BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Problème de Waring avec exposants non entiers

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 285-295
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__285_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 285-295.

PROBLÈME DE WARING AVEC EXPOSANTS NON ENTIERS

PAR

JEAN-MARC DESHOUILLERS

[Bordeaux et Paris]

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est d'étudier la généralisation du problème de Waring proposée par B. I. SEGAL. En utilisant la méthode du cercle de HARDY et LITTLEWOOD, on démontre que tout entier assez grand est somme d'au plus $4c(\log c + 0{,}5 \log\log c + 3{,}5)$ nombres de la forme $[n^c]$, c désignant un nombre réel non entier supérieur à 12. On étudie également le nombre de représentations d'un entier donné en somme de l nombres de la forme $[n^c]$.

0. Introduction, notations

Dans tout cet article, c désignera un nombre réel non entier, supérieur à 12. On appellera $G(c)$ le plus petit entier s (s'il existe) tel que tout nombre assez grand soit somme de s nombres de la forme $[n^c]$, et $g(c)$ le plus petit entier t (s'il existe) tel que tout nombre soit somme de t nombres de la forme $[n^c]$.

L'existence de $G(c)$ [et donc celle de $g(c)$] a été démontrée, en 1933, par B. I. SEGAL (*cf.* [4]) qui a pu majorer $G(c)$ par une quantité de l'ordre de grandeur de $c^2.2^c$.

Nous nous proposons ici d'obtenir une meilleure majoration de $G(c)$, ainsi qu'une estimation asymptotique du nombre $r_{l,c}(N)$ de représentations de l'entier N en somme de l nombres de la forme $[n^c]$; dans la première section, nous rappellerons quelques résultats classiques permettant l'estimation de sommes trigonométriques; la seconde section est consacrée à la présentation de la version de la méthode du cercle que nous utiliserons; nous étudierons la contribution de l'intervalle complémentaire dans la troisième section, le résultat essentiel étant le suivant :

THÉORÈME 1. — *Si α est un nombre réel tel que* $\| \alpha \| > (2\, c\, X^{c-1})^{-1}$ (¹), *et si c est un nombre réel non entier supérieur à* 12, *on a*

$$| \Sigma_{n=0}^{X} \exp (2\, i\, \pi \alpha\, [n^c]) | = O (X^{1-\rho}), \qquad où \quad \rho^{-1} = 6\, c^2 (\log c + 14).$$

Dans la quatrième section, nous appliquerons les résultats précédents à l'estimation du nombre $r_{l,c}(N)$, et nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Lorsque l est supérieur à* $6\, c^3 (\log c + 14)$, *on a*

$$r_{l,c}(N) = \frac{(\Gamma(1+\gamma))^l}{\Gamma(\gamma)} \cdot N^{l\gamma-1} + o(N^{l\gamma-1}), \qquad où \quad \gamma = \frac{1}{c}, \qquad et \qquad c > 12.$$

Dans la cinquième section, consacrée à la majoration de G, nous démontrerons le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Lorsque c est supérieur à* 12, *on a :*

$$G(c) < 4\, c (\log c + 0{,}5 \log \log c + 3{,}5).$$

Remarquons que la valeur 12 n'a pas une grande importance; pour les valeurs de c inférieures à 12, on peut traiter le problème sur la même ligne en remplaçant les estimations de Vinogradov par celles de Van der Corput; cependant, par une méthode différente, on peut montrer que $G(c)$ est égal à 2 lorsque c est compris entre 1 et 4/3 (*cf.* [1]), résultat que l'on ne peut obtenir que par la méthode du cercle.

Remarquons que toutes les inégalités utilisées sont effectives; on peut déterminer $g(c)$, du moins théoriquement, pour toutes les valeurs de c non entières, supérieures à 12 [en effet, on sait que

$$g(c) > [2^c] - 1 > 4\, c (\log c + 0{,}5 \log \log c + 3{,}5)].$$

NOTATIONS :

N désignera un entier (assez grand).

