BULLETIN DE LA S. M. F.

S. DELACHE

J. LERAY

Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux et de l'opérateur de Tricomi-Clairaut, hyperbolique, d'ordre 2

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 313-336

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__313_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 313 à 336.

CALCUL DE LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE L'OPÉRATEUR D'EULER-POISSON-DARBOUX ET DE L'OPÉRATEUR DE TRICOMI-CLAIRAUT, HYPERBOLIQUE, D'ORDRE 2

PAR

SOLANGE DELACHE ET JEAN LERAY

[Nice; Paris]

RÉSUMÉ. — Cet article calcule explicitement la solution élémentaire hyperbolique de l'opérateur d'Euler-Darboux-Poisson (incomplètement explicitée par R. DAVIS en 1956) et de l'opérateur de Tricomi-Clairaut d'ordre 2. Les formules obtenues donnent donc des exemples d'allure de solution élémentaire hyperbolique *à la frontière du domaine d'hyperbolicité;* elles donnent de nouveaux exemples d'opérateurs hyperboliques d'ordre 2 ayant des *lacunes* (en dimensions paires ≥ 6). Elles emploient une *distribution hypergéométrique,* définie par l'équation hypergéométrique, et sa composée avec une fonction régulière, positive dans un demi-cône, nulle hors de ce demi-cône; l'étude de ces distributions est un complément au t. 1 du traité *Distributions* de GEL'FAND et ŠILOV. Signalons, par exemple, que *la formule de Kummer* s'applique à cette distribution hypergéométrique; elle permet de déduire la solution élémentaire de l'opérateur de Tricomi-Clairaut de celle d'Euler-Poisson-Darboux.

Introduction

Ces solutions élémentaires se calculent *au moyen de la fonction hypergéométrique* (*voir* théorèmes 2 *et* 3, n° 6 et 9).

1. Historique.

R. BADER et P. GERMAIN [1] l'ont établi en 1952 pour l'opérateur de Tricomi $x_2 \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, qui équivaut à l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{3\,x_1}\,\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, celui-ci est un cas particulier de l'opérateur d'*Euler-Poisson-Darboux*

$$(1.1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{j=2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{2\,\alpha}{x_1}\,\frac{\partial}{\partial x_1}$$

qui fut étudié par A. Weinstein et son école (Maryland); en particulier, R. M. Davis [2] a prouvé en 1956 que la solution élémentaire de cet opérateur s'exprime au moyen de la fonction hypergéométrique.

Nous nous proposons d'expliciter et de compléter ce résultat, puis de l'étendre à certains *opérateurs de Tricomi-Clairaut* d'ordre 2.

Nous complétons ainsi l'article de S. Delache [3], qui exprime par des intégrales la solution élémentaire de certains opérateurs de Tricomi-Clairaut.

2. **Méthode.**

Le chapitre II calcule la solution élémentaire d'un opérateur d'Euler-Poisson-Darboux (1.1) en employant *la théorie des distributions;* il n'a pas besoin de la théorie de M. Riesz des équations du second ordre [6] qu'emploie R. M. Davis. Des changements de variables appropriés permettent les prolongements analytiques qui établissent les théorèmes 2 et 3 (chap. II, n° 6; chap. IV, n° 9).

Le chapitre I définit les distributions nécessaires à l'énoncé des théorèmes 2 et 3; les lemmes 4.1, 4.2 et le théorème 1 (n° 5) résument leurs propriétés. Ces distributions ont été définies par Gel'fand et Šilov [4], qui les ont étudiées par le prolongement analytique qui est à la base de la théorie de M. Riesz [6]. Mais il nous faut modifier les notations, et compléter les résultats de Gel'fand et Šilov.

Le chapitre III précise les particularités se présentant en dimension 2.

Chapitre I

Définition de quelques distributions

3. **La distribution** $\chi_q(.)$.

Elle est définie sur la droite réelle $T = \mathbf{R}$, de coordonnée t; elle est fonction holomorphe du paramètre $q \in \mathbf{C}$.

Si $\operatorname{Re} q > -1$, c'est la fonction localement sommable ayant pour valeur

$$(3.1) \qquad \chi_q(t) = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \quad \text{si } t > 0; \qquad \chi_q(t) = 0 \quad \text{si } t \leqq 0;$$

($t^q = e^{q \log t}$, où $\log t$ est réel, si $t > 0$). Elle est holomorphe en q et elle vérifie

$$\chi_q(t) = \frac{d\chi_{q+1}(t)}{dt};$$

elle se prolonge donc analytiquement en une fonction entière de q.

Ses propriétés sont évidemment les suivantes : $\chi_q(.)$ est une *distribution sur T*, fonction entière de $q \in \mathbf{C}$; on a, en employant la *dérivation généralisée de Riemann-Liouville* (*cf.* [4], ch. 1, § 5) :

$$\chi_{q-p}(t) = \frac{d^p \chi_q(t)}{dt^p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{C}; \tag{3.2}$$

$\chi_q(.)$ est *positivement homogène* de degré q, c'est-à-dire : $\chi_q(ct) = c^q \chi_q(t)$ pour toute constante $c > 0$; on a donc la formule d'Euler

$$t\,\chi_{q-1}(t) = q\,\chi_q(t). \tag{3.3}$$

Note. — Gel'fand et Šilov [4] notent

$$\chi_q = \delta^{(-q-1)} \quad \text{si } q \text{ est entier } < 0, \qquad \chi_q(t) = \frac{t_+^q}{\Gamma(q+1)} \quad \text{sinon.}$$

4. **Distributions composées.**

La distribution composée $\chi_q(t(.))$ peut être définie pour divers types de fonctions $t(.)$ (*voir*) [4]); nous aurons besoin de fonctions $t(.)$ du type très spécial que voici

$$t(x) = f(x)\,k(x) \geqq 0$$

est défini sur un voisinage ouvert X de 0 dans $\mathbf{R}^l$; $k(.)$ est égale à une forme quadratique hyperbolique [c'est-à-dire de signature $(1, l-1)$] dans l'un des demi-cônes convexes, C, où cette forme est > 0; $k = 0$ hors de ce demi-cône C; $f(.)$ est une fonction > 0, définie sur X, indéfiniment différentiable. Nous emploierons dans X des coordonnées telles que

$$\begin{aligned} k(x) &= x_1^2 - \sum_j{}^* x_j^2 \qquad \text{si } x_1 > \sqrt{\sum_j{}^* x_j^2} \qquad \left(\sum{}^* = \sum_{j=2}^{l}\right),\\ &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{si } x_1 \leqq \sqrt{\sum_j{}^* x_j^2}. \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Re} q > -1$, la distribution composée $\chi_q(t(.))$ est la fonction localement sommable sur X, ayant pour valeur en x

