BULLETIN DE LA S. M. F.

D. LEHMANN

(Co)-homologies généralisées des espaces $K(\Pi, 1)$ et des formes sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 305-318

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__305_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 305 à 318.

(CO)-HOMOLOGIES GÉNÉRALISÉES DES ESPACES $K(\Pi, 1)$ ET DES FORMES SPHÉRIQUES

PAR

DANIEL LEHMANN.

(Lille).

1. Introduction.

Soient Π un groupe fini d'ordre k, et h^* (resp. h_*) une théorie *réduite* de cohomologie (resp. d'homologie) généralisée définie pour les CW-complexes à squelettes finis.

Appelons $\hat{k}$-torsion d'un groupe abélien Λ, l'ensemble des éléments $\lambda \in \Lambda$ annulés par une puissance de k (i. e. tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $k^n.\lambda = 0$). C'est aussi le noyau de l'homomorphisme $\lambda \to \lambda \otimes 1$ de Λ dans $\Lambda \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}[1/k]$ (où $\mathbf{Z}[1/k]$ désigne le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ formé des nombres rationnels de la forme m/k^n, avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$).

LEMME (A). — *Soit X un CW-complexe fini sur lequel Π opère librement, et soit $p : X \to X/\Pi$ la projection canonique.*

L'application naturelle

$$p^* : \quad h^*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \to h^*(X) \quad \otimes \mathbf{Z}[1/k]$$
$$(\text{resp. } p_* : \quad h_*(X) \quad \otimes \mathbf{Z}[1/k] \to h_*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k])$$

est alors injective (resp. surjective), et identifie

$$h^*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \text{ à } (h^*(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k])^{\Pi}$$
$$(\text{resp. } h_*(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \text{ à } (h_*(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k])_{\Pi}),$$

$h(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k]$ étant muni de la structure naturelle de Π-module, associée à l'action de Π sur X.

Rappelons en effet [10] qu'il existe une suite spectrale « des revêtements »

$$E_2^{p,q}(X, \Pi, h^*) = H^p(\Pi, h_+^q(X)) \Rightarrow h_+^{p+q}(X/\Pi)$$

$$[\text{resp. } E_{p,q}^2(X, \Pi, h_*) = H_p(\Pi, h_q^+(X)) \Rightarrow h_{p+q}^+(X/\Pi)],$$

où h_+^* (resp. h_*^+) désigne la théorie libre associée à h^* (resp. h_*), et où $h_+^*(X)$ [resp. $h_*^+(X)$] est muni de la structure naturelle de Π-module associée à l'action de Π sur X.

Puisque $\mathbf{Z}[1/k]$ est sans torsion, $\bar{h} = h \otimes \mathbf{Z}[1/k]$ est encore une théorie généralisée. Par ailleurs, $H^p(\Pi, \bar{h}_+^q(X))$ est un $\mathbf{Z}[1/k]$-module, annulé par k pour $p > 0$; on en déduit

$$E_2^{p,q}(X, \Pi, \bar{h}^*) = 0, \quad \forall p > 0$$

et, par conséquent,

$$\bar{h}_+^p(X/\Pi) \cong E_2^{0,p}(X, \Pi, \bar{h}^*) = (\bar{h}_+^p(X))^{\Pi}.$$

On vérifie, d'autre part, que l'identification de $\bar{h}_+^p(X/\Pi)$ au sous-groupe des éléments de $\bar{h}_+^p(X)$, invariants par Π, n'est rien d'autre que l'application naturelle induite par p^*.

La démonstration en homologie est analogue.

COROLLAIRE (A_1).

(i) $\mathrm{Ker}(h^*(X/\Pi) \to h^*(X))$
[*resp.* $\mathrm{Coker}\,(h_*(X) \to h_*(X/\Pi))$]
ne contient que de la $\hat{k}$-torsion;

(ii) *si $h^i(X) = 0$ [resp. $h_i(X) = 0$],*
$h^i(X/\Pi)$ [resp. $h_i(X/\Pi)$] ne contient que de la $\hat{k}$-torsion;

(iii) *si Π opère trivialement sur $h^i(X)$ (resp. $h_i(X)$),*

$$p^* : h^i(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \to h^i(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k]$$

$$(\textit{resp. } p_* : h_i(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \to h_i(X/\Pi) \otimes \mathbf{Z}[1/k])$$

est un isomorphisme.