On posera $\gamma = 1/c$, $X = N^\gamma$ et $\tau = 2\, c\, N^{1-\gamma}$.

On appellera *intervalle fondamental* (major arc) l'intervalle

$$I_F = [-\tau^{-1}, \tau^{-1}],$$

et *intervalle complémentaire* (minor arc) l'intervalle $I_c =]\tau^{-1}, 1 - \tau^{-1}[$;

On notera $e(u) = \exp (2\, i\, \pi\, u)$.

1. Rappel de résultats classiques

Le lemme suivant est le fondement de la méthode du cercle :

LEMME 1.1. — *Soient N un entier, et $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_l$, l suites strictement croissantes d'entiers positifs ou nuls; appelons $r_l(N)$, le nombre de*

(¹) On note $\| u \|$ la distance de u à l'entier le plus proche.

manières de représenter l'entier N sous la forme $N = a_1 + \ldots + a_l$ (où a_i appartient à $\mathcal{A}_i$); alors :

$$(1) \qquad r_l(N) = \int_I e(-\alpha N) \prod_{i=1}^{l} \left(\sum_{a_i \in \mathcal{A}_i, a_i \leq N} e(\alpha a_i)\right) d\alpha.$$

I étant un intervalle arbitraire de longueur 1.

Remarque sur l'application du lemme 1.1. — Supposons que les suites $\mathcal{A}_i$ sont équiréparties modulo chaque entier, et que les suites

$$\alpha \mathcal{A}_i \ (= \{ \alpha a_i ; a_i \in \mathcal{A}_i \})$$

sont équiréparties modulo 1 pour tout nombre irrationnel α et tout indice i. On peut alors espérer que la somme $|\sum_{a_i \in \mathcal{A}_i, a_i \leq N} e(\alpha a_i)|$ sera assez grande [c'est-à-dire voisine de $A_i(N) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{a_i \in \mathcal{A}_i, a_i \leq N} 1$] lorsque α sera proche d'un entier, et, au contraire, qu'elle sera assez petite [c'est-à-dire d'un ordre inférieur à $A_i(N)$] lorsque α sera assez éloigné d'un entier.

On peut donc espérer trouver un petit intervalle I_F autour de l'entier contenu dans l'intervalle I, tel que la contribution de I_F à l'intégrale (1) soit plus importante que la contribution de $I - I_F$. On obtiendra ainsi une estimation de $r_l(N)$ de la forme

terme principal + terme erreur.

Notons enfin que l'hypothèse sur l'équirépartition des suites $\mathcal{A}_i$ modulo chaque entier n'est pas satisfaite si l'on prend pour $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des puissances k-ièmes des entiers, ou l'ensemble des nombres premiers; il faut alors tenir compte des irrégularités de distribution, ce qui conduit à la « dissection de Farey » classique et à la présence de la « série singulière » dans le résultat (*cf.* [5]).

Les deux lemmes suivants permettent l'estimation de certaines sommes trigonométriques; le lemme 1.2, dû à Van der Corput, peut être trouvé dans le livre de Vinogradov; le lemme 1.3 se déduit facilement des résultats de Vinogradov (*cf.* [5], p. 109).

LEMME 1.2. — *Si f est deux fois différentiable sur $[a, b]$, et est telle que $f''(x) \geq 0$ et $0 \leq f'(x) \leq 1/2$, on a*

$$\sum_{n=a}^{b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(x))\, dx + 4\,\theta \qquad (\text{où } |\theta| \leq 1).$$

LEMME 1.3. — *Soit c un nombre réel non entier supérieur à* 12, *X un nombre réel positif, et α un nombre réel compris (éventuellement à une constante près) entre X^{-c+1} et X^{c-2}; on pose*

$$\lambda = \frac{\log \alpha}{\log X}, \qquad S(\alpha, X) = \sum_{n=1}^{X} e(\alpha n^c).$$

On a

$$| S(\alpha, X) | \ll X^{1-\rho(\alpha)},$$

où

$$\rho^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 3(c+2)^2 \log 160\, c & si \quad \lambda \leqq 0, \\ 3\left(c + 1 + \dfrac{1}{2c} + \lambda\right)^2 \log 160\,(c+\lambda) & si \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Remarquons que la constante impliquée par le symbole $\ll$ ne dépend que de c, mais en dépend effectivement (elle tend vers l'infini, quand c se rapproche d'un entier); si c est entier, le lemme 1.3 n'est plus valide ($S(1, x)$ est alors égal à $[x]$).

