PAUL ERDÖS
JEAN-LOUIS NICOLAS

Répartition des nombres superabondants

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 65-90
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__65_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 65-90.

RÉPARTITION DES NOMBRES SUPERABONDANTS

PAR
PAUL ERDÖS ET JEAN-LOUIS NICOLAS
[Budapest], [Limoges]

RÉSUMÉ. — Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. On dit que n est superabondant si, pour tout $m < n$, on a $\sigma(m)/m < \sigma(n)/n$. Si l'on appelle $Q(X)$ le nombre de nombres superabondants inférieurs à X, on démontre que, pour tout $c < 5/48$, $Q(X) > (\log X)^{1+c}$ pour $X > X_0(c)$. On donne également quelques résultats et conjectures sur des sujets voisins.

SUMMARY.—An integer n is called superabundant if $\sigma(n)/n > \sigma(m)/m$ for every $m < n$ ($\sigma(n)$ denotes the sum of divisors of n). Denote by $Q(X)$ the number of superabundants not exceeding X. The authors proove that for every $c < 5/48$, $Q(X) > (\log X)^{1+c}$ if $X > X_0(c)$. Several related results are proved and unsolved problems are stated.

1. Introduction

S. RAMANUJAN [14] a défini et étudié les nombres hautement composés. [Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, n est hautement composé si $(m < n) \Rightarrow (d(m) < d(n))$.] En particulier, il a étudié $Q_{\text{h. c.}}(X)$ = nombre de nombres hautement composés $\leqslant X$, et montré que

$$\lim_{X \to \infty} \frac{Q_{\text{h. c.}}(X)}{\log X} = +\infty.$$

P. ERDÖS a montré [5] que le quotient n'/n de deux nombres hautement composés consécutifs assez grands vérifie

$$\frac{n'}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{(\log n)^c} \qquad \text{avec} \quad c > 0,$$

ce qui entraîne

$$Q_{\text{h, c.}}(X) \geqslant (\log X)^{1+c} \quad \text{pour } X \text{ assez grand.}$$

J.-L. NICOLAS a montré [12] que $Q_{\text{h.c.}}(X) \leqslant (\log X)^{c'}$, c' étant une constante calculable mais assez grande.

D'autre part, P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont défini, dans [4], les nombres superabondants.

DÉFINITION. — On dit que n est *superabondant* si

$$(m < n) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}\right),$$

où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n.

On sait que σ est une fonction multiplicative, et que

$$\sigma(p^\alpha) = (p^{\alpha+1}-1)/(p-1)$$

pour p premier et $\alpha \geqslant 1$ (*cf.* [7], chap. XVI). P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont en particulier démontré le résultat suivant.

PROPOSITION 1. — *Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant est* $n = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots q^{\alpha_q} \ldots p^{\alpha_p}$, *on a*

$$\alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_q \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p. \tag{1}$$

On a également $\alpha_p = 1$ *sauf si* $n = 4$ *ou* $n = 36$, *et* $q^{\alpha_q} \sim (p \log p)/\log q$ *lorsque* q, *et donc* n, *tendent vers l'infini,* p *étant le plus grand nombre premier divisant* n. *On a enfin, lorsque* $n \to \infty$,

$$p \sim \log n. \tag{2}$$

D'autre part, J.-L. NICOLAS ([11], p. 182) a montré que si n et n' sont deux nombres superabondants consécutifs, on avait, pour une infinité de n :

$$\frac{n'}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit* $Q(X)$ *le nombre de nombres superabondants* $\leqslant X$; *si* $c < 5/48$, *on a* $Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c}$ *pour* X *assez grand.*

La méthode de démonstration du théorème 1 ne permet pas (on le prouvera avec le théorème 2) de montrer que le quotient n'/n de deux nombres superabondants consécutifs assez grands vérifie

$$\frac{n'}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{(\log n)^c}. \tag{3}$$

Nous allons d'abord rappeler les propriétés des nombres colossalement abondants, qui sont des nombres superabondants privilégiés faciles à calculer (§ 2). Au paragraphe 3, on étudiera les propriétés des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs. Au paragraphe 4, on montrera, dans le lemme 4, que, pour presque tous les nombres N colossalement abondants, l'inégalité (3) est vérifiée pour n voisin de N, ce qui démontrera le théorème 1.

On utilisera constamment le lemme suivant dû à HOHEISEL, INGHAM et HUXLEY.

LEMME 1. — *Soit* $\pi(x)$ *le nombre de nombres premiers* $\leqslant x$; *il existe* $\tau < 1$ *tel que*

$$\pi(x+x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x+x^\tau}{\log(x+x^\tau)} - \frac{x}{\log x} \sim \frac{x^\tau}{\log x}.$$

Le meilleur résultat actuel est dû à HUXLEY [8] : l'équivalence précédente est vraie pour $\tau > 7/12$.

NOTATIONS. — Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, la relation $f(x) \gg g(x)$ signifie que $g(x) = O(f(x))$.

Remarques. — Soit f une fonction additive. On définit n comme « f-hautement abondant » si $(m < n) \Rightarrow (f(m) < f(n))$. Dans l'article [4] (p. 466, n° 9), il est dit que « si $f(n) \neq c \log n$, alors les nombres f-hautement abondants ont pour densité 0 ». Cela n'est pas vrai si l'on choisit $f(p) = \log p$ et $f(p^k) = 0$ pour $k \geqslant 2$. Les nombres f-hautement abondants sont les nombres non divisibles par un carré, dont la densité est $6/\pi^2$ (*cf.* [7], chap. XVIII). Cela n'est pas vrai non plus si l'on choisit $f(n) = \log n$ pour n impair, et $f(n) = 0$ pour n pair.

MAUCLAIRE a remarqué, que l'on pouvait déduire immédiatement du théorème 12 de P. ERDÖS ([6], p. 18), le résultat suivant :

Si, pour tout c, on a

$$\sum_{f(p) \neq c \log p} \frac{1}{p} = \infty,$$

(c'est-à-dire si f est suffisamment différente de la fonction $c \log n$), alors les nombres f-hautement abondants ont pour densité 0.

Dans le même article, la table numérique des nombres « σ-hautement abondants » (p. 467) doit être modifiée pour $1800 \leqslant n \leqslant 2340$ par

n	facteurs de n	$\sigma(n)$
1 800......	$2^3\ 3^2\ 5^2$	6 045
1 920......	$2^7\ 3\ 5$	6 120
1 980......	$2^2\ 3^2\ 5\ 11$	6 552
2 100......	$2^2\ 3\ 5^2\ 7$	6 944
2 160......	$2^4\ 3^3\ 5$	7 440
2 340......	$2^2\ 3^2\ 5\ 13$	7 644

2. Nombres colossalement abondants

DÉFINITION. — On dit que N est *colossalement abondant*, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ atteigne son maximum en N.

Remarque. — Cette définition est légèrement différente de celle de [4] (p. 455).