Soit, en effet, N^* le noyau de $h_+^*(X/\Pi) \to h_+^*(X)$ [qui est le même que celui de $h^*(X/\Pi) \to h^*(X)$]. Puisque $\mathbf{Z}[1/k]$ est sans torsion, on déduit du lemme (A) que

$$N^* \otimes \mathbf{Z}[1/k] = 0.$$

C'est dire que N^* ne contient que de la $\hat{k}$-torsion, d'où la partie (i) (la démonstration en homologie est analogue). Les parties (ii) et (iii) sont des trivialités.

COROLLAIRE (A_2). — *Soit $B_\Pi = K(\Pi, 1)$ un CW-complexe à squelettes finis, classifiant pour le groupe* **Π**.

Supposons que la théorie h vérifie l'axiome d'additivité infinie de MILNOR [8] (*ce qui est, par exemple, le cas de toutes les théories représentables*).

Alors,

— *en homologie :*

$h_*(B_\Pi)$ *ne contient que de la $\hat{k}$-torsion;*

— *en cohomologie :*

s'il existe une suite $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\varprojlim_r{}^1 h^{q-1}(B_\Pi)_{\Phi(r)} = 0,$$

la torsion de $h^q(B_\Pi)$ est alors de type $\hat{k}$.

D'après MILNOR [8], on a en effet, pour toute suite

$$X_i \subset X_{i+1} \subset \ldots \subset X = \lim_r X_r$$

de cofibrations entre CW-complexes, une suite exacte

$$0 \to \varprojlim_r{}^1 h^{q-1}(X_r) \to h^q(X) \to \varprojlim_r h^q(X_r) \to 0$$

$$\left[\text{resp. un isomorphisme } \varinjlim_r h_q(X_r) \xrightarrow{\cong} h_q(X)\right].$$

Notant alors $(E_\Pi)_{\Phi(r)} \xrightarrow{p_r} (B_\Pi)_{\Phi(r)}$ et $E_\Pi \xrightarrow{p} B_\Pi$ les revêtements universels de $(B_\Pi)_{\Phi(r)}$ et B_Π, on obtient

$$\varprojlim_r h^q(E_\Pi)_{\Phi(r)} = 0 \qquad \left[\text{resp. } \varinjlim_r h_q(E_\Pi)_{\Phi(r)} = 0\right],$$

puisque $h(E_\Pi) = 0$ (E_Π est contractile, et la théorie h est réduite). On en déduit, puisque le foncteur $\varprojlim_r$ est exact à gauche, que les suites exactes

$$0 \to \operatorname{Ker}(p_{\Phi(r)})^* \to h^*(B_\Pi)_{\Phi(r)} \to h^*(E_\Pi)_{\Phi(r)}$$

donnent lieu à un isomorphisme par passage à la limite projective :

$$\varprojlim_r \operatorname{Ker}(p_{\Phi(r)})^* \xrightarrow{\cong} \varprojlim_r h^*(B_\Pi)_{\Phi(r)}.$$

[En homologie, on obtient de même, puisque le foncteur $\varinjlim_r$ est exact, un isomorphisme

$$\left.\varinjlim_r h_*(B_\Pi)_{\Phi(r)} \xrightarrow{\cong} \varinjlim_r \operatorname{Coker}(p_{\Phi(r)})_*\right].$$

On en déduit une suite exacte :

$$0 \to \varprojlim_r{}^1 h^{q-1}(B_\Pi)_{\Phi(r)} \to h^q(B_\Pi) \to \varprojlim_r \operatorname{Ker}(p_{\Phi(r)})^q \to 0$$

$$\left[\text{resp. un isomorphisme } \varinjlim_r \operatorname{Coker}(p_{\Phi(r)})_* \overset{\cong}{\to} h_*(B_\Pi)\right].$$

Le corollaire (A_2) en découle, puisque la limite projective [resp. inductive] d'une suite $\ldots \to \Lambda_i \to \Lambda_{i+1} \to \ldots$ de groupes abéliens est un sous-groupe [resp. un quotient] du produit direct $\prod_r \Lambda_r$ [resp. de la somme directe $\bigoplus_r \Lambda_r$], et que chacun des groupes $\Lambda_r = \operatorname{Ker}(p_{\Phi(r)})^q$ [resp. $\operatorname{Coker}(p_{\Phi(r)})_q$] ne contient que de la $\hat{k}$-torsion, en vertu du corollaire (A_1).

