KG(1-h)$ est isomorphe à $K[G/M]$. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit donc de montrer, d'après [19], que $\omega(M)$ ne contient pas d'idempotent abélien non nul, et que l'enveloppe injective de $K[G/M]$ est de type I.

Soit $e = eh$ un idempotent abélien de $\omega(M)$. On déduit de la démonstration du lemme 1.2, que $\omega_\Delta(M)$ contient un idempotent abélien f non nul. Soit H le centralisateur dans Δ du support de f. Comme f est abélien, H' est fini et contient M, et, de plus, f annule $\omega_\Delta(H')$. f est donc nul.

Pour démontrer que $K[G/M]$ admet une enveloppe injective de type I, il suffit de remarquer que G/M contient un sous-groupe abélien d'indice fini car, dans ce cas, $K[G/M]$ vérifie une identité polynomiale ([18], théorème 4.2) et, par conséquent, d'après [13] ou [16], $K[G/M]$ admet une enveloppe injective de type I. Il est facile de voir, comme dans [8], que $M = N'$, où N est un sous-groupe normal d'indice fini dans G et, par conséquent, M/N' est un sous-groupe abélien d'indice fini dans G/M.

Remarques. — La partie de type I de l'enveloppe injective de KG est en fait de type I fini borné. Nous ne savons pas si l'enveloppe injective de KG est finie. Dans le cas où elle est finie, l'enveloppe injective de $\omega(M)$ est la partie de type II.

Dans le cas où **C**G n'est pas régulier, l'enveloppe injective de **C**G n'est pas nécessairement finie comme le montre l'exemple du théorème 6.2 de B. H. NEUMANN, et le corollaire 2.3 de [2].

Le théorème 1.3 et les lemmes précédents impliquent le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° *L'enveloppe injective de KG est de type I;*

2° *L'enveloppe injective de KG est de type I fini, borné;*

3° *G contient un sous-groupe abélien d'indice fini;*

4° *KG vérifie une identité polynomiale.*

2. $(\Sigma - V)$-anneaux réguliers

Nous utiliserons par la suite le lemme suivant.

LEMME 2.1. — *Soit A un anneau tel que tout idéal bilatère soit idempotent. Alors M est un A-module à gauche injectif si, et seulement si, M est un $A/l(M)$-module à gauche injectif.*

Si M est A-injectif, il est évident que M est $A/l(M)$-injectif. Réciproquement supposons que M soit A/I-injectif. Soient J un idéal à gauche de A, et f un homomorphisme de J dans M, alors le noyau de f ker f contient $IJ = I \cap J$, et f se factorise par $J/(J \cap I')$, par conséquent f se prolonge à A.

Ce lemme peut s'obtenir aussi comme corollaire de [1] (exercice 12, p. 63).

PROPOSITION 2.2. — *Si M est un A-module fidèle, Σ-injectif, alors A ne contient pas de somme directe infinie d'idéaux à gauche.*

Supposons que A contienne une somme directe $I = \oplus_{n \in \mathbf{N}} A\, x_n$ d'idéaux à gauche monogènes. M étant fidèle, pour tout entier n, il existe un élément y_n de M tel que $x_n\, y_n \neq 0$. Il est alors facile de voir que le morphisme f de I dans $M^{(\mathbf{N})}$, défini par $f(x_n) = (z_p)_{p \in \mathbf{N}}$ avec $z_p = 0$ si $p \neq n$, et $z_n = x_n\, y_n$, ne se prolonge pas à A, ce qui contredit la Σ-injectivité de M.

Cette proposition permet de donner une démonstration simple de la caractérisation des modules simples Σ-injectifs sur un anneau régulier, caractérisation obtenue dans [11] *par* LEVINE.

THÉORÈME 2.3. — *Soit A un anneau régulier. Pour qu'un A-module à gauche simple M soit Σ-injectif, il faut et il suffit qu'il soit de dimension finie sur son commutant.*

Si M est de dimension finie sur son commutant K, alors

$$M = \oplus_{i=1}^{n} x_i K \qquad \text{et} \qquad l(M) = \bigcap_{i=1}^{n} l(x_i).$$

$A/l(M)$ est donc un anneau simple contenant un sous-module isomorphe à M. Par conséquent, M est un $A/l(M)$-module Σ-injectif. D'après le lemme 2.1, M est un A-module Σ-injectif. Réciproquement, d'après la proposition 2.2, $A/l(M)$ est un anneau régulier noéthérien. $A/l(M)$ est donc simple, et M est de dimension finie sur son commutant. Le lemme et la proposition suivants sont dus à Annie PAGE.