Si N est colossalement abondant, on a, pour tout n,

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}} \tag{4}$$

PROPOSITION 2. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe au moins un nombre colossalement abondant associé à* ε, *que l'on note* N_ε. *D'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant.*

Démonstration. — On sait que

$$\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^\gamma,$$

où γ est la constante d'Euler (*cf.* [7], chap. XVIII). Pour ε fixé, la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ tend vers zéro à l'infini, et a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points N. Un tel nombre est colossalement abondant.

D'autre part, en utilisant (4), il vient

$$(n < N) \Rightarrow \left(\frac{\sigma(n)}{n} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N}\left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon < \frac{\sigma(N)}{N}\right),$$

et N est superabondant.

PROPOSITION 3. — *Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε. On définit, pour p premier et α entier $\geqslant 1$:*

$$F(p, \alpha) = \frac{\log(1+(1/(p^\alpha+p^{\alpha-1}+\ldots+p)))}{\log p} = \frac{\log((p^{\alpha+1}-1)/(p^{\alpha+1}-p))}{\log p},$$

et pour $\alpha = 0$, $F(p, 0) = +\infty$. Alors si p est premier et divise N avec l'exposant $\alpha \geqslant 0$, on a

$$F(p, \alpha) \geqslant \varepsilon \geqslant F(p, \alpha+1). \tag{5}$$

Démonstration. — Si $\alpha \geqslant 0$, on applique l'inégalité (4) avec $n = Np$. Il vient :

$$\frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \leqslant \left(\frac{Np}{N}\right)^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon}. \tag{6}$$

D'autre part,

$$\frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^\alpha)} = \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}-1} = p\left(1+\frac{1}{p^{\alpha+1}+\ldots+p}\right). \tag{7}$$

En comparant (6) et (7), on obtient $\varepsilon \geqslant F(p, \alpha+1)$. L'inégalité $F(p, \alpha) \geqslant \varepsilon$ est évidente si $\alpha = 0$. Si $\alpha \geqslant 1$, on la démontre en appliquant (4) avec $n = N/p$.

DÉFINITIONS. — On pose, pour p premier,

$$E_p = \{F(p, \alpha);\ \alpha \geqslant 1\},$$

$$E = \bigcup\nolimits_{p\ \text{premier}} E_p = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i, \ldots\}.$$

Pour tout $\eta > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à η, et l'on peut ranger les éléments de E en une suite décroissante

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_i > \ldots.$$

On pose $\varepsilon_0 = +\infty$.

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $x = x_1$, $y = x_2$, x_k, pour $k \geqslant 2$, comme fonctions de ε, par

$$\left\{\begin{aligned} F(x, 1) &= \frac{\log(1+(1/x))}{\log x} = \varepsilon, \\ F(x_k, k) &= \frac{\log(1+(1/(x_k^k+\ldots x_k)))}{\log x_k} = \varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ces définitions ont un sens, car, pour $k \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto F(t, k)$ est décroissante pour tout $t \geqslant 1$, et décroît de $+\infty$ à 0. On a de plus, pour k fixé, lorsque $\varepsilon \to 0$ (*cf.* démonstration du lemme 2) :

$$x_k \sim \sqrt[k]{kx}. \tag{9}$$

PROPOSITION 4 :

(*a*) *Si* $\varepsilon \notin E$, *la fonction* $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ *atteint son maximum en un seul point* N_ε *dont la décomposition en facteurs premiers est*

$$N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \qquad \textit{avec} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[\frac{\log((p^{1+\varepsilon}-1)/(p^\varepsilon-1))}{\log p}\right] - 1, \tag{10}$$

ou, si l'on préfère,

$$\begin{cases} \alpha_p(\varepsilon) = k \quad \textit{si} \ x_{k+1} < p < x_k \qquad \textit{avec} \quad k \geqslant 1 \\ \qquad \textit{et} \qquad \alpha_p(\varepsilon) = 0 \quad \textit{si} \ p > x = x_1. \end{cases} \tag{11}$$

(*b*) *Soit* $i \geqslant 1$; *pour tout* $\varepsilon \in]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$, N_ε *est constant et égal* (*par définition*) *à* N_i. *Les nombres* N_i *sont tous distincts.*

(*c*) *Si les ensembles* E_p *sont disjoints deux à deux, l'ensemble des nombres colossalement abondants est égal à l'ensemble des nombres* N_i, $1 \leqslant i$: *La fonction* $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ *atteint son maximum aux deux points* N_i et N_{i+1}.

(*d*) *Si les ensembles* E_p *ne sont pas disjoints, pour chaque* $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$, *la fonction* $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ *atteint son maximum en quatre points* : N_i, $q\,N_i$, $r\,N_i$ et $N_{i+1} = qr\,N_i$. *Les nombres* $q\,N_i$ *et* $r\,N_i$ *sont colossalement abondants.*

Démonstration :

(*a*) Soit p un nombre premier fixé. Comme $\varepsilon \notin E$, alors $\varepsilon \notin E_p$ et, comme la suite $F(p, k)$ est strictement décroissante en k, il existe α unique, déterminé par la proposition 3 :

$$\frac{\log((p^{\alpha+1}-1)/(p^\alpha-1))}{\log p} = F(p, \alpha) > \varepsilon > F(p, \alpha+1). \tag{12}$$

En résolvant en α les inégalités (12), on trouve la formule (10), en désignant par $[x]$ la partie entière de x.

Si $x_{k+1} < p < x_k$, en tenant compte de (8) et (12), on a

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}, \alpha) > F(p, \alpha) > F(x_{k+1}, k+1) \\ = \varepsilon = F(x_k, k) > F(p, \alpha+1) > F(x_k, \alpha+1), \end{aligned}$$

ce qui démontre (11).

(*b*) Les raisonnements précédents ne changent pas lorsque ε varie entre deux valeurs consécutives de l'ensemble E.

(*c*) Choisissons $\varepsilon = \varepsilon_i = F(q, \beta)$. Pour $p \neq q$, $\varepsilon \notin E_p$, et l'exposant de p est déterminé par (11) ou (12). D'après la proposition 3, l'exposant de q peut être choisi égal à β ou $\beta-1$. Dans le premier cas on trouve N_{i+1}, dans le second N_i, et la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ atteint son maximum en ces deux points.

(*d*) Soit $\varepsilon = F(p, \alpha) \in E$. Alors ε est irrationnel. Si l'on avait $\varepsilon = a/b$, a et b entiers, on aurait $p^a = (1+(1/(p^\alpha+\ldots+p)))^b$ avec p^a entier et $(1+(1/(p^\alpha+\ldots+p)))^b$ non entier. D'après le théorème de Gel'fond-Schneider (*cf.* [9], chap. 2), ε est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang (*cf.* [10], et aussi [9], chap. 2), on déduit que, si p, q, r sont des nombres premiers distincts et si p^ε, q^ε, r^ε sont algébriques, alors ε doit être rationnel. Mais si $\varepsilon \in E_p$, p^ε est rationnel, et on conclut que $E_p \cap E_q \cap E_r = \varnothing$.