Lemme (B). — *Soit $X_{2n+1}(\Pi)$ un CW-complexe fini, de dimension $2n+1$, Π-classifiant pour les CW-complexes de dimension $\leq 2n$.*

La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch (cf. [4])

$$H(X_{2n+1}(\Pi), h(S^0)) \Rightarrow h(X_{2n+1}(\Pi))$$

est triviale (i. e. *a toutes ses différentielles nulles*) *sous les hypothèses suivantes :*

(i) $H^{2i+1}(\Pi, h^*(S^0)) = 0$, $\forall\, i = 0, \ldots, n-1$
[*resp.* $H_{2i}(\Pi, h_*(S^0)) = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$];

(ii) $H^{2i}(\Pi, h^{\text{impair}}(S^0)) = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$
[*resp.* $H_{2i+1}(\Pi, h_{\text{impair}}(S^0)) = 0$, $\forall\, i = 0, \ldots, n-1$];

(iii) $H^{2n+1}((B_\Pi)_{2n+1}, h^{\text{impair}}(S^0))$ *n'admet éventuellement des éléments de torsion que d'ordre premier avec k*

[*resp.* $H_{2n+1}((B_\Pi)_{2n+1}, h_{\text{impair}}(S^0))$ *n'a que des éléments de torsion, et tous d'ordre premier avec k*].

Faisons d'abord la démonstration en cohomologie. Supposons avoir déjà démontré que

$$E_2^{p,q} = E_r^{p,q}, \quad \forall\, p, q.$$

Montrons que la différentielle $d_r : E_2^{p,q} \to E_2^{p+r,q-r+1}$ est toujours nulle. Rappelons d'abord que

$$H^p(X_{2n+1}(\Pi), \Lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq 0 \text{ ou } p \geq 2n+2, \\ H^p(\Pi, \Lambda) & \text{pour } 1 \leq p \leq 2n. \end{cases}$$

On déduit des hypothèses (i) et (ii) du lemme que $E_2^{p,q}$ ne peut être $\neq 0$ que sous l'une des deux hypothèses

$$2 \leq p \text{ pair } \leq 2n \quad \text{et} \quad q \text{ pair}$$

ou

$$p = 2n+1.$$

Supposons que $E_2^{p,q}$ satisfasse à la première hypothèse et que $p+r<2n+1$. On a alors $E_2^{p+r,q-r+1}=0$ car, de deux choses l'une, ou bien r est pair, auquel cas $q-r+1$ est impair, ou bien r est impair, auquel cas $p+r$ est impair. Si, maintenant, $p+r=2n+1$, $E_2^{p,q}$ satisfaisant toujours à la première hypothèse, r est nécessairement impair, donc $q-r+1$ est pair; en vertu de l'hypothèse (iii) du théorème,

$$d_{\text{impair}} = E_2^{\text{pair, pair}} \to E_2^{2n+1,\text{ pair}}$$

est encore nulle, car $E_2^{p,q}$ ne contient que de la k-torsion, alors que $E_2^{2n+1,\text{ pair}}$ ne contient, comme torsion, que des éléments d'ordre premier avec k. Ainsi, on a toujours $d_r=0$, donc $E_{r+1}=E_r=E_2$. D'où $E_\infty=E_2$.