Le lemme 1.4 ci-dessous, dû à VINOGRADOV (*cf.* [5], p. 32) permet d'approximer la fonction caractéristique d'un sous-intervalle de l'intervalle $[0, 1]$ par la somme d'une série de Fourier. Le lemme 1.5, dû à ERDÖS et TURÁN (*cf.* [2]) permet de calculer la discrépance d'une suite de nombres réels; c'est une forme finie du critère de Weyl; J. F. KOKSMA cite ce résultat en [3], et indique une valeur numérique de la constante impliquée (150).

LEMME 1.4. — *Soient α, β, Δ trois nombres réels tels que*

$$0 < \Delta < \frac{1}{2}, \qquad \Delta \leqq \beta - \alpha \leqq 1 - \Delta.$$

Il existe alors une fonction périodique ψ de période 1 telle que :

(i) $\psi(u) = 1$ *si* $\alpha + (1/2)\Delta \leqq u \leqq \beta - (1/2)\Delta$;

(ii) $\psi(u) = 0$ *si* $\beta + (1/2)\Delta \leqq u \leqq 1 + \alpha - (1/2)\Delta$;

(iii) $0 \leqq \psi(u) \leqq 1$ *dans tous les cas;*

(iv) $\psi(u) = (\beta - \alpha) + \sum_{|q| \geqq 1} c_q\, e(qu)$,

où

$$| c_q | \ll \inf((\beta - \alpha), | q^{-1} |, (q^2 \Delta)^{-1}).$$

LEMME 1.5. — *Soient $u_1, u_2, \ldots, u_N$ une suite finie de nombres réels, et I un sous-intervalle de $[0, 1[$ de longueur $\mu(I)$. Soit $\mathfrak{N}(N, I)$ le nombre d'indices i compris entre 1 et N tels que $\{u_i\}$ appartienne à I. Pour tout nombre H, compris entre 1 et N, on a*

$$| \mathfrak{N}(N, I) - \mu(I).N | \ll \frac{N}{H} + \sum_{h=1}^{H} p_h \left| \sum_{i=1}^{N} e(hu_i) \right|,$$

où

$$p_h = \inf\left(\mu(I) + \frac{1}{H}, 1 - \mu(I) + \frac{1}{H}, \frac{1}{h}\right)$$

2. Contribution de l'intervalle fondamental

Dans cette section, nous indiquerons les grandes lignes de la démonstration du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit l un entier supérieur à $c+1$; lorsque l'entier N_0 est compris entre* $(1/2)\,N$ *et* N, *on a*

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} (\Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\,[x^c]))^l\, e\,(-\,\alpha\, N_0)\, d\alpha = \frac{(\Gamma\,(1+\gamma))^l}{\Gamma\,(l\,\gamma)}\, N_0^{l\gamma-1} + o\,(N^{l\gamma-1}).$$

Commençons par remarquer que

$$\Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\,[x^c]) = \Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\, x^c)\; e\,(-\,\alpha\,\{\, x^c\,\}) = \Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\, x^c) + O\,(\,|\,\alpha\,|\,.X),$$

et que $|\,\alpha\,|\,X = O\,(X.\tau^{-1})$ lorsque α appartient à l'intervalle fondamental.

D'après le développement du binôme et la majoration triviale, on a

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} (\Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\,[x^c]))^l\, e\,(-\,\alpha\, N_0)\, d\alpha$$
$$= \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (\Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\, x^c))^l\, e\,(-\,\alpha\, N_0)\, d\alpha + O\,(\tau^{-2}.X^l).$$

Mais $\tau^{-2}.X^l = N^{-2+2\gamma}.N^{l\gamma} = N^{l\gamma-1}.N^{2\gamma-1} = o\,(N^{l\gamma-1})$, car c est supérieur à 12, et donc à 2.