LEMME 2.4. — *Soit A un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau à gauche. Il n'existe pas dans A de suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :*

1° *La somme $\sum A\, x_n$ soit directe;*

2° *Pour tout n, $x_n \neq 0$ et $l(x_n) \subset l(x_{n+1})$.*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une telle suite; les éléments x_n étant non nuls, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} l(x_n)$ est un idéal à gauche propre inclus dans un idéal à gauche maximal I. Pour tout entier n, on construit un homomorphisme non nul φ_n de $A\, x_n$ dans A/I en posant $\varphi_n(x_n) = \bar{1}$ (où $\bar{1}$ désigne l'image de 1 dans A/I). L'homomorphisme $\varphi = \oplus_{n \in \mathbf{N}} \varphi_n$, de $\oplus_{n \in \mathbf{N}} A\, x_n$ dans $(A/I)^{(\mathbf{N})}$, ne se prolonge pas à A, ce qui contredit la Σ-injectivité de A/I.

PROPOSITION 2.5. — *L'enveloppe injective $E(A)$ d'un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau à gauche régulier A est un anneau de type I fini.*

Pour montrer que $E(A)$ est de type I, il suffit, d'après [2], de montrer que tout idéal à gauche non nul contient un idempotent abélien non nul. Supposons donc qu'il existe un élément non nul x de A tel que $A\, x$ ne contienne pas d'idempotent abélien. Nous allons construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que, pour tout n, on ait :

$$A\, x = \oplus_{p=0}^{n} A\, x_p \oplus M_n \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Hom}_A(A\, x_n, M_n) \neq 0, \quad l(x_n) \subset l(x_{n+1}).$$

L'hypothèse faite sur $A\, x$ montre qu'il existe un élément x_0 de $A\, x$ tel que

$$A\, x = A\, x_0 \oplus M_0 \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Hom}_A(A\, x_0, M_0) \neq 0.$$

Supposons la suite construite jusqu'à l'ordre n, et soit f un homomorphisme non nul de $A\, x_n$ dans M_n. Comme $f(A\, x_n) = N$ ne contient pas d'idempotent abélien, il existe un élément y de N tel que

$$N = A\, y \oplus N', \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Hom}_A(A\, y, N') \neq 0.$$

Soit p la projection de N sur $A\,y$ parallèlement à N'. Posons $x_{n+1} = p \circ f(x_n)$ et $M_{n+1} = N' \oplus P$, où P désigne un supplémentaire de N dans M_n. On a

$$l(x_n) \subset l(x_{n+1}),$$
$$A\,x_{n+1} = A\,y, \qquad \mathrm{Hom}_A(A\,x_{n+1}, M_{n+1}) \neq 0,$$

La suite est donc construite jusqu'à l'ordre $n+1$. D'après le lemme 2.4, A n'est pas un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau, d'où la contradiction.

Si $E(A)$ n'est pas fini, alors $E(A)$ contient une somme directe dénombrable $\oplus_{n \in \mathbf{N}} E(A)\,e_n$ d'idéaux à gauche monogènes deux à deux isomorphes. Nous allons construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments non nuls de A telle que, pour tout entier n, on ait

$$l(x_n) \subset l(x_{n+1}) \qquad \text{avec} \quad A\,x_n \subset E(A)\,e_n,$$

ce qui d'après le lemme 2.4 donnera une contradiction.

Soit x_0 un élément non nul de $E(A)\,e_0 \cap A$, et supposons la suite construite jusqu'à l'ordre n. $E(A)\,e_n$ et $E(A)\,e_{n+1}$ étant isomorphes, il existe un idéal à gauche I essentiel dans $E(A)\,e_n \cap A$, et un idéal à gauche J essentiel dans $E(A)\,e_{n+1} \cap A$, isomorphes entre eux. I étant essentiel dans $E(A)\,e_n \cap A$, il existe un élément non nul z de $I \cap A\,x_n$, et un idéal à gauche monogène $A\,z'$ contenu dans J et isomorphe à $A\,z$. Si f désigne la surjection évidente de $A\,x_n$ sur $A\,z'$, l'élément $x_{n+1} = f(x_n)$ répond aux conditions souhaitées.