En homologie, on démontrerait de même, grâce aux hypothèses (i) et (ii), que l'on a toujours

$$E^2_{p,q}=0 \qquad \text{ou} \qquad E^2_{p-r,q+r-1}=0,$$

sauf pour $p=2n+1$, q impair et r pair. Mais alors

$$d_{\text{pair}} = E^2_{2n+1,\text{ impair}} \to E^2_{\text{impair, pair}}$$

est encore nulle, car $E^2_{\text{impair, pair}}$ ne contient que de la k-torsion, tandis que $E^2_{2n+1,\text{ impair}}$ ne contient que de la torsion, et d'ordre premier avec k [hypothèse (iii)]. D'où le lemme.

Remarque. — Si Π opère librement sur une sphère homotopique S^{2n+1}, et si $X_{2n+1}(\Pi)=S^{2n+1}/\Pi$, la cohomologie de Π est alors périodique. En particulier, les groupes $H^{2i+1}(\Pi, \mathbf{Z})$ [resp. $H_{2i}(\Pi, \mathbf{Z})$, $i>0$] sont nuls.

COROLLAIRE (B₁). — *Sous les hypothèses du lemme* (B), *et pour une filtration convenable de* $h^*(X_{2n+1}(\Pi))$ [*resp.* $h_*(X_{2n+1}(\Pi))$], *on a alors*

$$G_* h^{2s}(X_{2n+1}(\Pi)) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^{2i}(\Pi,\ h^{2(s-i)}(S^0)) \oplus H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi),\ h^{2(s-n)-1}(S^0)),$$

$$h^{2s+1}(X_{2n+1}(\Pi)) = H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi),\ h^{2(s-n)}(S^0))$$

[*resp.*

$$G_* h_{2s+1}(X_{2n+1}(\Pi)) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_{2i+1}(\Pi, h_{2(s-i)}(S^0)) \oplus H_{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), h_{2(s-n)}S^0)),$$

$$h_{2s}(X_{2n+1}(\Pi)) = H_{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi),\ h_{2(s-n)-1}(S^0))\Big],$$

G_* *signifiant « gradué associé ».*

Ce corollaire résulte immédiatement de l'égalité

$$E_2 = E_\infty \qquad [\text{resp. } E^2 = E^\infty].$$

Corollaire (B_2). — *Si, en plus des hypothèses du lemme* (B)

$$H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi);\, h^{2(s-n)-1}(S^0)) = 0$$
$$[\textit{resp.}\ H_{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi);\, h_{2(s-n)}(S^0)) = 0],$$

le groupe $h^{2s}(X_{2n+1}(\Pi))$ [*resp.* $h_{2s+1}(X_{2n+1}(\Pi))$]

(i) *est d'ordre* $\prod_{i=1}^{n}$ *ordre* $H^{2i}(\Pi;\, h^{2(s-i)}(S^0))$

[*resp.* $\prod_{i=0}^{n-1}$ *ordre* $H_{2i+1}(\Pi;\, h_{2(s-i)}(S^0))$];

(ii) *est annulé par* $(k'_s)^{n'_s}$, *où* k'_s *désigne le plus petit diviseur de* k *annulant chacun des groupes* $H^{2i}(\Pi, h^{2(s-i)}(S^0))$ *pour* $i = 1, \ldots, n$ [*resp.* $H_{2i+1}(\Pi, h_{2(s-i)}(S^0))$ *pour* $i = 0, \ldots, n-1$], *et où* n'_s *désigne le nombre de ceux de ces groupes qui ne sont pas nuls.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate de (B_1) et du fait que chacun des groupes $H^i(\Pi, \Lambda)$ [resp. $H_i(\Pi, \Lambda)$] ($i > 0$, Λ groupe abélien) est annulé par k.

Remarque. — Le corollaire (B_2) implique en particulier que $h^{2s}(X_{2n+1}(\Pi))$ [resp. $h_{2s+1}(X_{2n+1}(\Pi))$] ne contient que de la $\hat{k}$ torsion; il exprime en fait un résultat plus précis.

La suite de cet article est consacrée à quelques applications des résultats ci-dessus, dont l'essentiel a été résumé dans deux Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6].

2. Classes (co)-caractéristiques généralisées.

Soient G un groupe topologique, et $P \to X$ un fibré de groupe structural G, d'application classifiante $\xi : X \to B_G$.