S'il existe deux ensembles E_q et E_r non disjoints (ce qui est peu vraisemblable), et si l'on choisit

$$\varepsilon_i = F(q, \beta) = F(r, \gamma) \in E_q \cap E_r,$$

pour $p \neq q$ et $p \neq r$, l'exposant de p est déterminé par (11) ou (12). L'exposant de q peut être β ou $\beta-1$, celui de r, γ ou $\gamma-1$, d'après la proposition 3, ce qui donne les quatre possibilités annoncées.

Tables numériques. — Le tableau I donne les valeurs de $F(p, \alpha)$. Les valeurs non indiquées sont inférieures à 10^{-5}. Les colonnes « exposant $= i$ » indiquent l'exposant de p dans N_ε. Ainsi, pour $\varepsilon = 0{,}005$, pour $p = 7$, on a

$$0{,}00129 < \varepsilon < 0{,}0910,$$

donc l'exposant de 7 dans N_ε est 2.

TABLEAU I

p	Exposants = 0 / α	1 / $\alpha = 1$	2 / $\alpha = 2$	3 / $\alpha = 3$	4 / $\alpha = 4$	$\alpha = 5$
2		0,584 96	0,222 39	0,099 54	0,047 31	0,023 08
3		0,262 86	0,072 86	0,023 05	0,007 55	0,002 50
5		0,113 28	0,020 37	0,004 00	0,000 79	0,000 16
7		0,068 62	0,009 10	0,001 29	0,000 18	0,000 03
11		0,036 29	0,003 15	0,000 29	0,000 03	
13		0,028 89	0,002 14	0,000 16	0,000 01	
17		0,020 17	0,001 15	0,000 07		

TABLEAU II

Exposants =	1 / $k = 1$	2 / $k = 2$	3 / $k = 3$	4 / $k = 4$	5 / $k = 5$
2		3,29	5,44	9,08	15,36
3		6,72	15,38	36,3	88,57
5		16,8	60,50	230,4	920,5
7		31,4	153,9	812,8	4 531,5
11		73,4	554,9	4 580,6	40 080,3
13		100,9	897,2	8 743,5	90 404,7
17		168,8	1 951,4	24 842,7	335 898,5

Exposants =	6 / $k = 6$	7 / $k = 7$	8 / $k = 8$	9 / $k = 9$	$k = 10$
$p = 2$	26,3	45,7	80,2	142,4	255,4
$p = 3$	221,7	567,6	1 480,4	3 919,7	10 507,9

Le tableau II donne dans sa k-ième colonne des valeurs de x en fonction de x_k (x et x_k étant définis par (8)), lorsque x_k est un nombre premier. Elle est obtenue à partir du tableau I par l'application v^{-1} si

$$v(x) = F(x, 1) = \log(1+(1/x))/\log x.$$

L'ordre de ses termes est donc inversé par rapport à celui de la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier p donné. Pour avoir $p = 97$, on doit choisir $97 \leqslant x \leqslant 101$ = nombre premier suivant 97, et l'on trouve

$$2^8.3^5.5^3.7^2.11^2.13.17\ldots 97 \quad \text{pour} \quad x < 100{,}9,$$

et

$$2^8.3^5.5^3.7^2.11^2.13^2.17\ldots 97 \quad \text{pour} \quad x > 100{,}9.$$

Le tableau III donne la suite des nombres colossalement abondants. On trouvera dans [4] une table des nombres superabondants.

TABLEAU III

		n							$\sigma(n)$	$\sigma(n)/n$
$\varepsilon_1 =$	0,584 96	1							1	1
$\varepsilon_2 =$	0,262 86	2							3	1,5
$\varepsilon_3 =$	0,222 39	2	3						12	2
$\varepsilon_4 =$	0,113 28	4	3						28	2,333
$\varepsilon_5 =$	0,099 54	4	3	5					168	2,8
$\varepsilon_6 =$	0,072 86	8	3	5					360	3
$\varepsilon_7 =$	0,068 62	8	9	5					1 170	3,25
$\varepsilon_8 =$	0,047 31	8	9	5	7				9 360	3,714 3
$\varepsilon_9 =$	0,036 29	16	9	5	7				19 344	3,838 1
$\varepsilon_{10} =$	0,028 89	16	9	5	7	11			232 128	4,187 0
$\varepsilon_{11} =$	0,023 08	16	9	5	7	11	13		3 249 792	4,509 1
$\varepsilon_{12} =$	0,023 05	32	9	5	7	11	13		6 604 416	4,581 8
$\varepsilon_{13} =$	0,020 37	32	27	5	7	11	13		20 321 280	4,699 3
$\varepsilon_{14} =$	0,020 17	32	27	25	7	11	13		104 993 280	4,855 9
		32	27	25	7	11	13	17	1 889 879 040	5,141 6

3. Étude des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs

PROPOSITION 5. — *Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε. On définit x et x_k par* (8). *Soient p le plus grand facteur premier de N, et P le nombre premier suivant p. Soit n un nombre superabondant compris entre N et NP, et soit λ_k le plus grand nombre premier divisant n avec* *l'exposant k. On a*

$$\pi(\lambda_k)-\pi(x_k) = O(\sqrt{x_k}) = O(x^{k/2}), \tag{13}$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1, *pour* $\tau > 7/12$,

$$\lambda_k = x_k + O(x_k^{\tau}). \tag{14}$$

Démonstration. — La démonstration est la même que celle de la proposition 4 de [12] (p. 120) : Pour un entier M quelconque, on définit le « bénéfice » de M, par rapport à N et à ε, par

$$\text{bén}\, M = \varepsilon \log \frac{M}{N} - \log \frac{\sigma(M)/M}{\sigma(N)/N},$$

et par (4), on a bén $M \geqslant 0$. Ensuite, on montre que, pour un nombre superabondant n compris entre N et NP, on a

$$\text{bén}\, n = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Enfin on montre que, si $\pi(\lambda_k)-\pi(x_k)$ était trop grand, bén n serait trop grand, et on n'aurait pas bén $n = O(1/x)$.

Remarquons que le nombre colossalement abondant suivant N est $\leqslant NP$ et donc, pour tout nombre superabondant n, il existe au moins un N colossalement abondant tel que $N \leqslant n \leqslant NP$.

4. Démonstration du théorème 1

La démonstration du théorème 1 repose sur trois lemmes.