Lemme 2.6. — *Pour un anneau régulier A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau premier;*

(*b*) *A est un anneau simple.*

Si A n'est pas artinien, alors A contient un idéal $I = \oplus_{n \in \mathbf{N}} A\,e_n$. On construit alors, par récurrence sur n, une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A vérifiant les hypothèses du lemme 2.4 en posant $x_0 = e_0$, et en prenant un élément non nul de $x_{n-1}\,A\,e_n$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur A.

Corollaire 2.7. — *Pour un anneau régulier A les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *A est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau à gauche;*

(*b*) *Pour tout idéal premier P, A/P est un anneau simple;*

(*c*) *A est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau à droite.*

De plus si A est un (Σ-V)-anneau, alors tout idéal à gauche $\cap$-irréductible est maximal.

Le lemme 2.6 donne les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(c) \Rightarrow (b)$, et le lemme 2.1 les implications $(b) \Rightarrow (a)$ et $(b) \Rightarrow (c)$. La dernière assertion résulte du fait que si P est le plus grand idéal bilatère contenu dans un idéal à gauche (resp. à droite) $\cap$-irréductible, alors P est un idéal premier [16].

PROPOSITION 2.8. — *Pour un anneau régulier auto-injectif à gauche, il y a équivalence entre*

(*a*) *A est un (Σ-V)-anneau;*

(*b*) *$A = \prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(A_i)$, où les A_i sont des anneaux réduits.*

$(a) \Rightarrow (b)$: A, étant de type I fini (proposition 2.5), se met sous la forme $\prod_{n \in \mathbf{N}} M_n(A_n)$ [19]. Pour tout idéal bilatère maximal P, le quotient étant un anneau de type I, il résulte de [19] que A est de type I borné. D'où l'assertion (*b*).

$(b) \Rightarrow (a)$: Cela résulte du corollaire 2.7 (*b*).

LEMME 2.9 (prop. 4.2 [6]). — *Soient A un anneau régulier, I un idéal bilatère de A. Toute somme directe finie $\oplus_{i=1}^{n} A\bar{e}_i$ d'idéaux à gauche monogènes de A/I se relève en une somme directe finie $\oplus_{i=1}^{n} A f_i$ d'idéaux à gauche monogènes de A.*

PROPOSITION 2.10. — *Soient A un anneau régulier, I un idéal bilatère de A. Si $\oplus_{i=1}^{n} A\bar{e}_i$ est une somme directe finie d'idéaux à gauche monogènes deux à deux isomorphes de A/I, il existe une somme directe $\oplus_{i=1}^{n} A f_i$ d'idéaux à gauche non nuls deux à deux isomorphes avec $A\bar{f}_i \subset A\bar{e}_i$.*

On démontre la propriété par récurrence. Supposons-la vraie à l'ordre $n-1$. Soient $\oplus_{i=1}^{n-1} A h_i$ une somme directe d'idéaux à gauche monogènes isomorphes deux à deux, et $A h_n$ un idéal monogène tel que $A\bar{h}_n = A\bar{e}_n$, et tel que $A h_n \cap (\oplus_{i=1}^{n-1} A h_i) = 0$, ce qui est possible d'après le lemme 2.9. Comme $A\bar{h}_{n-1}$ est contenu dans $A\bar{e}_{n-1}$, il existe un idempotent h'_n tel que $A\bar{h}'_n$ soit isomorphe à $A\bar{h}_{n-1}$ avec $h'_n = h'_n h_n$. $A\bar{h}'_n$ et $A\bar{h}_{n-1}$ étant isomorphes, il existe des éléments x et y de A tels que

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{h}'_n, \qquad \text{avec} \quad x = h'_n x h_{n-1},$$

$$\bar{y}\bar{x} = \bar{h}_{n-1},$$

$$h'_n A = h'_n x h_{n-1} A \oplus e' A \qquad \text{avec} \quad \bar{e}' = 0,$$

$$A h_{n-1} = A h'_n x h_{n-1} \oplus A f' \qquad \text{avec} \quad \bar{f}' = 0.$$

D'où h'_n et h_{n-1} se décompose en somme d'idempotents orthogonaux :

$$h'_n = f_n + e'_n, \qquad h_{n-1} = f_{n-1} + f'_{n-1}, \qquad \text{avec } A f_n \text{ isomorphe à } A f_{n-1}.$$

Les idéaux $A\, h_i$ pour i de 1 à $n-1$ étant isomorphes à $A\, h_{n-1}$ contiennen donc des idéaux $A f_i$, i de 1 à $n-2$ isomorphes à $A f_{n-1}$.