Les éléments de Im ($\xi^* : h^*(B_G) \to h^*(X)$) [resp. Coim($\xi_* : h_*(X) \to h_*(B_G)$). s'appellent les classes *caractéristiques* [resp. (*co*)-*caractéristiques*] de P en théorie h.

Le fibré P est dit Π-*plat* s'il existe un revêtement principal $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ de groupe structural Π, et un morphisme $\rho : \Pi \to G$ tel que $G \times_{\rho} \hat{X} \to X$ soit isomorphe au G-fibré principal associé à P. Il revient au même de dire que ξ est homotope à B_ρ. θ, où $\theta : X \to B_\Pi$ est une application classifiante de $\hat{X}$, et où $B_\rho : B_\Pi \to B_G$ est l'application (définie à homotopie près) induite par ρ.

Proposition. — *Si G le fibré principal associé à P est $G \times_{\rho} \hat{X}$ (notations ci-dessus), l'image réciproque $\pi^{-1}(P)$ de P par l'application $\pi : \hat{X} \to X$ est triviale.*

En effet, l'application classifiante de $\pi^{-1}(P)$ est $\xi \circ \pi$; puisque $\xi \circ \pi$ est homotope à $B_\rho \circ p . \theta$ et que E_Π est contractile, $\xi \circ \pi$ est homotope à o, d'où la proposition.

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[dr, "\hat{\theta}"] \arrow[dd, "\pi"'] & & \\
& E_\Pi \arrow[dd, "p"] & \\
X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\theta"'] & & B_G \\
& B_\Pi \arrow[ur, "B_\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

On dira, plus généralement, que P est *pseudo*-Π-*plat* s'il existe un revêtement principal $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ de groupe structural Π, tel que $\pi^{-1}(P)$ soit trivial [il suffit pour cela que l'application classifiante ξ de P se factorise à travers B_Π sous la forme $\xi = u . \theta$, où $u : B_\Pi \to B_G$ n'est plus nécessairement de la forme B_ρ].

THÉORÈME 1. — *Soit P un fibré pseudo-Π-plat. Les classes caractéristiques (resp. co-caractéristiques) de P en théorie h^* (resp. h_*) :*

(i) *sont annulées par une puissance de k, si X a le type d'homotopie d'un polyèdre fini (et même par k en cohomologie ou homologie ordinaire);*

(ii) *sont annulées par $(k'_s)^{n'_s}$ en degré $2s$ (resp. $2s+1$), et sont nulles en degré $2s+1$ (resp. $2s$), sous les hypothèses et avec les notations du corollaire* (B_2), *si X a le type d'homotopie d'un polyèdre fini, et si, de plus, l'application classifiante ξ se factorise à travers B_Π* [ou plus généralement un espace de la forme $X_{2n+1}(\Pi)$];

(iii) *sont annulées par une puissance de k, en homologie uniquement, si X a le type d'homotopie d'un CW-complexe à squelettes finis, si ξ se factorise à travers B_Π, et si h_* vérifie l'axiome d'additivité infinie de Milnor.*

Soit, en effet, $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ un revêtement principal de groupe Π tel que $\pi^{-1}(P)$ soit trivial : $\xi \circ \pi$ est alors homotope à o. On en déduit que $\operatorname{Im} \xi^*$ est inclus dans $\operatorname{Ker} \pi^*$ (resp. $\operatorname{Coim} \xi_*$ est un quotient de $\operatorname{Coker} \pi_*$). Compte tenu du corollaire (A_1), la partie (i) du théorème en résulte.

Les parties (ii) et (iii) résultent respectivement de ce que ξ se factorise à travers $X_{2n+1}(\Pi)$ (resp. B_Π), et du corollaire (B_2) [resp. (A_2)].

