

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEMONNIER

Calcul d'un déterminant

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 175-177

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__175_0

© Bulletin de la S. M. F., 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Calcul d'un déterminant; par M. H. LEMONNIER.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Soit à calculer le déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace chaque terme de la dernière colonne par la somme des termes de la ligne dont il fait partie, il vient

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & 1 \end{vmatrix},$$

ou, en retranchant successivement chaque colonne de la suivante jusqu'à l'avant-dernière,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Faisant la même opération pour les lignes,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & -n & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & . & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & . & \dots & -n & n \\ 0 & 0 & . & -n & n & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & . & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.
 \end{aligned}$$

Soit à calculer de même

$$N_{n,p} = \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n \\ p+2 & p+3 & \dots & p+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-1 \end{vmatrix}.$$

Les mêmes opérations donnent

$$N_{n,p} = \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n-1 & 1 \\ p+2 & p+3 & \dots & p+n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & . & . & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & . & . & \dots & \dots & . \\ p+n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n & 0 \\ . & . & . & . & \dots & \dots & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$

On déduit de là

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n \left[n \frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$