$$\chi_q(t(x)) = \frac{t^q(x)}{\Gamma(q+1)}. \tag{4.1}$$

Elle est holomorphe en q, pour $\operatorname{Re} q > -1$; elle vérifie

$$\chi_q(t(x)) = f^q(x)\,\chi_q(k(x)); \tag{4.2}$$

or $f^q(x)$ est indéfiniment différentiable en x et holomorphe en q, quel que soit q; pour étudier le prolongement analytique de $\chi_q(t(.))$, il suffit donc d'étudier celui de $\chi_q(k(.))$. Or, le dalembertien étant noté

$$\Box_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_j{}^* \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

on a, pour $\mathrm{Re}(q) > 0$,

$$(4.3) \qquad 2(l + 2q)\,\chi_q(k(x)) = \Box_x\,\chi_{q+1}(k(x));$$

$\chi_q(k(.))$ se prolonge donc analytiquement en une distribution, fonction méromorphe de q, dont les pôles, tous simples, sont les points $q = -\frac{l}{2} - n$ (n : entier $\geqq 0$),

$$\chi_q(k(x)) = 0 \qquad \text{hors de } \bar{C},$$
$$= \frac{k^q(x)}{\Gamma(q+1)} \qquad \text{dans } C;$$

donc $\mathrm{Supp}[\chi_q(k(.))] = \partial C$ (bord de C) si q est entier < 0, $= \bar{C}$ sinon.

On a

$$(4.4) \qquad \frac{\partial k}{\partial x}\chi_q(k(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\chi_{q+1}(k(x)),$$

la restriction de $\chi_q(k(.))$ à $\mathring{X} = X \setminus 0$ est donc une fonction holomorphe de q.

Le résidu de $\chi_q(k(.))$ en son pôle $-\frac{l}{2} - n$ est donc une distribution homogène en x, de degré $-l-n$, de support 0; en particulier, le résidu de $\chi_q(k(.))$ en son pôle $-\frac{l}{2}$ est donc un multiple de la mesure de Dirac δ. Vu (4.3),

$$(4.5) \qquad \text{rés}_{-n-l/2}[\chi_q(k(.))] = \frac{1}{(-4)^n\, n!}\Box^n\, \text{rés}_{-l/2}[\chi_q(k(.))];$$

$$(4.6) \qquad \text{rés}_{-l/2}\ [\chi_q(k(.))] = \frac{1}{4}\Box\,\chi_{1-l/2}(k(.)) = \frac{1}{4}c_l\,\delta(.),$$

c_l étant une constante que nous allons calculer : l'intérêt de ce calcul est que, vu (4.6), $\frac{1}{c_l}\chi_{1-l/2}(k(.))$ est la solution élémentaire de $\Box$.

Calcul de c_l. — Notons $X' = \mathbf{R}^{l-1}$, δ' la mesure de Dirac sur X', $x' = (x_1, \dots, x_{l-1})$,

$$k'(x') = x_1^2 - \sum_{j=2}^{l-1} x_j^2, \qquad \Box' = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{j=2}^{l-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Un calcul élémentaire donne, pour $\operatorname{Re}(q) > -1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_q(k(x))\, dx_l = 2\frac{\Gamma(q+3/2)}{\Gamma(q+1)} \chi_{q+1/2}(k'(x')) \int_0^1 (1-t^2)^q\, dt,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_q(k(x))\, dx_l = \sqrt{\pi}\, \chi_{q+1/2}(k'(x')),$$

cette formule vaut pour tout q; en appliquant $\int_{-\infty}^{+\infty} \circ\, dx_l$ à (4.6), on obtient donc

$$\sqrt{\pi}\, \Box'\, \chi_{3/2-l/2}(k'(x')) = c_l\, \delta'(x'),$$

c'est-à-dire

$$c_l = \sqrt{\pi}\, c_{l-1};$$

or, vu (4.6),

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Donc

$$c_l = 2\,\pi^{l/2-1}. \tag{4.7}$$

Nous avons donc prouvé les deux lemmes suivants :

LEMME 4.1. — La distribution composée $\chi_q(t(.))$ est une *distribution sur X, positivement homogène en t, de degré q;* c'est-à-dire :

$$\chi_q(u(.)\,t(.)) = u^q(.)\, \chi_p(t(.))$$

pour toute fonction $u(.) > 0$ indéfiniment dérivable; elle est *fonction méromorphe* de q; ses pôles sont les points $q = -n - \frac{l}{2}$ (n : entier ≥ 0); ils sont simples; le résidu de $\chi_q(t(.))$, en le pôle $-n-\frac{l}{2}$, est

$$\text{rés}_{-n-l/2}[\chi_q(t(.))] = \frac{1}{2}\pi^{l/2-1} \frac{f^q(0)}{(-4)^n\, n!} \Box^n \delta(.).$$

LEMME 4.2. — La solution élémentaire du dalembertien $\Box$ est

$$\frac{1}{2}\pi^{1-l/2} \chi_{1-l/2}(k(.)).$$

Note. — GEL'FAND et ŠILOV [4] prouvent des propriétés beaucoup plus générales de la composition de χ_q et des fonctions; mais elles n'impliquent pas le lemme 4.1. Ils prouvent le lemme 4.2 quand l est pair.

Plus généralement, soit $\varphi(.)$ une distribution définie sur T, du type

$$(4.7)\qquad \varphi(.) = \sum_{q \in Q} c_q \, \chi_q(.) + \psi(.),$$

où $c_q \in \mathbf{C}$, Q est un ensemble fini de points sur lequel $q + \frac{l}{2}$ n'est jamais un entier $\leqq 0$, et $\psi(.)$ une fonction localement bornée; la donnée de $\varphi(.)$ définit donc sans ambiguïté le second membre de (4.7). Ètant donnée $t(.)$, nous pouvons donc définir sur X la distribution composée $\varphi(t(.))$ comme suit :

$$\varphi(t(.)) = \sum_{q \in Q} c_q \, \chi_q(t(.)) + \psi(t(.)).$$

5. La distribution hypergéométrique $\Phi(A, B, C; r, t)$.

La distribution hypergéométrique $\Phi(A, B, C; r, t)$, qui est du type (4.7), va être définie au moyen de l'opérateur hypergéométrique

$$(5.1)\qquad h\left(A, B, C; t, \frac{d}{dt}\right) = t(1-t)\frac{d^2}{dt^2} + [C - (A+B+1)\,t]\frac{d}{dt} - AB;$$

elle s'exprimera au moyen de la distribution $\chi_q(t)$ et de la fonction hypergéométrique

$$(5.2)\qquad \begin{cases} F(A, B, C; t) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A \ldots (A+n-1)\, B \ldots (B+n-1)}{n!\, C \ldots (C+n-1)} t^n, \\ \qquad\qquad (|t| < 1). \end{cases}$$

