BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS VERDIER

Caractéristique d'Euler-Poincaré

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 441-445
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__441_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 441-445.

CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

PAR

JEAN-LOUIS VERDIER

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe fini opérant sur un espace topologique localement compact X satisfaisant à certaines hypothèses de finitude cohomologique. On note X_s l'ensemble des points de X, dont le stabilisateur appartient à une classe de conjugaison s, et Is la représentation induite par la représentation triviale d'un élément de s. En cohomologie rationnelle à supports compacts, la caractéristique d'Euler-Poincaré de X est un élément du groupe de Grothendieck des $Q\,[G]$-modules de type fini qui s'écrit $\chi\,(X, G) = \sum \chi\,(Xs/G) . \mathrm{I}s$, où $\chi\,(Xs/G)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré ordinaire.

1. Conditions de finitude

Soit X un espace localement compact. On suppose que X est de *dimension topologique finie.* Ceci veut dire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$ et tout faisceau abélien F sur X, $H^n_c\,(X, F) = 0$. C'est une condition locale sur X. Si X est localement isomorphe à un ouvert d'un polyèdre, X est de dimension topologique finie. Si X est de dimension topologique finie, tout sous-espace fermé (resp. ouvert) de X est de dimension topologique finie.

Nous dirons qu'un espace localement compact Y est *cohomologiquement de type fini* si, pour tout entier n, $H^n_c\,(Y, \mathbf{Z})$ est de type fini. Trois remarques importantes.

1° Soient Y un espace localement compact, et Z un ouvert de Y. Si deux des trois espaces Y, Z, $Y - Z$ sont cohomologiquement de type fini, le troisième l'est aussi.

2° Soit (Y_α), $\alpha \in A$, une famille finie de sous-espaces ouverts (resp. fermés) d'un espace localement compact Y. Si, pour tout ensemble fini d'indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, les espaces $Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} \ldots \cap Y_{\alpha_n}$ sont cohomologiquement de type fini, alors $\bigcup_\alpha Y$ est cohomologiquement de type fini.

3° D'après un théorème classique de Wilder [1], une condition suffisante pour la finitude cohomologique d'un espace *compact* Y est la suivante : pour tout $y \in Y$, tout entier n, tout voisinage U de y, il existe un voisinage V de y, $V \subset U$, tel que l'application de restriction $\tilde{H}^n(U, \mathbf{Z}) \to \tilde{H}^n(V, \mathbf{Z})$ soit nulle. En particulier, si tout point $y \in Y$ possède un système fondamental de voisinages contractiles, Y est cohomologiquement de type fini. Plus particulièrement, si Y est isomorphe localement à des ouverts de polyèdres, Y est cohomologiquement de type fini.

Pour tout espace localement compact Y, de dimension topologique finie et cohomologiquement de type fini, on pose

$$\chi_c(Y) = \Sigma_n (-1)^n \operatorname{rg}_{\mathbf{Z}} H_c^n(X, \mathbf{Z}).$$

2. Caractéristique d'Euler-Poincaré

Soient X un espace localement compact, de dimension topologique finie et cohomologiquement de type fini, et G un groupe fini opérant sur X. Introduisons quelques notations.

(*a*) Pour tout sous-groupe H de G, on pose $X^H = \{ x \in X \mid H x = x \}$. Le sous-espace X^H est fermé dans X.

(*b*) Pour tout sous-groupe H de G, on pose $X_H = \{ x \in X \mid \operatorname{Stab}(x) = \mathrm{H} \}$. Le sous-espace X_H est ouvert dans X^H.

(*c*) Notons $\mathfrak{S}$ l'ensemble ordonné des classes de conjugaison des sous-groupes de G. Pour tout $s \in \mathfrak{S}$ on pose

$$X^s = \bigcup_{H \in s} X^H,$$
$$X_s = \bigcup_{H \in s} X_H.$$

Pour tout $s \in \mathfrak{S}$, X^s et X_s sont des G-espaces localement compacts; X^s est fermé dans X, X_s est ouvert dans X.