LEMME 2. — (*lemme technique*) :

(*a*) *Il existe une seule fonction* $y(x)$ *vérifiant* $y \geqslant 1$ *pour* $x \geqslant 1$ *et définie par la relation implicite*

$$u(y) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\log(1+(1/(y^2+y)))}{\log y} = \frac{\log(1+(1/x))}{\log x} \overset{\text{déf}}{=} v(x). \tag{15}$$

(*b*) *Quand* $x \to \infty$, *on a* $y \sim \sqrt{2x}$ *et aussi*

$$y(x) = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2\log x} + \frac{\log 2(4+3\log 2)}{8(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)\right). \tag{16}$$

(*c*) *La fonction* $\theta(x)$, *définie par*

$$\theta(x)=\frac{\log y(x)}{\log x}=\frac{\log(1+(1/(y^2+y)))}{\log x}, \tag{17}$$

est décroissante pour $x \geqslant 1$. *On a, pour* $x \to \infty$,

$$\theta'(x) \sim \frac{-\log 2}{2x(\log x)^2} \tag{18}$$

et

$$\theta(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log x}-\frac{\log 2}{2(\log x)^2}+o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right). \tag{19}$$

LEMME 3. — (*lemme d'approximation diophantienne*). — *Soient* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *tels que* $2\alpha+\beta < 1$. *Pour* x_0 *assez grand, il y a plus de* $x_0/(3 \log x_0)$ *nombres premiers p entre* $x_0/2$ *et* x_0 *vérifiant*

$$\exists r/s \in \mathbf{Q}, \qquad s \leqslant x_0^\alpha \qquad et \qquad \frac{x_0^\beta}{x_0} \leqslant \left|\theta(p)-\frac{r}{s}\right| \leqslant \frac{1}{s x_0^\alpha}, \tag{20}$$

où $\theta(p)$ *est défini par* (17).

LEMME 4. — *Soit p un nombre premier vérifiant le lemme* 3 *avec* $\beta > (1+\tau)/2$. *Soient* $\varepsilon = (\log(1+(1/p))/\log p$ *et* $N = N_\varepsilon$ *le nombre colossalement abondant associé à* ε (*donc le plus grand facteur premier de N est p*) *et soit P le nombre premier suivant p. Soient n et n' deux nombres superabondants consécutifs vérifiant* $N \leqslant n \leqslant NP$. *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\frac{n'}{n} \leqslant 1+\frac{1}{(\log n)^c}. \tag{21}$$

Démonstration du lemme 2 :

(*a*) Pour $y > 1$, la fonction $u(y)$ est strictement décroissante, comme quotient d'une fonction décroissante par une fonction croissante. Elle admet donc une fonction réciproque u^{-1}, définie sur $]0, +\infty[$. Comme $u(y) = v(x)$, on a

$$y = u^{-1}(v(x)).$$

(*b*) Quand $x \to \infty$, on a $\lim y(x) = +\infty$, $v(x) \sim 1/(x \log x)$ et $u(y) \sim 1/(y^2 \log y)$.

On doit donc avoir

$$y^2 \log y \sim x \log x, \tag{22}$$

ce qui entraîne $\log(y^2 \log y) \sim \log(x \log x)$, soit $\log y \sim 1/2 \log x$, et (22) donne alors $y \sim \sqrt{2x}$.

Pour trouver un développement limité de y, définissons $\zeta(x)$ par la relation

$$\zeta^2 \log \zeta = x \log x.$$

On a, pour $x \to \infty$, $\zeta(x) \sim \sqrt{2x}$ et

$$u(\zeta) = \frac{\log(1+(1/(\zeta^2+\zeta)))}{\log \zeta} = \frac{1}{\zeta^2 \log \zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^3 \log \zeta}\right)$$
$$= \frac{1}{x \log x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right) = v(x) + O\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right).$$

On a donc

$$u(\zeta) - u(y) = O\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right). \tag{23}$$

On a d'autre part

$$u(\zeta) - u(y) = (\zeta - y)\, u'(\xi) \quad \text{avec } \xi \text{ entre } \zeta \text{ et } y, \tag{24}$$

et

$$u'(y) = \frac{-[(2y+1)/((y^2+y+1)(y+1)) \log y + \log(1+(1/(y^2+y)))]}{y(\log y)^2} \tag{25}$$
$$\sim -\frac{2}{y^3 \log y}.$$

Comme $y \sim \zeta \sim \sqrt{2x}$, (23) et (24) donnent

$$y(x) = \zeta(x) + O(1). \tag{26}$$

Le développement limité de $\zeta(x)$ s'obtient par itération :

$$\zeta(x) = \sqrt{2x}\,(1+o(1)),$$
$$\log \zeta = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 2 + o(1),$$
$$\zeta = \sqrt{\frac{x \log x}{\log \zeta}} = \sqrt{2x/(1+(\log 2/\log x) + o(1/\log x))}$$
$$= \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2 \log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

En itérant à nouveau, et en utilisant (26), on obtient (16).

(*c*) On a

$$\theta'(x) = \frac{x \log x\,(dy/dx) - y \log y}{xy\,(\log x)^2} \tag{27}$$

$$= \frac{(1/(x+1)) - ((2y+1)/(y+1)(y^2+y+1))}{|u'(y)|\,xy\,(\log x)^2},$$

la valeur de $u'(y)$ est donnée par (25), et le dénominateur de $\theta'(x)$ est équivalent à $(2x(\log x)^2)/(y^2 \log y) \sim 2 \log x$. Le numérateur vaut

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2y+1}{(y+1)(y^2+y+1)}$$

$$= \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{y^2} + O\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

$$= \frac{1}{y^2}\left(\frac{y^2}{x} - 2\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{-2\log 2}{y^2 \log x} + O\left(\frac{1}{x(\log x)^2}\right),$$

en tenant compte de (16). Cela démontre (18).

Il reste à montrer que $\theta'(x) < 0$ pour $x > 1$. Par (27), on doit montrer $x > (y^2(y+2))/(2y+1)$, c'est-à-dire, comme v est une fonction décroissante, que

$$v(x) = u(y) < v\left(\frac{y^2(y+2)}{2y+1}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\log(1 + ((2y+1)/y^2(y+2))}{\log(y^2((y+2)/(2y+1))} - \frac{\log(1 + (1/(y^2+y)))}{\log y} > 0 \qquad \text{pour} \quad y > 1.$$

Posons

$$\varphi(y) = \log\left(1 + \frac{2y+1}{y^2(y+2)}\right)\log y - \log\left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right)\log\left(y^2\frac{y+2}{2y+1}\right).$$

En décomposant le dernier logarithme, et en regroupant les termes en $\log y$, il vient

$$\varphi(y) = \log\left(\frac{2y+1}{y+2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right) - \log y \log\left(1 + \frac{1}{(y+1)^3}\right).$$

Quand $y \in [1, +\infty[$, $1+1/(y^2+y) \in]1, 3/2]$ et, par la concavité de la fonction logarithme sur l'intervalle $[1, 3/2]$, on a

$$\log\left(1+\frac{1}{y^2+y}\right) \geqslant \frac{2\log 3/2}{y^2+y} \geqslant \frac{2\alpha}{y^2+y},$$

avec $\alpha = 0{,}405$ qui est une valeur approchée par défaut de $\log 3/2$.