3. K-théorie des espaces S^{2n+1}/Π.

THÉORÈME 2. — *Supposons avoir muni B_Π d'une structure de CW-complexe, n'ayant qu'un nombre fini de cellules en chaque dimension.*

Si $H^{2i+1}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$, $\forall\, i\,(i \geqq n)$, $\widetilde{KU}^0((B_\Pi)_{2n+1})$ *ne contient alors que de la* $\hat{k}$*-torsion.*

Sous l'hypothèse du théorème, Kamber et Tondeur ont en effet démontré que tout fibré vectoriel complexe de base $(B_\Pi)_{2n+1}$ est stablement isomorphe à un fibré Π-plat ([5], p. 27). Remarquant que la classe stable d'un fibré vectoriel complexe est une classe caractéristique de ce fibré en $\widetilde{KU}$-théorie, il suffit d'appliquer le théorème 1 [partie (i)] pour en déduire le théorème 2.

Théorème 3 (*cf.* [5], p. 29). — *Les hypothèses du lemme* (B) *sont vérifiées en* $\widetilde{KU}$*-théorie pourvu que* $H^{\text{impair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ (*ce qui est en particulier le cas pour tous les groupes* Π *à cohomologie périodique,* i. e. *opérant librement sur une sphère homotopique*), *et que* $H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), \mathbf{Z})$ *ne contienne pas de torsion, sauf éventuellement d'ordre premier avec k.*

On a alors, en particulier :

$$(k'_0)^{n'_0} . \widetilde{KU}^0(X_{2n+1}(\Pi)) = 0$$

(*où* k'_0 *divise* k, *et* $n'_0 \leqq n$),

$$\widetilde{KU}^1(X_{2n+1}(\Pi)) = H^{2n+1}(X_{2n+1}(\Pi), \mathbf{Z}),$$

et $\widetilde{KU}^0(X_{2n+1}(\Pi))$ *est d'ordre* $\prod_{i=1}^{n}$ *ordre* $H^{2i}(\Pi, \mathbf{Z})$.

Il est immédiat de vérifier que l'on peut appliquer le lemme (B). J'ignore s'il existe des groupes finis Π vérifiant $H^{\text{impair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$, qui ne soient pas à cohomologie périodique (*).

Théorème 4. — *Soit* $\sigma : \Pi \to SO(2n+2)$ *un* Π*-module tel que, par* σ, Π *opère librement sur* S^{2n+1}. *Les hypothèses du lemme* (B) *sont alors toujours vérifiées pour* $X_{2n+1}(\Pi) = S^{2n+1}/\sigma$ *en théorie* $\widetilde{KO} \otimes \mathbf{Z}[1/2]$, *et même en théorie* $\widetilde{KO}$ *si l'ordre k de* Π *est impair. En particulier :*

$$G_* \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}/\sigma) \otimes \mathbf{Z}[1/2] = \bigoplus_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ s-i \text{ pair}}} H^{2i}(\Pi, \mathbf{Z}[1/2]),$$

$$\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}/\sigma) \otimes Z[1/2] = \begin{cases} 0 & \textit{si } (s-n) \textit{ est impair,} \\ \mathbf{Z}[1/2] & \textit{si } (s-n) \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Si Π *est d'ordre impair, on a aussi*

$$G_* \widetilde{KO}^{2s}(S^{2n+1}/\sigma) = \bigoplus_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ s-i \text{ pair}}} H^{2i}(\Pi, \mathbf{Z}) \oplus \Lambda_{s,n}$$

où

$$\Lambda_{s,n} = \begin{cases} 0 & n-s \not\equiv 0 \pmod 4, \\ \mathbf{Z}_2 & n-s \equiv 0 \pmod 4, \end{cases}$$

$$\widetilde{KO}^{2s+1}(S^{2n+1}/\sigma) = \begin{cases} 0 & n-s \equiv 3 \pmod 4, \\ \mathbf{Z}_2 & n-s \equiv 1 \pmod 4, \\ \mathbf{Z} & n-s \text{ pair}. \end{cases}$$

Remarque. — Si la représentation σ est spinorielle [i. e. se factorise à travers Spin $(2n+2)$], et si $n \not\equiv 0 \pmod 4$, tout fibré vectoriel réel de base S^{2n+1}/σ est stablement plat (*cf.* [7]).