(*d*) Notons $M(G, \mathbf{Z})$ [resp. $M(G, \mathbf{Q})$] le groupe des classes d'isomorphismes des $\mathbf{Z}[G]$ (resp. $\mathbf{Q}[G]$) modules de type fini modulo les suites exactes. Pour tout $\mathbf{Z}[G]$-module P (resp. $\mathbf{Q}[G]$-module), on note $d(P)$ l'élément correspondant dans $M(G, \mathbf{Z})$ [resp. $M(G, \mathbf{Q})$]. Comme X est cohomologiquement de type fini, pour tout entier n, $H_c^n(X, \mathbf{Z})$ [resp. $H_c^n(X, \mathbf{Q})$] est un $\mathbf{Z}[G]$ (resp. $\mathbf{Q}[G]$) module de type fini. Posons

$$\chi_{\mathbf{Z}}(X, G) = \Sigma_n (-1)^n d(H_c^n(X, \mathbf{Z})),$$
$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = \Sigma_n (-1)^n d(H_c^n(X, \mathbf{Q})).$$

Les sommes ont un sens, car X est de dimension topologique finie.

(*e*) Pour tout $s \in \mathfrak{S}$, on note I_s la classe, dans $M(G, \mathbf{Z})$ [ou $M(G, \mathbf{Q})$], de la représentation induite à G de la représentation triviale d'un élément H de s.

THÉORÈME (On utilise les hypothèses et notations introduites ci-dessus). — *Si, pour tout sous-groupe H de G, X^H est cohomologiquement de type fini, alors, pour tout $s \in \mathfrak{S}$, X_s/G est cohomologiquement de type fini, et on a*

$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \chi_c(X_s/G) . I_s.$$

On utilise le lemme suivant.

LEMME. — *Lorsque G opère librement sur X, X/G est cohomologiquement de type fini, et on a*

$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = \chi_c(X/G) . \operatorname{Reg}(G).$$

Notons $\pi : X \rightarrow X/G$ l'application canonique. Le faisceau $\pi_*(\mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}[G]$ faisceau localement libre de rang 1 sur X/G. L'espace X/G est de dimension topologique finie. On a, pour tout n,

$$H_c^n(X, \mathbf{Z}) \simeq H_c^n(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}))$$

(isomorphisme de G-modules). La formule de projection (valable, car X/G est de dimension topologique finie) montre que, pour tout G-module M, on a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = \operatorname{Tor}_{-p}^{\mathbf{Z}[G]}(H_c^q(X/G, \pi_*(\mathbf{Z})), M)$$

qui converge vers $H_c^{p+q}(X, M \otimes_G \pi_*(\mathbf{Z}))$. En terme de catégories dérivées, ceci se dit encore

$$R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}) \otimes_G M) \simeq R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z})) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_G M.$$

On en déduit que $R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}))$ est un complexe d'amplitude plate finie, i. e. quasi-isomorphe à un complexe borné dont les composants sont plats. En utilisant le fait que la cohomologie de ce complexe est de type fini, on montre que $R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}))$ est un complexe parfait, i. e. quasi-isomorphe à un complexe borné dont les composants sont des projectifs de type fini. Par suite,

$$\chi_{\mathbf{Z}}(X, G) = d(P_1) - d(P_2),$$

où P_1 et P_2 sont des $\mathbf{Z}[G]$-modules projectifs. Donc

$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = d(P_1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) - d(P_2 \otimes \mathbf{Q}).$$

D'après un théorème de Swan [3], les représentations du type $P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, où P est un $\mathbf{Z}[G]$-module projectif, sont des multiples de la représentation régulière. Par suite, on a $\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = m \operatorname{Reg}(G)$, et il faut maintenant répondre à la question : Combien de fois mon enfant ? Pour le savoir, il suffit de savoir combien de fois est contenue la représentation triviale. Donc il faut calculer

$$\chi\,(R\,\Gamma_c\,(X/G,\ \pi_*\,(\mathbf{Q}))\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_G \mathbf{Q}),$$

qui d'après la formule de projection n'est autre que

$$\chi\,(R\,\Gamma_c\,(X/G,\ \pi_*\,(\mathbf{Q})\otimes_G \mathbf{Q})).$$

Comme $\pi_*\,(\mathbf{Q})\otimes_G \mathbf{Q}\simeq\mathbf{Q}$, on a $m=\chi_c\,(X/G)$. On a démontré en route que X/G est cohomologiquement de type fini.