En utilisant les inégalités valables pour tout $u > -1$,

$$\frac{u}{1+u} \leqslant \log(1+u) \leqslant u,$$

on obtient

$$\log\frac{2y+1}{y+2} \geqslant \frac{y-1}{2y+1} \qquad \text{et} \qquad \log\left(1+\frac{1}{(y+1)^3}\right) \leqslant \frac{1}{(y+1)^3},$$

ce qui donne, pour $\varphi(y)$, la minoration valable pour $y > 1$,

$$\varphi(y) \geqslant \left(\frac{y-1}{2y+1}\right)\left(\frac{2\alpha}{y^2+y}\right) - \frac{\log y}{(y+1)^3} = \frac{1}{(y+1)^3}\psi(y), \tag{28}$$

avec $\psi(y) = 2\alpha((y-1)(y+1)^2)/(y(2y+1)) - \log y$. En posant $y = 1+t$, il vient

$$\psi(y) = \psi(1+t) = \frac{2\alpha t(t+2)^2}{(t+1)(2t+3)} - \log(1+t).$$

En dérivant, on trouve

$$\psi'(1+t) = \frac{P(t)}{(t+1)^2(2t+3)^2},$$

avec

$$P(t) = 4\alpha t^4 + (20\alpha-4)t^3 + (42\alpha-16)t^2 + (48\alpha-21)t + (24\alpha-9).$$

Comme $\alpha = 0{,}405$, on a

$$P(t) = 1{,}62\,t^4 + 4{,}1\,t^3 + 1{,}01\,t^2 - 1{,}56\,t + 0{,}72.$$

Le trinôme $1{,}01\,t^2 - 1{,}56\,t + 0{,}72$ a un discriminant négatif, donc $P(t)$ est positif pour $t \geqslant 0$. On en déduit que $\psi(y)$ est croissante pour $y \geqslant 1$ et, comme $\psi(1) = 0$, que $\psi(y)$ est positive pour $y \geqslant 1$, et donc aussi $\varphi(y)$ par (28), ce qui achève la démonstration.

Démonstration du lemme 3. — D'après un lemme de Dirichlet (*cf.* [13], chap. 5, ou [7], chap. 11), étant donnés un réel ξ quelconque et un nombre $A > 1$, il existe une fraction r/s, avec $s \leqslant A$ telle que $|\xi-(r/s)| \leqslant 1/s\,A$. Posant ici $\xi = \theta(p)$ et $A = x_0^\alpha$, on obtient

$$\left|\theta(p)-\frac{r}{s}\right| \leqslant \frac{1}{s x_0^\alpha}.$$

D'après le lemme 2, la fonction $\theta(x)$ est décroissante. Pour chaque fraction r/s comprise entre $\theta(\infty) = 1/2$ et $\theta(1) = (\log 3/2)/(\log 2) = 0{,}585\ldots$, il existe une seule valeur $x_{r,s}$ telle que $\theta(x_{r,s}) = r/s$. Soit $\beta' > \beta$ tel que $2\alpha+\beta' < 1$. Pour chaque fraction r/s telle que $s \leqslant x_0^\alpha$ et telle que $x_0/2 \leqslant x_{r,s} \leqslant x_0$, on retire, autour de $x_{r,s}$, une zone $|x-x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$. En dehors de cette zone, on aura

$$\left|\theta(x)-\frac{r}{s}\right| \geqslant \frac{|x-x_{r,s}|}{|\theta'(\xi)|} \gg \frac{x_0^{\beta'}}{x_0(\log x_0)^2} \geqslant \frac{x_0^\beta}{x_0}.$$

Dans chaque zone $|x-x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$, il y a au plus $x_0^{\beta'}+1$ nombres premiers, et comme $s \leqslant x_0^\alpha$, il y a au plus $x_0^{2\alpha}$ zones. On retire donc $O(x_0^{2\alpha+\beta'})$ nombres premiers. Comme $2\alpha+\beta' < 1$, il reste donc plus de $x_0/(3\log x_0)$ nombres premiers pour lesquels (20) est vérifié.

Démonstration du lemme 4. — Soient p_1 et q_1 les plus grands nombres premiers divisant n avec les exposants 1 et 2. Désignons les nombres premiers successifs entourant p_1 et q_1 par

$$\ldots > p_3 > p_2 < p_1 < P_1 < P_2 < P_3 \ldots$$
$$\ldots < q_3 < q_2 < q_1 < Q_1 < Q_2 < Q_3 \ldots$$

On applique la proposition 5 avec $\lambda_1 = p_1$, $\lambda_2 = q_1$ et $x = p$ (par (8)) :

(29) $$p_1 = x + O(\sqrt{x}),$$

et, à cause de (8) et (15),

(30) $$q_1 = x_2 + O(\sqrt{x_2}) = y + O(\sqrt{y}).$$

Si l'on choisit $r < x^\tau/\log x$, on aura, d'après le lemme 1,

(31) $$P_r = p_1 + O(p_1^\tau) = x + O(x^\tau),$$

et

$$p_r = x + O(x^\tau).$$

De même, si l'on choisit $s < y^\tau/\log y$, on aura

$$q_s = y + O(y^\tau) \qquad \text{et} \qquad Q_s = y + O(y^\tau).$$

Avec la proposition 5, et comme par (9) $x_k \sim \sqrt[k]{kx}$, on voit que, pour $r < x^\tau/\log x$ et $s < y^\tau/\log y$, les nombres premiers $q_1 \dots q_s$ vont diviser n avec l'exposant 2, les nombres $Q_1 \dots Q_s, p_1 \dots p_r$ avec l'exposant 1.

On prend pour r et s les valeurs fournies par le lemme 3. Comme $\beta > (1+\tau)/2$, on a $\alpha < (1-\beta)/2 < (1-\tau)/4$, et comme $\tau > 1/3$, il s'ensuit que

$$s \leqslant x_0^\alpha \quad \Rightarrow \quad s < \frac{y^\tau}{\log y}.$$

Si $r/s > \theta(p)$, on considère

$$n_1 = n \frac{P_1 \dots P_r}{q_1 \dots q_s}. \tag{32}$$

Si $r/s < \theta(p)$, on considérerait de même $n_2 = n((Q_1 \dots Q_s)/(p_1 \dots p_r))$; les raisonnements seraient tout à fait semblables. On va montrer que

$$\frac{\sigma(n_1)}{n_1} > \frac{\sigma(n)}{n}. \tag{33}$$

On a

$$\frac{\sigma(n_1)}{n_1} = \frac{\sigma(n)}{n} \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{P_i}\right) \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{1+(1/(q_i^2+q_i))}\right)$$

$$= \frac{\sigma(n)}{n} \frac{(1+(1/x))^r}{(1+(1/(y^2+y)))^s} \prod_{i=1}^r \left(\frac{1+(1/P_i)}{1+(1/x)}\right) \prod_{i=1}^s \frac{(1+(1/(y^2+y)))}{(1+(1/(q_i^2+q_i)))}$$

et

$$\log \frac{\sigma(n_1)}{n_1} - \log \frac{\sigma(n)}{n} = S_1 + S_2 + S_3,$$

avec

$$S_1 = r \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - s \log\left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right) = s \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}\right) \gg \frac{s x_0^\beta}{x_0^2},$$

compte tenu de (15) et de (20), car $x = p$;

$$S_2 = \sum_{i=1}^{r} \log\left(1+\frac{1}{P_i}\right) - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\sum_{i=1}^{r} \frac{P_i - x}{\xi_i^2+\xi_i} = O\left(\frac{s}{x_0^{2-\tau}}\right)$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, (31) et la relation $r < s$. On a de même

$$S_3 = \sum_{i=1}^{s} \log\left(1+\frac{1}{y^2+y}\right) - \log\left(1+\frac{1}{q_i^2+q_i}\right) = O\left(\frac{sy^\tau}{y^3}\right) = O\left(\frac{s}{x_0^{(3-\tau)/2}}\right).$$

Les sommes S_2 et S_3 sont négatives, et $S_2+S_3 = O\,(s/(x^{(3-\tau)/2})$. Comme $\beta > (1+\tau)/2$, on a $S_1+S_2+S_3 > 0$, ce qui démontre (33).