PROPOSITION 2.11. — *Si A est un anneau régulier admettant une enveloppe injective de type I borné, alors A est $(\Sigma\text{-}V)$-anneau.*

Soit P un idéal premier de A. D'après la proposition 2.10, dans A/P toute somme directe d'idéaux isomorphes est de longueur bornée par un entier n. A/P admet donc une enveloppe injective de type I fini [19]. Il suffit alors de reprendre la démonstration du lemme 2.6 pour montrer que A/P est simple.

La proposition 2.11 montre que si l'enveloppe injective de l'anneau régulier A est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau, alors A est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau. La réciproque de cette proposition est inexacte comme le montre l'exemple suivant de G. RENAULT.

Soient K un corps commutatif, B l'anneau $\prod_{n \in \mathbf{N}} M_n(K)$, et A le sous-anneau de B formé des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dont tous les éléments à partir d'un certain rang appartiennent à K. Soit P un idéal premier de A. Si P ne contient pas l'idéal $\oplus_{n \in \mathbf{N}} M_n(K)$, alors A/P est isomorphe à un $M_n(K)$. Dans le cas contraire A/P est isomorphe à un quotient de $K^{\mathbf{N}}$. Par suite A est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau dont l'enveloppe injective est B.

3. $(\Sigma — V)$-anneaux de groupes

Nous gardons les hypothèses du paragraphe I sur le corps K.

Nous rappelons le résultat dû à VILLAMAYOR et à MICHLER.

LEMME 3.1 [14]. — *Si KG est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau, alors KG est un anneau régulier.*

THÉORÈME 3.2. — *Sous les hypothèses précédents sur K, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(*a*) *KG est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau;*

(*b*) *G contient un sous-groupe abélien d'indice fini.*

L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 2.5 et du théorème 1.4. La réciproque provient du fait que l'enveloppe injective de KG est de type I borné [16], et de la proposition 2.11.

PROPOSITION 3.3. — *Soient A une K-algèbre, M un A-module injectif de dimension dénombrable sur K. M est Σ-injectif.*

D'après FAITH [5], il suffit de montrer que M étant un module injectif, les annulateurs dans M d'idéaux à gauche de A vérifient la condition minimale. Supposons que M ne soit pas Σ-injectif. Il existe alors une suite strictement décroissante $(r(I_n))_{n \in \mathbf{N}}$ où les $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ forment une suite croissante d'idéaux à gauche de A. On construit alors une application K-linéaire injective de $K^{\mathbf{N}}$ dans $M/(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} r(I_n))$ ce qui entraînera la contradiction. Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de M tels que $v_n \in r(I_n)$, $v_n \notin r(I_{n+1})$. Soient $w = (w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un élément de $K^{\mathbf{N}}$, et f_n l'application de A dans M, définie par

$$f_n(1) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

On vérifie facilement que

$$f_{n \mid I_k} = f_{k \mid I_k} \quad \text{pour } k \leqslant n.$$

On obtient ainsi un morphisme f de $I = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} I_n$ dans M qui se prolonge à A. Soit $f(1) = \hat{w}$.

On vérifie, comme dans [7], que l'application T de $K^{\mathbf{N}}$ dans $M/(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} r(I_n))$, définie par $T(w) = \hat{w} + \bigcap_{n \in \mathbf{N}} r(I_n)$, est une application K-linéaire injective.

Dans [7], FARKAS et SNIDER [1] montrent, en utilisant un théorème de THOMA [21] que si G est dénombrable, alors KG est un V-anneau si, et seulement si, G contient un sous-groupe abélien d'indice fini. Nous donnerons une démonstration algébrique de ce résultat.