Rappelons que F est défini, sauf quand C est un entier $\leqq 0$; F est la fonction, holomorphe et égale à 1 à l'origine, que h annule; h annule aussi

$$(5.3)\qquad t^{1-C} F(A - C + 1,\ B - C + 1,\ 2 - C;\ t).$$

Rappelons que, pour tout $p \in \mathbf{C}$, on a (en employant la dérivation de Riemann-Liouville) :

$$(5.4)\qquad h\left(A, B, C; t, \frac{d}{dt}\right)\frac{d^p}{dt^p} = \frac{d^p}{dt^p} h\left(A - p, B - p, C - p; t, \frac{d}{dt}\right).$$

Rappelons enfin la formule, due à KUMMER : si $s = 4t(1-t)$ et $C = \frac{A+B+1}{2}$, alors

$$(5.5) \qquad h\left(A, B, C; t, \frac{d}{dt}\right) = 4h\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; s, \frac{d}{ds}\right).$$

Le chapitre II emploiera la solution du problème de Cauchy suivant :

Définir sur $\mathbf{R}$, au voisinage de $t = 0$, une distribution φ, dépendant du paramètre $r \in \mathbf{C}$, telle que

$$(5.6) \qquad h\left(A, B, C; rt, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = 0, \qquad \varphi = 0 \text{ pour } t < 0.$$

THÉORÈME 1. — *Les solutions de ce problème de Cauchy* (5.6) *sont* $\varphi = c\,\Phi$, *c étant une constante, et* Φ *étant la distribution, indépendante du choix de* $p \in \mathbf{C}$, *et holomorphe en* r :

$$(5.7) \quad \Phi(A, B, C; r, t) = \frac{d^p}{dt^p}[\chi_{p+1-C}(t)\, F(1+A-C, 1+B-C, p+2-C; rt)]$$

Φ *est définie sur la demi-droite* $t < \frac{1}{r}$ *si* $r > 0$, *sur* $\mathbf{R}$ *sinon.*

Note 5.1. — GEL'FAND et ŠILOV [4] [ch. I, § 5, n° 5, formule (20)] donnent un résultat analogue à ce lemme.

Note 5.2. — On peut définir Φ sans employer la fonction hypergéométrique, puisque

$$F(A, B, A, t) = F(B, A, A, t) = (1-t)^{-B};$$

en choisissant $p = A - 1$ ou $p = B - 1$, on a donc

$$(5.8) \qquad \Phi(A, B, C; r, t) = \frac{d^{A-1}}{dt^{A-1}}[\chi_{A-C}(t)(1-rt)^{1+B-C}],$$
$$= \frac{d^{B-1}}{dt^{B-1}}[\chi_{B-C}(t)(1-rt)^{1+A-C}].$$

Ces formules équivalent à la représentation classique de F par une intégrale.

Note 5.3. — Pour expliciter Φ, il est cependant commode d'employer la fonction hypergéométrique. *Si* C *n'est pas un entier* $\geqq 2$, on peut choisir $p = 0$; donc

$$(5.9) \quad \Phi(A, B, C; r, t) = \chi_{1-C}(t)\, F(1+A-C, 1+B-C, 2-C; rt).$$

Si C est un entier $\geqq 2$, on peut choisir $p = C - 1$; donc

(5.10) $\Phi(A, B, C; r, t)$

$$= \frac{d^{C-1}}{dt^{C-1}} \chi_0 [(t) F(1 + A - C, 1 + B - C, 1; rt]$$

$$= \chi_{1-C}(t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{C-2} \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1 + A - C)\dots(n + A - C) \\ \times (1 + B - C)\dots(n + B - C) \end{array} \right\}}{n!} r^n \chi_{1+n-C}(t)$$

$$+ \chi_0(t) \frac{(1 + A - C)\dots(A - 1)(1 + B - C)\dots(B - 1)}{(C - 1)!}$$

$$\times r^{C-1} F(A, B, C; rt).$$

Les formules (5.8), (5.9), (5.10) supposent Φ défini, c'est-à-dire $r \leqq 0$ ou $t < \frac{1}{r}\cdot$

Note 5.4. — On a évidemment, vu le développement de Taylor (5.2) de F,

(5.11) $\Phi(A, B, C; r, t) = \chi_{1-C}(t)$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1 + A - C)\dots(n + A - C) \\ \times (1 + B - C)\dots(n + B - C) \end{array} \right\}}{n!}$$

$$\times r^n \chi_{n+1-C}(t)$$

pour $|rt| < 1$.

Preuve du théorème. — L'ensemble des solutions du problème de Cauchy (5.6) est un espace vectoriel; notons-le $V(A, B, C, r)$; les fonctions continûment dérivables appartenant à V constituent un sous-espace $v(A, B, C, r)$ de V.

Si C n'est pas un entier > 1, notons

(5.12) $\quad \Phi(A, B, C; r, t) = \chi_{1-C}(t) F(A + 1 - C, B + 1 - C, 2 - C; rt),$

$\Phi(A, B, C; r, .) \neq 0$; un calcul aisé, employant la formule d'Euler (3.3), montre que $\Phi(A, B, C; r, .) \in V(A, B, C, r)$; donc

$$\dim V \geqq 1.$$

Si C n'est pas un entier, les fonctions $\psi(.)$ continûment dérivables telles que

$$h\left(A, B, C; rt, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\right) \psi(t) = 0$$

sont donc, sur l'intervalle $]0, 1[$, du type

$$\psi(t) = c_1 F(A, B, C; rt) + c_2 t^{1-C} F(A+1-C, B+1-C, 2-C; rt),$$

donc

$$\dim v(A, B, C, r) = 0 \quad (\text{c'est-à-dire} \quad v = \emptyset) \qquad \text{si} \quad \operatorname{Re} C \geqq 0,$$
$$\dim v(A, B, C, r) = 1 \qquad\qquad\qquad \text{si} \quad \operatorname{Re} C < 0.$$

Or (5.4) montre que, pour tout $p \in \mathbf{C}$, $\dfrac{d^p}{dt^p}$ définit un isomorphisme

$$V(A-p, B-p, C-p, r) \to V(A, B, C, r);$$

évidemment, tout élément de $V(A, B, C, r)$ appartient, pour p entier assez grand, à

$$\frac{d^p}{dt^p} v(A-p, B-p, C-p, r);$$

donc, puisque $\dim v \leqq 1$ et $\dim V \geqq 1$:

$$\dim V = 1;$$

$V(A, B, C, r)$ est sous-tendu par le vecteur

$$\frac{d^p}{dt^p} \Phi(A-p, B-p, C-p; r, .),$$

quel que soit p tel que $C-p$ ne soit pas un entier > 1.