Majorons maintenant n_1/n,

$$\frac{n_1}{n} = \frac{P_1 \ldots P_r}{q_1 \ldots q_s} = \frac{x^r}{y^s}\left(\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{P_i}{x}\right)\right)\Big/\left(\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{y}{q_i}\right)\right).$$

On a

$$\log\frac{n_1}{n} = S_4+S_5+S_6,$$

avec

$$S_4 = r\log x - s\log y = s\log x\left(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}\right) \leqslant \frac{\log x_0}{x_0^\alpha},$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{r} \log\frac{P_i}{x} = \sum_{i=1}^{r} \log\left(1+\frac{P_i - x}{x}\right) = O\left(\frac{sx_0^\tau}{x_0}\right) = O\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{1-\tau}}\right),$$

$$S_6 = -\sum_{i=1}^{s} \log\left(\frac{q_i}{y}\right) = -\sum_{i=1}^{s} \log\left(1-\frac{y-q_i}{y}\right)$$

$$= O\left(s\frac{y^\tau}{y}\right) = O\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}\right),$$

ce qui donne

$$\text{(34)}\qquad \log\frac{n_1}{n} = O\left(\frac{\log x_0}{x_0^\alpha}\right) + O\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}\right) = O\left(\frac{1}{x_0^c}\right),$$

pour tout $c < \min\,(\alpha, ((1-\tau)/2)-\alpha)$. En choisissant α légèrement inférieur à $(1-\tau)/4$, et β légèrement supérieur à $(1+\tau)/2$, on peut prendre, pour c, toute valeur inférieure à $(1-\tau)/4 = 5/48$.

Maintenant, par (33), on a $(\sigma(n_1))/n_1 > (\sigma(n))/n$; d'après la définition des nombres superabondants, cela entraîne $n < n' \leqslant n_1$, donc, par (34), que

$$\log\frac{n'}{n} = O\left(\frac{1}{x_0^c}\right).$$

Comme par (2) et (29), on a

$$\log n \sim p_1 \sim p = x < x_0,$$

on obtient (21), ce qui démontre le lemme 4.

Démonstration du théorème 1. — Soient X assez grand, et N_0 le nombre colossalement abondant précédent X. Soient ε_0 associé à N_0, et x_0 défini par (8). Soient p_0 le plus grand facteur premier de N_0, et P_0 le nombre premier suivant p_0. On a

$$N_0 \leqslant X < N_0 P_0,$$

par (11) :

$$p_0 \leqslant x_0 < P_0,$$

et par (2) :

$$p_0 \sim P_0 \sim \log N_0.$$

On a donc

$$x_0 \sim \log N_0 \sim \log X. \tag{35}$$

On conserve les notations du lemme 4. Si p vérifie le lemme 3, on a

$$Q(NP) - Q(N) \geqslant (\log N)^c \geqslant x_0^c,$$

et

$$Q(X) \geqslant Q(N_0) \geqslant \textstyle\sum_{p \text{ vérifiant le lemme } 3} [Q(NP) - Q(N)] \geqslant \dfrac{x_0}{3\log x_0}\, x_0^c.$$

On en déduit par (35) :

$$Q(X) \geqslant \frac{(\log X)^{1+c}}{\log\log X}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $c < (1-\tau)/4$, on a aussi, pour tout $c < (1-\tau)/4$ et X assez grand,

$$Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c},$$

ce qui démontre le théorème 1.

5. Nombres sans cube superabondants

DÉFINITION. — Soit $\sigma^*(n)$ la fonction multiplicative qui vaut $\sigma^*(p^\alpha) = \sigma(p^\alpha)$ si $\alpha \leqslant 2$, et $\sigma^*(p^\alpha) = 0$ si $\alpha \geqslant 3$. On dit que n est un nombre *sans cube superabondant* si

$$m < n \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma^*(m)}{m} < \frac{\sigma^*(n)}{n}. \tag{36}$$

Cette définition est équivalente à la suivante. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des nombres entiers non divisibles par un cube. On dit que n est un nombre « sans cube superabondant », si $n \in \mathscr{C}$ et si $m \in \mathscr{C}$,

$$m < n \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Les propriétés de ces nombres sont très voisines de celles des nombres superabondants. Si n^* est un nombre sans cube superabondant, et s'écrit $n^* = \prod p^{\alpha_p}$, on a (*cf.* proposition 1) :

$$2 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p.$$

Un tel nombre dépend donc de deux nombres premiers, q (le plus grand tel que $\alpha_q = 2$) et p (le plus grand diviseur premier).

On définit sans difficultés les nombres « sans cube colossalement abondants ». Pour $\varepsilon > 0$, il existe N_ε^* en lequel la fonction $(\sigma^*(n))/(n^{1+\varepsilon})$ est maximale. Si T est l'application de $\mathbf{N} \to \mathscr{C}$, définie par

$$T(\prod p^{\alpha_p}) = \prod p^{\min(\alpha_p, 2)},$$

on a $\mathbf{N}_\varepsilon^* = T(N_\varepsilon)$. Mais il n'est pas vrai que « n superabondant » $\Rightarrow$ « $T(n)$ sans cube superabondants ». Enfin, la proposition 5 s'adapte aisément aux nombres sans cube superabondants. On pose :

$$Q^*(X) = \text{card}\{n^* \leqslant X, n^* \text{ sans cube superabondant}\}.$$