THÉORÈME 3.4 [7]. — *Sous les hypothèses précédentes sur K, et si G est un groupe dénombrable, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *KG est un V-anneau;*

(*b*) *G contient un sous-groupe abélien d'indice fini.*

---

[1] Nous avons appris récemment que FARKAS et SNIDER ont obtenu une démonstration plus simple de ce résultat, sans utiliser le théorème de THOMA.

D'après la proposition 3.3 et le lemme 3.1, $K(G)$ est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau régulier. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.2 pour que $(a) \Rightarrow (b)$. La propriété réciproque découle du théorème 3.2.

Nous pouvons maintenant résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3.5. — *Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ ou de caractéristique 0 contenant les racines n-ièmes de l'unité, G un groupe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° *KG est un anneau régulier admettant une enveloppe injective de type I;*

2° *KG est un anneau régulier admettant une enveloppe injective de type borné;*

3° *KG est un $(\Sigma\text{-}V)$-anneau;*

4° *G contient un sous-groupe abélien d'indice fini.*

De plus, si G est un groupe dénombrable, les assertions précédentes sont équivalentes à :

5° *KG est un V-anneau.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*. Chapitre 1 : *Modules plats*, et chapitre 2 : *Localisation*. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).

[2] CAILLEAU (A.) et RENAULT (G.). — Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul, *J. of Algebra*, t. 15, 1970, p. 133-141.

[3] COLEMAN (D. B.). — On group rings, *Canad. J. Math.*, t. 22, 1970, p. 249-254.

[4] CONNELL (I. G.). — On groups rings, *Canad. J. Math.*, t. 15, 1963, p. 650-685.

[5] FAITH (C.). — Rings with ascending conditions on annihilators, *Nagoya math. J.*, t. 27, 1966, p. 179-191.

[6] FAITH (C.) and UTUMI (Y.). — Quasi injective modules and their endomorphism rings, *Archiv der Math.*, t. 15, 1964, p. 166-174.

[7] FARKAS (D. R.) and SNIDER (R. L.). — Group algebras whose simple modules are injective, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 194, 1974, p. 241-248.

[8] FORMANEK (E.). — *The type I part of the regular representation* (à paraître).

[9] KANIUTH (E.). — Der Typ der regulären Darstellungen diskreter Gruppen, *Math. Annalen*, t. 182, 1969, p. 334-339.

[10] KAPLANSKY (I.). — *Rings of operators*. — New York, Benjamin, 1968 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[11] LEVINE (J.). — On the injective hulls of semi-simple modules, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 155, 1971, p. 115-126.

[12] MAEDA (F.). — *Kontinuierliche Geometrien.* — Berlin, Springer-Verlag, 1958 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaft*, 95).

[13] MARTINDALE (W. S.). — On semi-prime P. I. rings, *Proc. Amer. math. Soc.* (à paraître).

[14] MICHLER (G. O.) and VILLAMAYOR (O. E.). — On rings whose simple modules are injective, *J. of Algebra*, t. 25, 1973, p. 185-201.

[14] NEUMANN (B. H.). — On ordered division rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 66, 1949, p. 202-252.

[16] PAGE (A.). — Généralisation aux anneaux à identité polynomiale d'un théorème de I. Kaplansky, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, 1973, Série A, p. 233-235; et *Séminaire de Mathématiques d'Orsay*, 1973 (*Publications du Département de Mathématiques*, 44).

[17] PASSMAN (D. S.). — *Infinite group rings.* — New York, M. Dekker, 1971 (*Pure and applied Mathematics, Dekker*, 6).

[18] PASSMAN (D. S.). — Linear identities on group rings, *Pacific J. Math.*, t. 36, 1971, p. 457-505.

[19] RENAULT (G.). — Anneaux réguliers auto-injectifs à droite, *Bull. Soc. math. France*, t. 101, 1973, p. 237-254.

[20] SMITH (M.). — Regular representations of discrete groups, *J. Funct. Analysis*, t. 11, 1972, p. 401-406.

[21] THOMA (E.). — Über unitäre Darstellung abzählearer, diskreter Gruppen, *Math. Annalen*, t. 153, 1964, p. 111-138.

(Texte reçu le 30 janvier 1974.)

Jean-Marie GOURSAUD et Jacques VALETTE,
Département de Mathématiques,
Université de Poitiers,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.