On déduit aisément de (5.12) que la partie principale au point $t = 0$ de la fonction $\dfrac{d^p}{dt^p} \Phi(A-p, B-p, C-p; r, t)$ est indépendante de p; nous avons donc

$$(5.13) \qquad \Phi(A, B, C; r\ .) = \frac{d^p}{dt^p} \Phi(A-p, B-p, C-p; r, .)$$

pour tout p tel que $C-p$ ne soit pas un entier > 1, si C n'est pas un tel entier; sinon nous pouvons définir, par (5.13), Φ, qui sous-tend V; (5.13) vaut alors sans restriction.

Preuve de (5.10). — Pour toute fonction $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{t^n}{n!}$ holomorphe à l'origine, on a

$$\chi_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{p-1} c_n \chi_n(t) + \chi_0(t) \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!};$$

donc, si p est un entier $\geqq 0$, vu (3.2) :

$$\frac{d^p}{dt^p}\left[\chi_0(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n\right]=\sum_{n=0}^{p-1}c_n\,\chi_{n-p}(t)+\chi_0(t)\frac{d^p}{dt^p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right);$$

d'où (5.10).

LEMME 5.1 (KUMMER). — Si $C=\dfrac{A+B+C}{2}$, on a, pour tout t si $r<0$, pour $t<\dfrac{1}{2r}$ si $r>0$:

$$\Phi(A, B, C; r, t)=4^{C-1}\,\Phi\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; r, 4t(1-rt)\right); \tag{5.14}$$

le second membre représente le composé de l'application croissante

$$t\mapsto 4t(1-rt)$$

et de la distribution $\Phi\left(\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, C; r, .\right)$.

Preuve. — Vu (5.5), on a

$$h\left(A, B, C; rt, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\right)=h\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; rs, \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\right)$$

si $C=\dfrac{A+B+1}{2}$ et $s=4t(1-rt)$; donc

$$\Phi\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; r, 4t(1-rt)\right)\in V(A, B, C, r);$$

d'où (5.14), la valeur 4^{C-1} du coefficient résultant de l'allure des deux membres au voisinage de $t=0$.

L'homogénéité de χ et (5.7) ont pour conséquence évidente le lemme suivant :

LEMME 5.2. — On a, si $u>0$:

$$\Phi(A, B, C; r, ut)=u^{1-C}\,\Phi(A, B, C; ru, t).$$

Note 5.5. — Soit $r(.)$ une fonction numérique complexe de $x\in X\subset \mathbf{R}^l$; soit $t(.)$ la fonction de x que définit le n° 4; supposons ceci :

$$r(x)\,t(x)<1 \qquad \text{pour} \quad x\in X;$$

$$\frac{l}{2}-C \quad \text{n'est pas entier } <0;$$

alors la distribution $\Phi(A, B, C; r(.), t(.))$ est évidemment définie sur X; c'est une fonction holomorphe de A, B, C et des paramètres dont r est fonction holomorphe; (5.14) reste valable quand on compose chaque membre avec $(r(.), t(.))$: c'est évident quand (5.14) est une fonction de t, c'est-à-dire quand $\operatorname{Re} C > -2$; or chacun de ces membres est une fonction méromorphe de C.

Chapitre II

L'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux

6. L'expression de sa solution élémentaire.

Notons X l'espace affine de dimension l, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_l)$ soit Ξ le dual de l'espace $\mathbf{R}^l$ des vecteurs de X; soient $(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ les coordonnées de Ξ, telles que la valeur de $\xi \in \Xi$ en $x \in X$ soit

$$\langle \xi, x \rangle = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l.$$

Nous étudierons l'opérateur, un peu plus général que l'opérateur (1.1),

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{2\alpha}{L(x)} Q\left(L_x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{6.1}$$

où $Q(\xi) = \dfrac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \xi_i \xi_j$ $(Q_{ij} = Q_{ji})$ est une forme quadratique réelle sur Ξ, hyperbolique de signature $(1, l-1)$;

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \xi_i \eta_j \quad \text{est sa forme polaire;}$$

$$L \text{ est une fonction affine } (^1) \text{ sur } X; \; L_x = \frac{\partial L(x)}{\partial x};$$

$$\alpha \in \mathbf{C} \quad \text{est un paramètre.}$$

Notations. — Sur l'espace $\mathbf{R}^l$ des vecteurs de X, définissons la forme quadratique $q(.)$ en éliminant ξ des équations

$$\langle \xi, x \rangle = q(x), \qquad \frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi} = x; \tag{6.2}$$

(1) Linéaire, homogène ou non, à valeurs complexes.

$q(x)$ est donc définie par l'équation

$$\begin{vmatrix} q(x) & x_i & \\ x_j & Q_{ij} & \\ & & \end{vmatrix} = 0 \tag{6.3}$$

et a même signature que Q. Le cône caractéristique de sommet x' a pour équation

$$q(x - x') = 0.$$

Nous notons $k(.)$ la fonction égale à $q(.)$ dans l'un des deux demi-cônes convexes $q(.) \geqq 0$ et nulle ailleurs. Notons enfin

$$H = (-1)^{l-1} \operatorname{Hess}_\xi(Q) = (-1)^{l-1} \operatorname{dét}(Q_{ij}) > 0. \tag{6.4}$$

Ce chapitre II va prouver ceci :

THÉORÈME 2. — *Soit E_α la solution élémentaire de a_α dont le support appartient à ce demi-cône*

$$E_\alpha(x, x') = \pi^{1-l/2} H^{-1/2} [L(x')/L(x)]^\alpha \Phi, \tag{6.5}$$

où

$$\Phi = \Phi\left(\frac{l}{2} - \alpha, \frac{l}{2} - 1 + \alpha, \frac{l}{2}; -\frac{1}{2} \frac{Q(L_x)}{L(x) L(x')}, k(x - x')\right)$$

est la distribution composée définie par la note 5.5.

Bien entendu $[L(x)/L(x')]^\alpha = 1$ pour $x = x'$.