Le terme erreur est donc $o\,(N^{l\gamma-1})$; il nous suffit donc d'estimer l'intégrale du second membre, estimation qui nous sera fournie par la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Lorsque N_0 est un entier compris entre* $(1/2)\;N$ *et N, on a*

$$\int_{I_F} (\Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\, x^c))^l\, e\,(-\,\alpha\, N_0)\; d\alpha = \frac{(\Gamma\,(1+\gamma))^l}{\Gamma\,(l\,\gamma)}\, N_0^{l\gamma-1} + o\,(N^{l\gamma-1}).$$

Cette proposition est également valable lorsque c est un nombre entier positif, et la démonstration, donnée par VINOGRADOV en [5], ne repose pas sur le fait que c est entier; nous nous contenterons ici de rappeler les grandes lignes de la démonstration, en renvoyant le lecteur à [5] pour plus de détails :

(i) Quand α appartient à l'intervalle fondamental, on ne commet pas une grande erreur en substituant

$$I\,(\alpha) = \int_0^X e\,(\alpha\, x^c)\, dx \quad \text{à} \quad \Sigma_{x=0}^{X}\, e\,(\alpha\, x^c) \qquad (cf.\ \text{lemme } 1.2).$$

(ii) On pose $J_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\alpha)^l \, e(-\alpha N_0)\, d\alpha$, et on interprète $J_0(\alpha)$ comme étant le nombre de solutions de certaines inéquations, ce qui permet d'évaluer $J_0(\alpha)$.

(iii) On achève la démonstration en montrant que l'intégrale $\int_{\alpha \notin I_F} (I(\alpha))^l \, e(-\alpha N_0)\, d\alpha$ est $o(N^{l\gamma-1})$.

3. Contribution de l'intervalle complémentaire

Sur l'intervalle complémentaire, nous utiliserons des majorations du genre :

$$\left| \int_{I_C} (\textstyle\sum_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]))^r \, e(-\alpha N_0)\, d\alpha \right| \leq (\sup_{\alpha \in I_C} | \textstyle\sum_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]) |)^r.$$

Remarquons que sur l'intervalle fondamental, nous avons pu relier facilement les sommes $\sum e(\alpha [x^c])$ et $\sum e(\alpha x^c)$ du fait que α était petit; cette fois-ci, α et $\{ x^c \}$ peuvent tous deux être de l'ordre de 1, et la même méthode ne conduirait qu'à l'estimation triviale :

$$\textstyle\sum_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]) = \sum_{x=0}^{X} e(\alpha x^c) + O(X).$$

On supposera à partir de maintenant que α est normalisé de telle sorte que $|\alpha| = \|\alpha\|$. On ne restreint pas la généralité de la question, car on observe que $e(\alpha n)$ est égal à $e(\|\alpha\| n)$ ou à son conjugué.

Pour calculer la somme du membre de gauche, commençons par découper l'intervalle $[0, 1]$ en k sous-intervalles I_j d'extrémités $(j-1)/k$ et j/k $(j = 1, \ldots, k)$ (k sera choisi par la suite); écrivons alors :

$$\textstyle\sum_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]) = \sum_{j=1}^{k} \sum^{(j)} e(\alpha [x^c]),$$

où l'exposant symbolique (j) indique que l'on effectue la sommation sur les entiers x compris entre 0 et X, et tels que $\{ x^c \}$ appartienne à I_j; nous savons alors que $\{ x^c \}$ est proche de j/k, et nous obtenons

$$\begin{aligned} \textstyle\sum^{(j)} e(\alpha [x^c]) &= \textstyle\sum^{(j)} e\left(\alpha x^c - \frac{\alpha j}{k} + \frac{\theta}{k}\right) \\ &= e\left(-\frac{\alpha j}{k}\right) \textstyle\sum^{(j)} e(\alpha x^c) + O\left(\sum^{(j)} \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