Le théorème 4 se démontre aisément, compte tenu du groupe des coefficients donné par le tableau suivant :

$-i \equiv \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widetilde{KO}^i(S^0)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}$	0	0	0	$\mathbf{Z}$
$\widetilde{KO}^i(S^0) \otimes \mathbf{Z}[1/2]$	$\mathbf{Z}[1/2]$	0	0	0	$\mathbf{Z}[1/2]$	0	0	0	$\mathbf{Z}[1/2]$

Le soin d'appliquer le corollaire (B_2) à cette situation est laissé au lecteur.

THÉORÈME 5. — *Soit* $\sigma : \Pi \to \mathrm{So}(2n+2)$ *un* Π-*module faisant opérer* Π *librement sur* S^{2n+1}. *La classe stable du fibré tangent* $T(S^{2n+1}/\sigma)$ *est annulée dans* $\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma)$,

— *par* $k^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ *si* k *est impair,*

— *par* $k'^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times 2^r$ *si* k *est pair, où* k' *est le plus grand diviseur impair de* k, *et* r *un entier* ≥ 0.

On a en effet :

$$T(S^{2n+1}/\sigma) \oplus \theta^1 = E_\sigma,$$

où $\theta^1 = R \times (S^{2n+1}/\sigma) \to S^{2n+1}/\sigma$ est le fibré trivial de dimension 1, et où $E_\sigma \to S^{2n+1}/\sigma$ désigne le fibré vectoriel réel de dimension $2n+2$ associé par σ au revêtement universel $S^{2n+1} \to S^{2n+1}/\sigma$. [La démonstration est une généralisation immédiate de celle, classique, relative à l'espace projectif réel.] En particulier, $T(S^{2n+1}/\sigma)$ est stablement plat, donc sa classe stable appartient à la $\hat{k}$-torsion de $\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma)$, d'après le théorème 1.

D'après le théorème 4, la $\hat{k}$-torsion de $\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma)$ est annulée par $k^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ si k est impair $\left(\text{et même : } k^{\left[\frac{n}{2}\right]}.\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma) = 0 \text{ si } n \not\equiv 3 \bmod 4\right)$, tandis que

$$k'^{\left[\frac{n}{2}\right]}.\widetilde{KO}^0(S^{2n+1}/\sigma) \otimes \mathbf{Z}[1/2] = 0.$$

Le théorème 5 en résulte.

4. Applications au bordisme équivariant.

THÉORÈME 6. — *Pour tout groupe fini* Π, *d'ordre* k, *les groupes* $\tilde{\mathfrak{N}}_*(\Pi)$, $\tilde{\Omega}^{So}_*(\Pi)$, $\tilde{\Omega}^{Spin}_*(\Pi)$, $\tilde{\Omega}^{U}_*(\Pi)$ *ne contiennent que de la* $\hat{k}$*-torsion.*

C'est un cas particulier du corollaire (A_2) [partie (ii)]. Pour $\mathfrak{N}_*$, on le savait déjà, car : $\tilde{\mathfrak{N}}_*(\Pi) \simeq \mathfrak{N}_* \otimes \tilde{H}_*(\Pi, Z_2)$ (*cf.* CONNER et FLOYD [3]).

COROLLAIRE 6′. — *Pour toute variété bord compacte* V_r *sur laquelle* Π *opère librement, et telle que* V_r/Π *soit une variété bord, il existe un entier* $n \geqq 0$, *tel que l'action de* Π *sur* $k^n . V_r$ (Π *opérant de la même façon sur chacun des* k^n *exemplaires de* V_r) *se prolonge en une action libre de* Π *sur une variété* W_{r+1} *de bord* $k^n . V_r$ (*ceci, quelle que soit la théorie de bordisme considérée*).

Puisque chacune des théories de bordisme explicitées ci-dessus vérifie l'axiome de Milnor, et

$$\Omega_q = 0 \qquad \text{pour} \quad q < 0,$$

il existe (*cf.* § 5) une suite spectrale d'Atiyah-Hirzeburch

$$\tilde{H}_p(\Pi, \Omega_q), \Rightarrow \tilde{\Omega}_{p+q}(\Pi)$$

(laquelle est toujours triviale pour $\Omega = \mathfrak{N}$, d'après [3]).