Note 6.1. — Le *support singulier* de $E_\alpha(x, x')$ appartient donc à la réunion des hypersurfaces suivantes :

le *cône* $q(x - x') = 0$;

les deux *hyperplans* $L(x) L(x') = 0$;

le *cône*, coupant le précédent sur ces hyperplans :

$$Q(L_x) q(x - x') + 2 L(x) L(x') = 0. \tag{6.6}$$

Si L est réel et $Q(L_x) > 0$, ce cône (6.6) n'appartient pas au support singulier du prolongement analytique réel de $E_\alpha(., .)$.

Note 6.2. — Vu (5.9) et (5.10), nous avons dans (6.5), en notant

$$t = k(x - x'), \qquad r = -Q(L_x)/2L(x)L(x'),$$

(6.7) $\Phi = \chi_{1-l/2}(t) F\left(\alpha, 1-\alpha, 2-\frac{l}{2}; rt\right)$ si l est *impair*;

$= \chi_0(t) F(\alpha, 1-\alpha, 1; rt)$ si $l = 2$;

$= \delta(t) + \chi_0(t)\alpha(1-\alpha) r F(1+\alpha, 2-\alpha, 2; rt)$ si $l = 4$;

$$= \chi_{1-l/2}(t) + \sum_{n=1}^{l/2-2} (-1)^n \frac{(\alpha-n)\dots(\alpha+n-1)}{n!}$$

$$\times r^n \chi_{n+1-l/2}(t) + \chi_0(t)(-1)^{l/2-1}$$

$$\times \frac{(\alpha+1-l/2)\dots(\alpha-2+l/2)}{(l/2-1)!} r^{l/2-1}$$

$\times F\left(\frac{l}{2}-\alpha, \frac{l}{2}+\alpha-1, \frac{l}{2}; rt\right)$ si l est *pair* $\geqq 6$.

Note 6.3. — Vu (6.6), les cas où l'opérateur a_α a une *lacune*, c'est-à-dire où $E_\alpha(x, x') = 0$ hors du cône caractéristique, sont les suivants :

1° l est *pair* et α est un *entier* tel que $2 - \frac{l}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{l}{2} - 1$;

2° l est *pair* > 2 et $Q(L_x) = 0$.

Note 6.4. — Deux opérateurs $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et $b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ sont équivalents quand il existe une application $x \mapsto y(x)$ et deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ telles que $b\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ soit le transformé de

$$f(x)\, a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[g(x).] \qquad \text{par} \quad x \mapsto y(x).$$

Supposons a et b hyperboliques; on vérifie aisément que cette équivalence équivaut à la propriété suivante de leurs solutions élémentaires hyperboliques $E(x, x')$ et $F(y, y') : x \mapsto y(x)$ transforme

$$\frac{1}{g(x) f(x')} E(x, x')\, dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_l \qquad \text{en} \quad F(y, y')\, dy'_1 \wedge \dots \wedge dy'_l.$$

Vu (6.5), (6.6) et le lemme 4.1 (homogénéité de χ_q), les cas, où $a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *équivaut au dalembertien* $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \sum_{j=2}^{l} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$, sont donc les trois cas suivants :

$$\alpha = 0; \qquad \alpha = 1; \qquad Q(L_x) = 0.$$

La note 6.3 donne donc *de nouveaux exemples d'opérateurs d'ordre* 2 *non équivalents au dalembertien et ayant une lacune :* a_α pour l pair $\geqq 6$ et α entier tel que $2-\frac{l}{2}\leqq\alpha\leqq-1$ ou $2\leqq\alpha\leqq\frac{l}{2}-1$.

Rappelons que N. H. IBRAGIMOV et E. V. MARMONTOV [5] ont récemment trouvé de tels opérateurs en dimension $l=4$.

7. Calcul de E_α dans un cas particulier.

Pour prouver le théorème 2, étudions d'abord le cas particulier suivant :

$$a_\alpha\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\square_x+\frac{\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \text{où} \quad x_1>0; \tag{7.1}$$

choisissons

$$Q(\xi)=\frac{1}{2}\Big(\xi_1^2-\sum_j{}^*\xi_j^2\Big), \qquad L(x)=x_1; \tag{7.2}$$

nous avons

$$q(x)=x_1^2-\sum_j{}^*x_j^2. \tag{7.3}$$

a_α est invariant par le groupe qui laisse x_1 invariant et qui transforme $(x_2,\ldots,x_l)$ par déplacement euclidien; a_α est homogène en x de degré -2. Donc $E_\alpha(x,x')$ doit être la composée de l'application

$$(x,x')\mapsto(x_1^2,x_1'^2,q(x-x'))$$

et d'une distribution homogène de degré $1-\frac{l}{2}$, en les points où

$$x_1x_1'\,dx_1\wedge dx_1'\wedge dq(x-x')\neq 0,$$

c'est-à-dire où $x_1\neq 0,\ x_1'\neq 0, \sum_j{}^*(x_j-x_j')^2\neq 0.$

Nous allons constater, plus précisément, que E_α est une somme de monômes :

$$x_1^{-\alpha-n}x_1'^{\alpha-n}\chi_{n+1-l/2}(k(x-x')).$$

Appliquons a_α à ces monômes : on a

$$a_x\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)[x_1^{-\alpha}x_1'^{\alpha}\chi_{1-l/2}(k(x-x'))]$$
$$=\frac{1}{2}x_1^{-\alpha}x_1'^{\alpha}\square\chi_{1-l/2}+\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)x_1^{-\alpha-2}x_1'^{\alpha}\chi_{1-l/2}$$

donc, vu le lemme 4.2,

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[x_1^{-\alpha}\, x_1'^{\alpha}\, \chi_{1-l/2}\,(k\,(x-x'))]$$
$$= \pi^{l/2-1}\,\delta\,(x-x') + \frac{1}{2}\alpha\,(1-\alpha)\, x_1^{-\alpha-2}\, x_1'^{\alpha}\, \chi_{1-l/2};$$

on a de même, vu (4.3) et (4.4), si n n'est pas entier $\leqq 0$:

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[x_1^{-\alpha-n}\, x_1'^{\alpha-n}\, \chi_{n+1-l/2}]$$
$$= \frac{1}{2}(n+\alpha)\,(n+1-\alpha)\, x_1^{-\alpha-n-2}\, x_1'^{\alpha-n}\, \chi_{n+1-l/2}$$
$$+ 2\,n\, x_1^{-\alpha-n-1}\, x_1'^{\alpha-n+1}\, \chi_{n-l/2}.$$