En sommant cette dernière relation, on trouve que

$$| \textstyle\sum_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]) | \ll \sum_{j=1}^{k} | \sum^{(j)} e(\alpha x^c) | + \frac{X}{k}. \tag{2}$$

Par le lemme 1.4, nous pouvons construire une fonction ψ_j périodique, de période 1, satisfaisant la condition du lemme 1.4, avec

$$\alpha = \frac{j-1}{k}, \qquad \beta = \frac{j}{k}, \qquad \text{on suppose } \Delta < \frac{1}{k}.$$

Soient $c_q^{(j)}$ les coefficients du développement de Fourier de ψ_j. $\Sigma^{(j)}$ prend alors la forme (3) suivante :

$$\Sigma^{(j)} e(\alpha x^c) = \Sigma_{x=0}^X e(\alpha x^c)\,\psi_j(x^c) + O(\mathcal{N}(\Delta)), \tag{3}$$

$\mathcal{N}(\Delta)$ désignant un majorant du nombre des x compris entre O et X, tels que $\{x^c\}$ appartienne à un intervalle donné de longueur Δ.

Pour majorer $\mathcal{N}(\Delta)$, nous pouvons appliquer le lemme 1.5, ce qui nous donne :

$$\mathcal{N}(\Delta) \ll X\Delta + \frac{X}{M} + \Sigma_{m=1}^M p_m \,|\, \Sigma_{x=0}^X e(mx^c)\,|, \tag{4}$$

avec

$$p_m = \inf\left(\Delta + \frac{1}{M}, \frac{1}{m}\right).$$

Remarquons à ce stade que nous ne perdons rien en choisissant M de l'ordre de grandeur de Δ^{-1}, sous réserve que le troisième terme de l'expression (4) soit d'ordre inférieur à $X\Delta$ (ce que nous montrerons). On a donc (en choisissant $M = \Delta^{-1}$) :

$$\mathcal{N}(\Delta) \ll X\Delta + \Delta\,\Sigma_{m=1}^{\Delta^{-1}} \,|\, \Sigma_{x=0}^X e(mx^c)\,|.$$

Si nous imposons dès maintenant une borne pour Δ (par exemple, $\Delta > X^{-1/2}$, nous vérifierons que le choix de Δ est compatible avec cette condition), nous pouvons estimer les sommes $\Sigma_{x=0}^X e(mx^c)$ par le lemme 1.3; sans rechercher la meilleure majoration possible, on vérifie aisément que l'on a

$$\Sigma_{x=0}^X e(mx^c) = O(X^{1-\sigma}), \qquad \text{avec} \quad \sigma^{-1} = 3\,c^2(\log c + 14).$$

[Si $m \ll X^{1/2}$, on a

$$\rho^{-1}(m) \leqq 3\left(c + \frac{37}{24}\right)^2 \log 160\left(c + \frac{1}{2}\right) \leqq 3\,c^2(\log c + 14)\Big].$$

On en déduit alors la relation (5) :

$$\mathcal{N}(\Delta) \ll X\Delta + X^{1-\sigma}. \tag{5}$$

Nous allons maintenant nous occuper de la majoration des quantités $\Sigma_{x=0}^X e(\alpha x^c)\,\psi_j(x^c)$; il sera commode de poser

$$S(\alpha + q, X) = \Sigma_{x=0}^X e((\alpha + q)\,x^c).$$

On peut alors écrire (en remarquant que la série $\Sigma\, c_q$ est absolument convergente) :

$$S^{(j)}(\alpha) = |\,\Sigma_{x=0}^X e(\alpha x^c)\,\psi_j(x^c)\,| = |\,\Sigma_{x=0}^X e(\alpha x^c)\,\Sigma_{q\in\mathbf{Z}} c_q^{(j)}\, e(qx^c)\,|,$$

$$S^{(j)}(\alpha) \ll \Sigma_q \,|\, c_q^{(j)}\,|.|\,S(\alpha + q, X)\,|. \tag{6}$$