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème. — Il faut tout d'abord se convaincre que, pour tout $s\in\mathfrak{S}$, X_s est cohomologiquement de type fini et qu'on a

$$\chi_{\mathbf{Q}}\,(X,\ G)=\Sigma_{s\in\mathfrak{S}}\,\chi_{\mathbf{Q}}\,(X_s,\ G).$$

Ceci fait, on remarque que X_s est la réunion disjointe des X_H, $H\in s$, et que par suite $\chi_{\mathbf{Q}}\,(X_s,\ G)$ s'obtient par induction à G de la classe $\chi_{\mathbf{Q}}\,(X_H,\ N\,(H))$ où H est un élément quelconque de s et $N\,(H)$ son normalisateur. D'après le lemme,

$$\chi_{\mathbf{Q}}\,(X_H,\ N\,(H))=\chi_c\,(X_H/N\,(H)).\mathrm{Reg}\,(N\,(H)/H).$$

Mais $X_H/N\,(H)=X_s/G$ et, de plus, la représentation de G induite par la représentation régulière de $N\,(H)/H$ est la représentation de G induite par la représentation triviale de H. On a donc

$$\chi_{\mathbf{Q}}\,(X_s,\ G)=\chi_c\,(X_s/G).I_s.$$

C. Q. F. D.

Le théorème précédent donne des informations complètes lorsque les I_S, $s\in\mathfrak{S}$ sont linéairement indépendants dans $M\,(\mathbf{Q},\ G)$ ce qui implique que G est cyclique [2]. Supposons donc G cyclique; soient σ un générateur de G, et n l'ordre de G. Pour tout diviseur k de n, posons

$$X_k=\{\,x\in X\mid\sigma^k\,x=x\ \text{et}\ \sigma^l\,x=x\Rightarrow l\equiv 0\,(k)\,\}.$$

Notons de même I_k, la représentation de G déduite de la représentation régulière de $G/\{\,\sigma^k,\,\sigma^{2k},\,\ldots\,\}$ par l'application de passage au quotient. On a

$$\chi_{\mathbf{Q}}\,(X,\ G)=\Sigma_{k\mid n}\,\chi_c\,(X_k).I_k.$$

En particulier, lorsque X est la sphère S^p on obtient :

(*a*) Si σ préserve l'orientation, $\chi_c\,(X_k)=0$ pour tout $k\mid n$ si p est impair, et $\chi_c\,(X_1)=2$, $\chi_c\,(X_k)=0$ pour tout $k\mid n$, $k\neq 1$, si p est pair.

(*b*) Si σ ne préserve pas l'orientation, $\chi_c\,(X_2)=1$, $\chi_c\,(X_k)=0$ pour tout $k\mid n$, $k\neq 2$, si p est pair, et $\chi_c\,(X_2)=-1$, $\chi_c\,(X_1)=2$, $\chi_c\,(X_k)=0$ pour tout $k\mid n$, $k\neq 1,\ 2$, si p est impair.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand) and *al.* — *Seminar on transformation groups.* — Princeton, Princeton University Press, 1960 (*Annals of Mathematics Studies*, 46).

[2] SERRE (J.-P.). — *Représentations linéaires des groupes finis.* — Paris, Hermann, 1967 (*Collection Méthodes*).

[3] SWAN (R. G.). — The Grothendieck ring of a finite group, *Topology*, t. 2, 1963, p. 85-110.

(Texte reçu le 13 septembre 1973.)

Jean-Louis VERDIER,
104, rue d'Assas,
75006 Paris.