Les deux formules précédentes prouvent que

$$E_\alpha\,(x, x') = \pi^{1-l/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_1^{-\alpha-n}\, x_1'^{\alpha-n}\, \chi_{n+1-l/2}\,(k\,(x-x'))$$

si $c_0 = 1, \frac{1}{2}(n-1+\alpha)\,(n-\alpha)\,c_{n-1} + 2\,n\,c_n = 0 \quad (n = 1, \quad 2, \quad \ldots),$
c'est-à-dire si

$$c_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{\alpha\ldots(n-1+\alpha)\,(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{n\,!}.$$

D'où, vu (5.11) :

Lemme 7.1. — La solution élémentaire de l'opérateur (7.1) est

(7.4) $$E_\alpha\,(x, x') = \pi^{1-l/2}\,(x_1'/x_1)^\alpha\,\Phi,$$

où $\Phi = \Phi\left(\frac{l}{2}-\alpha, \frac{l}{2}+\alpha-1, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4\,x_1\,x_1'}, k\,(x-x')\right).$

Note. — Vu (7.2), le théorème 2 s'applique donc à l'opérateur (7.1). Évidemment :

Lemme 7.2. — Le support singulier de E_α appartient à la réunion des deux hyperplans $x_1 = 0$, $x_1' = 0$ et des deux cônes

$$(x_1 \pm x_1')^2 = \sum_j{}^{*}\,(x_j - x_j')^2.$$

Le premier de ces cônes n'appartient évidemment pas au support singulier du prolongement analytique réel de E_α.

8. **Preuve du théorème 2.**

$E_\alpha(x, x')\, dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_l$ et $H^{-1/2}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l$ sont indépendants du choix des coordonnées affines de X; donc $H^{1/2}\, E_\alpha(x, x')$ est indépendant de ce choix.

Supposons L réel et l'hyperplan $L(x) = 0$ spatial pour l'opérateur $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, c'est-à-dire

$$Q(L_x) > 0; \tag{8.1}$$

choisissons alors des coordonnées telles que

$$Q(\xi) = \frac{1}{2}\Big(\xi_1^2 - \sum_j{}^{*}\, \xi_j^2\Big), \qquad L(x) = cx_1, \qquad x_1 > 0.$$

On a

$$q(x) = x_1^2 - \sum_j{}^{*}\, x_j^2, \qquad H = 1;$$

a_α a l'expression (7.1); donc, vu le lemme 7.1,

$$H^{1/2}\, E_\alpha(x, x') = \pi^{1-l/2}\, [L(x')/L(x)]^\alpha\, \Phi,$$

où $\Phi = \Phi\left(\frac{l}{2} - \alpha, \frac{l}{2} + \alpha - 1, \frac{l}{2}; -\frac{c^2}{4\, L(x)\, L(x')}, k(x - x')\right)$.

Il suffit de noter que $\frac{1}{2}\, c^2 = Q(L_x)$ pour obtenir (6.5).

La relation (6.5) est donc vraie sous l'hypothèse : L est réel et vérifie (8.1); mais les deux membres de (6.5) sont *holomorphes* en L si $L \neq 0$; donc (6.5) vaut sans cette hypothèse.

Le lemme 7.2 prouve la note 6.1.

Chapitre III

L'opérateur de Tricomi-Clairaut

Un changement de variables, la formule de Kummer et un prolongement analytique permettent de déduire du théorème 2 le théorème 3, énoncé ci-dessous; il donne, pour le second ordre, la solution élémentaire des équations de Tricomi-Clairaut qu'a étudiées M[me] S. Delache en tout ordre.

9. L'expression de la solution élémentaire de l'opérateur de Tricomi–Clairaut.

Notons $Y = \mathbf{R}^l$; Ξ son dual. Nous étudierons l'opérateur de Tricomi-Clairaut

(9.1) $$b_\beta\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \beta\right) L\left(\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

où :

$y \in Y$;

$Q(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij}\,\xi_i\,\xi_j$ est une forme quadratique réelle sur Ξ, hyperbolique, de signature $(1, l-1)$;

$L(\xi) = \langle L, \xi \rangle$ est une forme linéaire réelle sur Ξ;

β est un paramètre appartenant à $\mathbf{C}$.

Notations. — Notons

$$H = (-1)^{l-1}\,\mathrm{Hess}\,(Q) = (-1)^{l-1}\,\mathrm{dét}\,(Q_{ij}) > 0.$$

Sur Y, définissons la forme quadratique $q(.)$ en éliminant ξ des équations

(9.2) $$\langle \xi, y \rangle = q(y), \qquad \frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi} = y;$$

$q(y)$ est donc défini par l'équation

(9.3) $$\left|\begin{array}{c:c:c} q(y) & y_i & \cdots \\ \hdashline y_j & Q_{ij} & \cdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \end{array}\right| = 0;$$

$q(.)$ est hyperbolique de signature $(1, l-1)$; notons $q(.,.)$ sa forme polaire. Nous verrons que

(9.4) $$\mathrm{Hess}_\xi\left[Q(\xi) + L(\xi)\sum_j y_j\,\xi_j\right] = \mathrm{Hess}_\xi\,(Q)\,f(L, y),$$

où

(9.5) $$f(L, y) = [q(L, y) + 1]^2 - q(L)\,q(y);$$

si $q(L) \neq 0$, l'hypersurface $f(L, y) = 0$ est un paraboloïde de direction asymptotique L; il décompose donc Y en deux domaines; b_β est *hyperbolique* à l'origine, donc dans tout l'ouvert où

$$f(L, y) > 0 \quad [\text{même si } q(L) = 0].$$

(Ce paraboloïde est une caractéristique singulière : tous ses hyperplans sont caractéristiques; ils constituent une intégrale complète de l'équation caractéristique, qui est du type de Clairaut.)

Nous aurons à employer la fonction $f(L, y, y')$, symétrique en (y, y'), affine en y et en y', telle que

$$f(L, y, y) = f(L, y);$$

de (9.5) résulte immédiatement que

$$f^2(L, y, y') - f(L, y) f(L, y') \quad \text{s'annule avec } q(L);$$

ce sera essentiel lors du plongement analytique que nous effectuerons. Plus précisément, on a

$$f^2(L, y, y') - f(L, y) f(L, y') = q(L) k_0(L, y, y'), \tag{9.6}$$

où

$$k_0(L, y, y') = -\begin{vmatrix} q(L) & q(L, y) + 1 & q(L, y') + 1 \\ q(L, y) + 1 & q(y) & q(y, y'), \\ q(L, y') + 1 & q(y, y') & q(y') \end{vmatrix}, \tag{9.7}$$

car, pour tout $(A, B, C, X, Y, Z) \in \mathbf{C}^6$:

$$X \begin{vmatrix} X & C & B \\ C & Y & A \\ B & A & Z \end{vmatrix} = (XY - C^2)(XZ - B^2) - (AX - BC)^2.$$