La démonstration du théorème 1 est valable, puisqu'on ne considère que les nombres divisant le nombre superabondant n avec un exposant égal à 1 ou 2. On a donc

$$Q^*(X) \geqslant (\log X)^{1+c}.$$

THÉORÈME 2. — *Soient n^* et n'^* deux nombres sans cube superabondants consécutifs, on a*

$$\overline{\lim}\frac{n'^*}{n^*} \geqslant \sqrt[4]{2} = 1,19.$$

Démonstration. — Soit a entier $\geqslant 6$. Il existe, d'après le lemme 2, un nombre réel x tel que

$$\theta(x) = \frac{\log y}{\log x} = \frac{a+1}{2a}. \tag{37}$$

On choisit $\varepsilon = (\log(1+(1/x)))/\log x$, et N_ε^* un nombre sans cube colossalement abondant associé à ε. On désigne les nombres premiers successifs entourant x et y (définis par (15)) par

$$\ldots p_3 < p_2 < p_1 \leqslant x < P_1 < P_2 < P_3 \ldots,$$

$$\ldots q_3 < q_2 < q_1 \leqslant y < Q_1 < Q_2 < Q_3 \ldots.$$

On a

$$N = N_\varepsilon^* = 2^2\, 3^2 \ldots q_2^2 q_1^2\, Q_1\, Q_2 \ldots p_1,$$

et les nombres sans cube superabondant n^* vérifiant $N \leqslant n^* < N x$ sont de la forme

$$n_s = N\frac{Q_1 \ldots Q_s}{p_1 \ldots p_r} \quad \text{ou} \quad n_s' = N\frac{P_1 \ldots P_r}{q_1 \ldots q_s},$$

r étant déterminé en fonction de s par la condition $N \leqslant n_s < N x$. On a, d'autre part, $s = O(\sqrt{y})$ par la proposition 5.

Si $s \geqslant 2a$, on a, avec (37),

$$x > \frac{n_s}{N} \geqslant \frac{y^s}{x^r} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}}\,\frac{y^{2a}}{x^{a+1}} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}},$$

d'où il vient

$$x^{r-a} > y^{s-2a} \geqslant 1,$$

et $r-a > 0$ c'est-à-dire $r \geqslant a+1$, ce qui entraîne que $p_1, p_2, \ldots, p_{a+1}$ ne divisent pas n_s. Considérons

$$n_s'' = n_s\frac{p_1 \ldots p_{a+1}}{Q_1 \ldots Q_{2a}}.$$

On a, par (37),

$$n''_s < n_s \frac{x^{a+1}}{y^{2a}} = n_s, \tag{38}$$

et

$$\frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \prod_{i=1}^{a+1}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) \prod_{i=1}^{2a}\left(\frac{1}{1+(1/(Q_i^2+Q_i))}\right),$$

d'où l'on tire, par (37) et (15) :

$$\frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} > \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \frac{(1+(1/x))^{a+1}}{(1+(1/(y^2+y)))^{2a}} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s}. \tag{39}$$

Si $s \geqslant 2a$, on voit, par (36), (38) et (39), que n_s n'est pas sans cube superabondant. On démontre la même chose pour n'_s, et il y a donc entre N et Nx au plus $4a$ nombres sans cube superabondants. En comparant (37) et (19), on a

$$a \sim \frac{\log x}{\log 2},$$

ce qui démontre le théorème 2.

6. **Quelques conjectures**

Il semble difficile de démontrer que l'on a, pour tout n superabondant (avec n' = nombre superabondant suivant n),

$$\frac{n'}{n} < 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Si le lemme 4 ne s'applique pas, on peut essayer d'utiliser les nombres premiers autour de $x_3 \sim \sqrt[3]{3x}$, mais il est difficile de voir si cela suffit à résoudre la question.

Il semble un peu plus facile de montrer que $Q(X) \leqslant (\log X)^{c'}$.

On peut s'intéresser aux nombres M_η où la fonction $(\sigma(n))/(n(\log n)^\eta)$ atteint son maximum. Les nombres M_η sont superabondants, mais il est difficile de les étudier, car la fonction $\log n$ n'est pas multiplicative. Il serait intéressant de savoir si les M_η sont colossalement abondants.

Les nombres superabondants, et les nombres hautement composés, sont des nombres qui ont beaucoup de diviseurs. On peut définir d'autres fonctions pour estimer si un nombre a beaucoup de diviseurs :

1° Soit d_n le plus petit diviseur de n pour lequel on a

$$\sum_{d \mid n,\, d \leqslant d_n} d \geqslant n. \tag{40}$$

On pose $f(n) = n/d_n$. Si n est déficient (c'est-à-dire si $\sigma(n) < 2n$), on a $d_n = n$ et $f(n) = 1$. On peut montrer que, pour $\varepsilon > 0$ et $n > n_0(\varepsilon)$, on a

$$f(n) \leqslant \exp(1+\varepsilon)\frac{\log_2 n \log_3 n}{\log_4 n},$$

et qu'il y a une infinité de n vérifiant

$$f(n) \geqslant \exp(1-\varepsilon)\frac{\log_2 n \log_3 n}{\log_4 n}.$$

Pour démontrer ces formules, on remarque que l'on a

$$\sum_{d \mid n,\, d \geqslant f(n)} \frac{1}{d} \geqslant 1,$$

ce qui entraîne

$$\sum_{f(n) \leqslant d \leqslant n} \chi_{\mathscr{M}}(d)\frac{1}{d} \geqslant 1,$$

où $\mathscr{M}$ est l'ensemble des nombres qui ont mêmes facteurs premiers que n, et χ sa fonction caractéristique. On évalue cette dernière somme à l'aide du résultat de DE BRUIJN [1] : η étant donné, pour $x > x_0(\eta)$, le nombre d'entiers $d \leqslant x$, composés de nombres premiers $\leqslant x^{1/k}$, est compris entre $x/(k!)^{1-\eta}$ et $x/(k!)^{1+\eta}$, ceci pour $k = k(x) < \sqrt{\log x}$.

2° Soit

$$g(n) = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{1}{m}\Big(\sum_{d \mid n,\, d \leqslant m} d\Big).$$

On a $g(n) \geqslant \sigma(n)/n$, avec égalité si n est une puissance de nombre premier.

Quel est l'ensemble des n pour lesquels $g(n) = \sigma(n)/n$? Il semble que cet ensemble ait pour densité 0, et que l'on ait $\lim 1/X \sum_{n=1}^{X} g(n) = \infty$. Il est même probable que l'on ait $\lim g(n)/n = \infty$ pour presque tout n (*cf.* [16]).

On peut introduire la fonction $\Delta(n)$, une des valeurs de m pour laquelle le maximum est réalisé :

$$g(n) = \frac{1}{\Delta(n)}(\textstyle\sum_{d/n,\, d \leqslant \Delta(n)} d).$$

On a $\lim \Delta(n) = +\infty$, mais, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim \Delta(n)/n^\varepsilon = 0$. Probablement, la densité des entiers vérifiant $\Delta(n) < n^\alpha$ est une fonction de α.