En utilisant à nouveau les majorations de VINOGRADOV, on peut estimer le second membre de la relation (6) en faisant varier $|q|$ dans les intervalles $[0, k]$, $]k, 1/\Delta]$, $]1/\Delta, 1/\Delta^2]$, $]1/\Delta^2, +\infty[$; sur le dernier intervalle, on utilisera la majoration triviale $S(\alpha + q, X) \ll X$, et sur chaque intervalle, on choisira la meilleure majoration de $c_q^{(j)}$ (*cf.* le lemme 1.4) :

$$\Sigma_{|q|\leq k} \frac{1}{k} | S(\alpha + q, X) | \ll \frac{1}{k} k X^{1-\sigma} \ll X^{1-\sigma},$$

$$\Sigma_{k<|q|\leq\Delta^{-1}} \frac{| S(\alpha + q), X) |}{|q|} \ll X^{1-\sigma} \log \frac{1}{k\Delta} (\log X)^{-1},$$

$$\Sigma_{\Delta^{-1}<|q|\leq\Delta^{-2}} \frac{| S(\alpha + q, X) |}{q^2 \Delta} \ll \Delta^{-1} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{-1} X^{1-\sigma} \ll X^{1-\sigma},$$

$$\Sigma_{|q|\geq\Delta^{-2}} \frac{| S(\alpha + q, X) |}{q^2 \Delta} \ll \Delta^{-1} \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{-1} X \ll X\Delta.$$

Soit, finalement :

$$S^{(j)}(\alpha) \ll X^{1-\sigma} \left(1 + \log \frac{1}{k\Delta} (\log X)^{-1}\right) + \Delta X. \tag{7}$$

Reportant les inégalités (5) et (7) dans la relation (3), nous obtenons

$$\Sigma^{(j)} e(\alpha x^c) \ll X^{1-\sigma} \left(1 + \log \frac{1}{k\Delta} . (\log X)^{-1}\right) + \Delta X. \tag{8}$$

Reportons alors (8) en (2) :

$$| \Sigma_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]) | \ll \frac{X}{k} + \Delta k X + k X^{1-\sigma} \left(\frac{\log (k\Delta)^{-1}}{\log X} + 1\right).$$

On achève alors la démonstration du théorème 1 en choisissant $k = [X^{\sigma/2}]$ et $\Delta = 1/[X^\sigma]$ (on vérifie que Δ satisfait bien les deux conditions d'être inférieur à k^{-1}, et supérieur à $X^{-1/2}$).

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour faire fonctionner la méthode du cercle.

4. Estimation asymptotique de $r_{l,c}(N)$

D'après le lemme 1.1, nous savons que

$$r_{l,c}(N) = \int_{-1/\tau}^{1-(1/\tau)} e(\alpha N) (\Sigma_{x=0}^{X} e(\alpha [x^c]))^l \, d\alpha.$$

En faisant appel aux résultats des sections 2 et 3, on a

$$r_{l,c}(N) = \frac{(\Gamma(1 + \gamma))^l}{\Gamma(l\gamma)} N^{l\gamma-1} + o(N^{l\gamma-1}) + O(X^{l-l\rho}).$$

Souvenons-nous que $X = N^{\gamma}$, et donc $X^{l-l\rho} = N^{l\gamma - l\gamma\rho}$; nous voyons que lorsque $l\gamma\rho$ est supérieur à 1, on a

$$r_{l,c}(N) = \frac{(\Gamma(1+\gamma))^l}{\Gamma(l\gamma)} N^{l\gamma-1} + o(N^{l\gamma-1}),$$

$l\gamma\rho > 1$ est équivalent à $l > 6c^3(\log c + 14)$; le théorème 2 est donc prouvé.

5. **Majoration de** $G(c)$.