Nous verrons que l'équation du cône caractéristique de sommet y' est

$$k_0(L, y, y') = 0. \tag{9.8}$$

[Ce cône est évidemment circonscrit au paraboloïde $f(L, y) = 0$, le long de son intersection par le plan $f(L, y, y') = 0$, si $q(L) \neq 0$; si $q(L) = 0$, ce cône caractéristique contient la quadrique d'équations

$$q(L, y) + 1 = q(y) = 0$$

dont les hyperplans tangents sont caractéristiques.] Si y' est fixe et appartient au domaine d'hyperbolicité $f(L, y') > 0$, alors $k_0(L, y, y') \geqq 0$ quand y appartient à la réunion de deux demi-cônes convexes opposés, car $k_0(L, y, 0) = q(y)$, de signature $(1, l-1)$; nous choisissons l'un de ces demi-cônes, variant continûment avec y', et nous définissons

$$\begin{aligned} k(L, y, y') &= k_0(L, y, y') && \text{dans ce demi-cône,} \\ &= 0 && \text{hors de ce demi-cône.} \end{aligned} \tag{9.9}$$

Ce chapitre III va prouver ceci :

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathcal{E}_\beta$ la solution élémentaire de b_β dont le support appartient à ce demi-cône*

$$\mathcal{E}_\beta (y, y') = \pi^{1-l/2} H^{-1/2} f(L, y)^{(1-\beta)/2} f(L, y')^{(\beta-l)/2} \Phi, \tag{9.10}$$

où $\Phi = \Phi\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -q(L), \frac{k(L, y, y')}{f(L, y) f(L, y')}\right)$.

Note 9.1. — Le *support singulier de* $\mathcal{E}_\beta(.,\ .)$ appartient donc à la réunion des hypersurfaces suivantes :

le *cône* $k(L, y, y') = 0$;
le *paraboloïde* $f(L, y) = 0$;
le *paraboloïde* $f(L, y') = 0$.

Preuve de la note 9.1. — Si

$$C = A + B + \frac{1}{2}, \tag{9.11}$$

alors la composée des fonctions

$$t = 1 - \frac{f^2(L, y, y')}{f(L, y) f(L, y')} \quad \text{de } (y, y') \qquad \text{et} \qquad F(A, B, C; t) \quad \text{de } t$$

est une fonction de (y, y') holomorphe pour

$$f^2(L, y, y') \neq f(L, y) f(L, y') \neq 0, \tag{9.12}$$

car si $t \neq 0$ et si (9.11) a lieu, F est une fonction holomorphe et multiforme de $\sqrt{1-t}$. Vu (5.9) et (5.10), $\Phi(A, B, C; r, t)$ est donc une fonction holomorphe de (y, y') quand (9.12) est vérifié.

Note 9.2. — L'opérateur b_β a une lacune dans les cas suivants :

1° *l est pair*, β est un *entier* tel que $2 \leq \beta \leq l-1$;

2° l est *pair* > 2 et $q(L) = 0$.

Note 9.3. — Les cas où l'opérateur b_β *équivaut au dalembertien* sont les trois cas :

$$\beta = \frac{l}{2}, \qquad \beta = \frac{l}{2} + 1, \qquad q(L) = 0.$$

10. Calcul de $\mathscr{E}_\beta$ dans un cas particulier.

Étudions le cas particulier suivant :

$$(10.1)\quad b_\beta\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{c}{2}\,\square_y + c\left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \beta\right)\frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad \text{où} \quad c > 0.$$

Pour cela il suffit (P. Germain) d'utiliser dans X les coordonnées $(y_1, \ldots, y_l)$ définies par

$$(10.2)\qquad y_1 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - {\sum_j}^* x_j^2 - 1\right), \qquad x_j = y_j \qquad (j \neq 1);$$

on obtient, en définissant a_α par (7.1), et en posant $\beta = \alpha + \frac{l}{2}$

$$b_\beta\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) = c\, a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

donc

$$\mathscr{E}_\beta(y, y')\, dy'_1 \wedge \ldots \wedge dy'_l = c^{-1} E_\alpha(x, x')\, dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_l,$$

c'est-à-dire, vu le lemme 7.1, si $x_1 > 0$ et $x'_1 > 0$:

$$(10.3)\qquad \mathscr{E}_\beta(y, y') = \pi^{1-l/2}\, c^{-1}\, x_1^{\beta - l/2}\, {x'_1}^{\beta-1-l/2}\, \Phi,$$

où

$$\Phi = \Phi\left(\beta - 1, l - \beta, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4\, x_1\, x'_1}, \varkappa(x - x')\right),$$

$$\varkappa(x - x') = (x_1 - x'_1)^2 - {\sum_j}^* (x_j - x'_j)^2$$

dans un des demi-cônes où le second membre est > 0, $\varkappa = 0$ hors de ce demi-cône.

Or les définitions (9.3) et (9.5) donnent :

$$q(y) = \frac{1}{c}\left(y_1^2 - {\sum_j}^* y_j^2\right), \qquad q(L, y) = y_1, \qquad q(L) = c,$$

$$f(L, y) = 1 + 2\, y_1 + {\sum_j}^* y_j^2, \qquad f(L, y, y') = 1 + y_1 + y'_1 + {\sum_j}^* y_j\, y'_j;$$

la vérification de (9.4) est aisée. L'équation caractéristique de b_β est une équation de Clairaut, admettant pour intégrale complète l'hyperplan de Y d'équation

$$Q(\xi) + L(\xi) \sum_j \xi_j y_j = 0$$

qui, vu (9.4), enveloppe le paraboloïde d'équation

$$f(L, y) = 0.$$

Le cône caractéristique de sommet y' est le cône circonscrit à ce paraboloïde; son équation est

$$f^2(L, y, y') = f(L, y) f(L, y'), \qquad \text{c'est-à-dire} \quad k_0(L, y, y') = 0.$$

b_β est hyperbolique dans le domaine $f(L, y) > 0$, où nous l'étudions. Vu (10.2), $x_1 = \sqrt{f(L, y)}$, $x'_1 = \sqrt{f(L, y')}$,

$$(10.4) \quad \varkappa(x - x') = 2f(L, y, y') - 2\sqrt{f(L, y) f(L, y')} \quad \text{si } \varkappa > 0, \\ = 0 \quad \text{sinon.}$$