La fonction g est supermultiplicative :

$$((n_1, n_2) = 1) \quad \Rightarrow \quad (g(n_1 n_2) \geqslant g(n_1) g(n_2)).$$

Pour obtenir de grandes valeurs de $g(n)$, il faut choisir des nombres n ayant beaucoup de diviseurs entre $m/2$ et m. On a en effet :

$$\frac{1}{2} g(n) \leqslant \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{1}{m}(\textstyle\sum_{d \mid n,\, m/2 < d \leqslant m} d) \leqslant g(n).$$

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Pour un certain m, il y a au moins $(d(n) \log 2)/\log n$ diviseurs de n entre $m/2$ et m, et cela montre que

$$g(n) \geqslant \frac{\log 2}{2} \frac{d(n)}{\log n}.$$

Soit $n = 2, 3, \ldots, p_k$ le produit des k premiers nombres premiers. On sait que $k \sim \log n/\log \log n$. Si d est un diviseur de n, $\log d$ est la somme de k variables aléatoires prenant les valeurs 0 ou $\log p_i$; d'après le théorème central limite des probabilités, il y a plus de $c_1\, d(n)$ diviseurs de n dans l'intervalle

$$\sqrt{n}/e^{c_2 \sqrt{\log n \log \log n}}, \qquad \sqrt{n}\, e^{c_2 \sqrt{\log n \log \log n}},$$

et, en reprenant le raisonnement précédent, on en déduit que

$$g(n) \geqslant \frac{c\, d(n)}{\sqrt{\log n \log \log n}}.$$

D'autre part, le théorème de Sperner dit (*cf.* [15], et [3], tome 2, p. 114) : dans un ensemble à n éléments, si des parties $A_1, \ldots, A_h$ sont telles qu'aucune d'entre elles n'en contient une autre, leur nombre h vérifie : $h \leqslant \binom{n}{[n/2]}$. Le nombre maximal de diviseurs de $n = 2, 3, \ldots, p_k$ compris entre $m/2$ et m est donc majoré par $\binom{k}{[k/2]}$, cela montre que

$$g(n) \leqslant c' \, d(n) \sqrt{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Le théorème de SPERNER a été généralisé par DE BRUIJN [2], si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots, p_k^{\alpha_k}$ la plus grande famille de diviseurs de n, tels qu'aucun d'entre eux n'en divise un autre, est obtenu en considérant les nombres

$$\prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}, \quad 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^k \beta_i = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \alpha_i\right].$$

3° Soit $h(n) = \sum_{d \mid n, d < \sqrt{n}} d$. On a $h(n) \leqslant (d(n)/2) \sqrt{n}$, et on peut montrer que $h(n) = o(d(n) \sqrt{n})$ avec le théorème de SPERNER ou sa généralisation. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour $n = 2, 3, \ldots, p_k$ assez grand ·

$$\frac{h(n)}{\sqrt{n}} \geqslant 2^{(1-\varepsilon)(\log n / \log \log n)}$$

Montrons un résultat un peu faible :

Soit p un nombre premier assez grand, et soit $p_1 = p, p_2, p_3, \ldots, p_{2k} = q$ les nombres premiers suivant p. On choisit $k = [p^{1/3}/2 \log p]$. On a, d'après le lemme 1, $q \leqslant p + p^\tau$, ce qui entraîne $q^k \sim p^k$. On pose : $n = p_1 p_2, \ldots p_{2k}$. Il y a $\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$ façons d'écrire $n = uv$, $u < v$, u et v ayant chacun k facteurs premiers, et l'on a toujours

$$\frac{u}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{p^k}{q^k} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{pour } p \text{ assez grand.}$$

On a

$$h(n) \geqslant \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\frac{\sqrt{n}}{2}, \qquad n \sim p^{2k},$$

d'où

$$p \sim (\log n)^3, \qquad k \sim \frac{\log n}{6 \log \log n}$$

et $h(n) \geqslant 2^{(1/3 - \varepsilon) \log n / (\log \log n)}$ pour n assez grand.

L'étude des grandes valeurs de $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ nous amène à considérer les nombres f, g ou h hautement abondants (*voir* Introduction). On peut espérer montrer qu'à partir d'un certain rang, ces nombres sont divisibles par n'importe quelle puissance de nombres premiers, mais il semble difficile d'en dire plus.

On peut étudier les nombres pour lesquels l'inégalité (40) est une égalité, c'est-à-dire les nombres n tels qu'il existe m avec

$$\sum_{d \mid n,\, d \leq m} d = n \qquad \text{ou encore} \quad \sum_{d \mid n,\, d \leq m'} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n} - 1.$$

Lorsque $m' = 1$, on trouve les nombres parfaits ($\sigma(n) = 2n$). Les autres nombres de ce type inférieurs à 10^6 sont, avec entre parenthèses la valeur correspondante de $\sigma(n)/n$, 24 (5/2); 2 016 (13/4); 8 190 (16/5); 42 336 (85/28); 45 864 (85/28); 392 448 (37/12) et 714 240 (143/40).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bruijn (N. G. De). — On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *Indag. Math.*, t. 13, 1951, p. 50-60.

[2] Bruijn (N. G. De), Tengbergen (C. Van E.) and Kruyswijk (D.). — On the set of divisors of a number, *Nieuw Arch. f. Wisk.*, Ser. 2, t. 23, 1949-1951, p. 191-193.

[3] Comtet (L.). *Analyse combinatoire*, Volumes 1 et 2. — Paris, Presses Universitaires de France, 1970 (*Collection SUP.* « *Le mathématicien* », 4 et 5).

[4] Erdös (P.) and Alaoglu (L.). — On highly composite and similar numbers, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 56, 1944, p. 448-469.

[5] Erdös (P.). — On highly composite numbers, *J. of London math. Soc.*, t. 19, 1944, p. 130-134.

[6] Erdös (P.). — On the distribution function of additive functions, *Annals of Math.*, t. 47, 1946, p. 1-20.

[7] Hardy (G. H.) and Wright (E. M.). — *An introduction to the theory of numbers*, 4th edition. — Oxford, The Clarendon Press, 1960.

[8] Huxley (M. N.). *The distribution of prime numbers. Large sieves and zero density theorems.* — Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (*Oxford mathematical Monographs*).

[9] Lang (S.). — *Introduction to transcental numbers.* — New York, Addison-Wesley, 1966 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).

[10] Lang (S.). — Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 18e année, 1965-1966, n° 305, 8 p.

[11] Nicolas (J.-L.). — Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et « highly composite numbers », *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 129-191 (*Thèse Sc. math., Paris*, 1968).

[12] Nicolas (J.-L.). — Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, *Canad. J. of Math.*, t. 23, 1971, p. 116-130.

[13] Rademacher (H.). — *Lectures on elementary number theory.* — New York, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[14] Ramanujan (S.). — Highly composite numbers, *Proc. London math. Soc.*, Series 2, t. 14, 1915, p. 347-409; and "*Collected papers*", p. 78-128. — Cambridge, at the University Press, 1927.

[15] Sperner (E.). — Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.*, t. 27, 1928, p. 544-548.

[16] Problèmes et solutions, *Can. math. Bull.*, t. 16, 1973, p. 463.

(Texte reçu le 21 janvier 1974.)

Paul Erdös,
Magyar Tudomanyos Akademia,
Matematikai Kutato Intezete,
Réaltanoda u. 13-15,
Budapest V (Hongrie)

et

Jean-Louis Nicolas,
Département de Mathématiques,
U. E. R. des Sciences de Limoges,
123, rue Albert-Thomas,
87100 Limoges.