Ainsi que l'a remarqué I. M. VINOGRADOV, pour obtenir une bonne approximation de $G(c)$, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les représentations de N comme somme de nombres $[n^c]$; il suffit de se resteindre à des valeurs particulières des entiers n. Fixons d'abord les notations

Définissons les nombres X_s $(s = 1, \ldots, k)$ par

$$X_1 = \left[\frac{1}{6}X\right], \qquad X_2 = \left[\frac{1}{2}X_1^{1-\gamma}\right], \qquad \ldots, \qquad X_k = \left[\frac{1}{2}X_{k-1}^{1-\gamma}\right]$$

(on rappelle que $X = N^{\gamma}$ et que $\gamma = 1/c$).

Soit I_s $(s = 1, \ldots, k)$ l'intervalle $[X_s, 2X_{s-1}]$. On posera

$$k = [2c\log c + c\log\log c + 6c] \qquad \text{et} \qquad l = [c+2].$$

Pour démontrer le théorème 3, nous démontrerons la proposition suivante :

Pour tout entier N suffisamment grand, on peut trouver l nombres entiers n_i et k couples d'entiers ξ_s, η_s de l'intervalle I_s tels que

$$N = [n_1^c] + \ldots + [n_l^c] + \Sigma_{s=1}^k [\xi_s^c] + \Sigma_{s=1}^k [\eta_s^c]. \tag{9}$$

LEMME 5.1. — *Lorsque X est assez grand, tous les nombres*

$$u = [\xi_1^c] + \ldots + [\xi_k^c] \ (\xi_s \in I_s)$$

sont distincts, et compris entre $[(1/7)X]^c$ *et* $[(1/3)X]^c$.

La démonstration de ce lemme s'effectue exactement comme celle du lemme 1, page 63 de [5], à laquelle nous renvoyons le lecteur.

Évaluons maintenant le nombre U des entiers u définis ci-dessus. Les nombres u étant tous distincts, U a exactement l'ordre de grandeur de $X^{1+(1-\gamma)+\ldots+(1-\gamma)^{k-1}}$; mais,

$$1 + (1-\gamma) + \ldots + (1-\gamma)^{k-1} = \frac{1-(1-\gamma)^k}{1-(1-\gamma)} = c(1-(1-\gamma)^k),$$

soit

$$N^{1-[1-(1/c)]^k} \ll U \ll N^{1-[1-(1/c)]^k}. \tag{10}$$

Soit $\rho(N)$ le nombre de représentations de N sous la forme (9) (on posera $u_1 = \sum_{s=1}^{k} [\xi_s^c]$ et $u_2 = \sum_{s=1}^{k} [\eta_s^c]$).

D'après le lemme 1.1, on a

$$\rho(N) = \int_{-1/\tau}^{1-(1/\tau)} e(-\alpha N)\,(\textstyle\sum_{n=0}^{X} e(\alpha [n^c]))^l\,(\sum_{u \in \mathfrak{U}} e(\alpha u))^2\, d\alpha.$$

Calculons la contribution $\rho_1(N)$ de l'intervalle fondamental :

$$\rho_1(N) = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} e(-\alpha N)\,(\textstyle\sum_{n=0}^{X} e(\alpha [n^c]))^l\,(\sum_{u \in \mathfrak{U}} e(\alpha u))^2\, d\alpha$$

$$= \textstyle\sum_{u_1, u_2 \in \mathfrak{U}} \displaystyle\int_{-1/\tau}^{1/\tau} e(-\alpha (N - u_1 - u_2))\,(\textstyle\sum_{n=0}^{X} e(\alpha [n^c]))^l\, d\alpha.$$

La deuxième intégrale peut être calculée par la proposition 2, ce qui donne :

$$\rho_1(N) = \frac{(\Gamma(1+\gamma))^l}{\Gamma(l\gamma)} \textstyle\sum_{u_1, u_2 \in \mathfrak{U}} (N - u_1 - u_2)^{l\gamma - 1} + o(U^2 N^{l\gamma-1}).$$

On en déduit l'existence d'une constante $K(c)$ positive, telle que

(11) $\rho_1(N) > K(c)\, U^2 N^{l\gamma-1}$, dès que N est assez grand.