La formule (10.3) s'écrit donc, vu le lemme 5.2,

$$(10.5) \qquad \mathcal{E}_\beta(y, y') = \pi^{1-l/2} c^{-1} f^{(1-\beta)/2}(L, y) f^{(\beta-l)/2}(L, y') \Phi,$$

où

$$\Phi = \Phi\left(\beta - 1, l - \beta, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4}, \frac{\varkappa(x - x')}{\sqrt{f(L, y) f(L, y')}}\right),$$

c'est-à-dire, vu le lemme 5 (KUMMER),

$$\Phi = 4^{l/2-1} \Phi\left(\frac{\beta - 1}{2}, \frac{l - \beta}{2}, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4}, \frac{4\varkappa[\sqrt{f(L, y) f(L, y)} + \varkappa/4]}{f(L, y) f(L, y')}\right);$$

or on a, vu (10.4),

$$4\varkappa[\sqrt{f(L, y) f(L, y')} + \varkappa/4] = 4[f^2(L, y, y') - f(L, y) f(L, y')]$$

si $\varkappa > 0$; $= 0$ sinon. Donc, vu (9.6), où $q(L) = c$, et (9.8),

$$4\varkappa[\sqrt{f(L, y) f(L, y')} + \varkappa/4] = 4c\,k(L, y, y'),$$

l'expression précédente de Φ s'écrit donc :

$$\Phi = 4^{l/2-1} \Phi\left(\frac{\beta - 1}{2}, \frac{l - \beta}{2}, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4}, 4c \frac{k(L, y, y')}{f(L, y) f(L, y')}\right),$$

c'est-à-dire, vu le lemme 5.2,

$$\Phi = c^{1-l/2}\,\Phi\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -c, \frac{k(L, y, y')}{f(L, y)\, f(L, y')}\right).$$

Or $c = q(L)$, $H = c^l$; vu (10.5), nous avons donc :

$$H^{1/2}\,\mathcal{E}_\beta(y, y') = \pi^{1-l/2} f^{(1-\beta)/2}(L, y)\, f^{(\beta-l)/2}(L, y')\,\Phi,$$

où

$$\Phi = \Phi\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -q(L), \frac{k(L, y, y')}{f(L, y)\, f(L, y')}\right).$$

Nous avons donc prouvé que le n° 9 et le théorème 3 s'appliquent à l'opérateur (10.1).

11. Preuve du théorème 3.

$H^{1/2}\,\mathcal{E}_\beta(y, y')$ est indépendant du choix des coordonnées (*cf.* n° 8). Or si $q(L) > 0$ nous pouvons choisir des coordonnées telles que b_β ait l'expression (10.1). Vu le n° 10, la formule (9.4), l'équation (2.8) du cône caractéristique et le théorème 3 valent donc pour $q(L) > 0$. Un prolongement analytique montre qu'ils valent quel que soit L.

Chapitre IV

Le cas particulier de la dimension 2

12. Deux particularités.

Deux particularités se présentent quand $l = 2$:

— L'équation, quand elle est hyperbolique a quatre solutions élémentaires à supports contenus dans des angles : on les obtient en appliquant le théorème 2 à a_α et $-a_\alpha$, le théorème 3 à b_β et $-b_\beta$.

— La distribution Φ, qu'emploient les théorèmes 2 et 3, est une fonction, dont (5.9) donne l'expression.

On obtient ainsi les théorèmes suivants.

13. Opérateur d'Euler-Poisson-Darboux.

Employons les notations du n° 6, en prenant $l = 2$:

THÉORÈME 2 *bis*. — *Soit E_α la solution élémentaire de a_α dont le support appartient à l'un des quatre angles fermés, sur les bords desquels* $q(x - x') = 0$;

(13.1) $$E_\alpha(x, x') = (\operatorname{sgn} q)\, H^{-1/2}\, [L(x)/L(x')]^\alpha\, F,$$

où sgn q *est le signe de* q *et*

$$F = F\left(1 - \alpha, \alpha, 1; -\frac{Q(L_x)}{2\, L(x)\, L(x')}\, q(x - x')\right);$$

(13.1) *vaut sur la composante connexe, contenant $x = x'$, de la partie de cet angle où*

(13.2) $$L(x)\, L(x') > 0, \qquad -Q(L_x)\, q(x - x') < 2\, L(x)\, L(x').$$

14. Opérateur de Tricomi-Clairaut.

Employons les notations du n° 9, en faisant $l = 2$.

THÉORÈME 3 *bis*. — *Supposons y et y' dans le domaine d'hyperbolicité*

$$f(L, y) > 0, \qquad f(L, y') > 0.$$

Soit $\mathcal{E}_\beta$ la solution élémentaire de b_β dont le support appartient à l'un des quatre demi-cônes fermés sur le bord desquels

$$f(L, y)\, f(L, y') = f^2(L, y, y'),$$

(14.1) $$\mathcal{E}_\beta(y, y') = \pm\, H^{-1/2}\, [f(L, y)]^{(1-\beta)/2}\, [f(L, y')]^{(\beta/2)-1}\, F,$$

où $\pm = \operatorname{sgn} q(L)\, [f^2(L, y, y') - f(L, y)\, f(L, y')]$,

$$F = F\left(\frac{\beta - 1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}, 1; 1 - \frac{f^2(L, y, y')}{f(L, y)\, f(L, y')}\right);$$

(14.1) *vaut sur la composante connexe, contenant $y = y'$, de la partie de ce demi-cône, où*

(14.2) $$f(L, y) > 0, \qquad f(L, y') > 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADER (R.) et GERMAIN (P.). — *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation du type mixte de Tricomi*, ONERA, Publication n° 54, 1952.

[2] DAVIS (Ruth M.). — On a regular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation, *Annali di Mat. pura ed appl.*, t. 42, 1956, p. 205-226.

[3] DELACHE (S.). — Calcul des solutions élémentaires des opérateurs de Tricomi-Clairaut auto-adjoints, strictement hyperboliques, *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 5-79.

[4] GEL'FAND (I. M.) et ŠILOV (G. E.). — Les distributions, t. 1. Traduit par G. Rideau. — Paris, Dunod, 1962 (Collection universitaire de Mathématiques, 8).

[5] IBRAGIMOV (N. H.) et MARMONTOV (E. V.). — Sur le problème de J. Hadamard relatif à la diffusion des ondes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, série A, p. 456-458.

[6] RIESZ (M.). — L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Mathematica*, t. 81, 1948, p. 1-223.

(Texte reçu le 26 mai 1971.)

Solange DELACHE,
42, avenue Jean-de-La-Fontaine,
06-Nice;

Jean LERAY,
Collège de France,
Place Marcelin-Berthelot,
75-Paris 05.