Évaluons maintenant la contribution $\rho_2(N)$ de l'intervalle complémentaire :

$$\rho_2(N) \ll \int_{1/\tau}^{1-(1/\tau)} \left|\textstyle\sum_{n=0}^{X} e(\alpha [n^c])\right|^l \left|\sum_{u \in \mathfrak{U}} e(\alpha u)\right|^2 d\alpha,$$

$$\rho_2(N) \ll (\sup_{\alpha \in (1/\tau,\, 1-(1/\tau))} \left|\textstyle\sum_{n=0}^{X} e(\alpha [n^c])\right|^l) \displaystyle\int_0^1 \left|\textstyle\sum_{u \in \mathfrak{U}} e(\alpha u)\right|^2 d\alpha.$$

En utilisant le théorème 1, et en remarquant que la dernière intégrale vaut U (car les nombres de $\mathfrak{U}$ sont tous distincts), on a

(12) $$\rho_2(N) \ll (X^{1-\rho})^l\, U \ll N^{\gamma l - \rho\gamma l}\, U.$$

Montrons maintenant que $N^{\gamma l - \rho\gamma l} = o(U N^{\gamma l - 1})$. D'après la relation (10), il suffit de vérifier que

$$\gamma l - \rho\gamma l < 1 - \left(1 - \frac{1}{c}\right)^k + \gamma l - 1,$$

c'est-à-dire : $[1 - (1/c)]^k < \rho\gamma l = (1 + (1/c))/6\, c^2 (\log c + 14)$.

Il suffit d'obtenir :

$$\left(1 - \frac{1}{c}\right) < \frac{1}{6\, c^2 (\log c + 14)}.$$

D'après la définition de k, on a

$$\left(1-\frac{1}{c}\right)^k < \left(1-\frac{1}{c}\right)^{2\,c\,(\log c\,+\,0{,}5\,\log\log c\,+\,2{,}5)}$$
$$< e^{-2\log c_e\,-\,\log\log c_e\,-\,5}$$

et donc :

$$\left(1-\frac{1}{c}\right)^k < \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{\log c}\,\frac{1}{90} \leq \frac{1}{6.15.c^2\log c} < \frac{1}{6\,c^2\,(\log c + 14)}.$$

On déduit de (10), (11), (12) que lorsque N est suffisamment grand, $\rho\,(N)$ est positif; $G\,(c)$ est donc inférieur à $l + 2\,k$, soit

$$G\,(c) \leq [c+2] + 4\,c\left(\log c + \frac{1}{2}\log\log c + 3\right)$$
$$< 4\,c\left(\log c + \frac{1}{2}\log\log c + \frac{7}{2}\right),$$

la constante 7/2 pouvant être légèrement améliorée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DESHOUILLERS (J. M.). — Un problème binaire en théorie additive, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 25, fasc. 4, p. 393-403.

[2] ERDÖS (P.) et TURÁN (P.). — On a problem in the theory of uniform distribution, I, II, *Indag. Math.*, Amsterdam, t. 10, 1948, p. 370-378 et 406-413.

[3] KOKSMA (J. F.). — *The theory of asymptotic distribution modulo* 1, Nuffic international summer session in Science [1962, Breukelen], p. 1-22. — Groningen, P. Noordhoff, 1964; et *Comp. Math.*, Groningen, t. 16, 1964, p. 1-22.

[4] SEGAL (B. I.). — Théorème de Waring pour les exposants fractionnaires et irrationnels [en russe], *Trudy Mat. Inst. Steklova*, t. 5, 1933, p. 73-86.

[5] VINOGRADOV (I. M.). — *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*. — London, Interscience Publishers, 1954.

(Texte reçu le 15 juin 1973.)

Jean-Marc DESHOUILLERS,
U. E. R. de Mathématiques
et Informatique,
Université Bordeaux-I,
Équipe de Recherche associée
au C. N. R. S. n° 162,
351, cours de la Libération,
33405 Talence
et
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.