THÉORÈME 7. — *La suite spectrale*

$$\tilde{H}_p(\Pi, \Omega_q) \Rightarrow \tilde{\Omega}_{p+q}(\Pi)$$

est triviale (*i. e. a toutes ses différentielles nulles*),

(i) *en théorie* $\tilde{\Omega}^U_*$, *si* $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$;

(ii) *en théories* $\tilde{\Omega}^{So}_*$ *et* $\tilde{\Omega}^{Spin}_*$, *si* $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ *et si l'ordre* k *de* Π *est impair;*

(iii) *en théories* $\tilde{\Omega}^{So}_* \otimes \mathbf{Z}[1/2]$ *et* $\tilde{\Omega}^{Spin}_* \otimes \mathbf{Z}[1/2]$, *si* $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}[1/2]) = 0$

Ce théorème s'obtient par exemple en appliquant le lemme (B) pour $X_{2n+1}(\Pi) = (B_\Pi)_{2n+1}$ avec n assez grand (ou se vérifie directement). On utilise les renseignements connus sur Ω_* (*cf.* [3], [9], [12], [13], [14]).

Remarques.

1° $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ pour les groupes à cohomologie périodique (i. e. opérant librement sur une sphère homotopique).

2° La trivialité de la suite spectrale ci-dessus équivaut à la *surjectivité* de l'homomorphisme $\mu : \tilde{\Omega}_*(\Pi) \to \tilde{H}_*(\Pi, \Lambda)$ de THOM-STEENROD, où $\Lambda = \mathbf{Z}$ dans les cas (i) et (ii), $\mathbf{Z}[1/2]$ dans le cas (iii) (*cf.* [3]). Pour $\mathfrak{N}$, $\mu : \mathfrak{N}_*(X) \to H_*(X, \mathbf{Z}_2)$ est toujours surjectif (*cf.* THOM [13]).

3° Le théorème 7 avait été démontré pour $\Pi = \mathbf{Z}_q$ (q impair) et $\Omega = \Omega^{\mathrm{So}}$ par CONNER et FLOYD, en vérifiant directement la surjectivité de μ (*cf.* [3]).

COROLLAIRE 7′. — *Si* $\tilde{H}_{\mathrm{pair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$, *sans autre hypothèse en théorie* Ω_*^u, *avec k impair en théories* Ω_*^{So} *et* Ω_*^{Spin}, *l'entier n, défini au corollaire* 6′, *peut être pris :*

— *égal à* 0 *si r est pair;*

— *égal à* $\left[\frac{r}{2}\right] + 1$ $\left(\text{resp. } \left[\frac{r}{4}\right] + 1\right)$ *si r est impair, en théorie* Ω_*^u (*resp.* Ω_*^{So} *ou* Ω_*^{Spin}).

Il suffit en effet d'appliquer le corollaire (B_2).

Indépendamment des résultats ci-dessus, signalons aussi le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Pour tout* Π-*module complexe* $\sigma : \Pi \to U(l)$ *tel que l'action de* Π *sur* S^{2l-1} *soit libre,*

(i) S^{2l-1}/σ *est toujours une variété bord* (*sans aucune hypothèse supplémentaire en théorie* Ω_*^U, *si k est impair en théorie* Ω_*^{So}).

(ii) *Il n'existe pourtant aucune variété à bord* W_{2l} (*stablement presque complexe; resp. orientée*) *de bord* S^{2l-1}, *telle que l'on puisse prolonger l'action* σ *de* Π *sur* S^{2l-1} *en une action libre de* Π *sur* W_{2l} (*respectant la structure stablement presque complexe; resp. l'orientation*).

L'image réciproque du fibré tangent $T(S^{2l-1}/\sigma)$ par la projection $S^{2l-1} \to S^{2l-1}/\sigma$ est en effet égale au fibré stablement trivial $T(S^{2l-1})$. Il s'ensuit que les nombres caractéristiques de S^{2l-1}/σ sont tous nuls en cohomologie entière, et aussi en cohomologie modulo 2 si k est impair. La partie (i) en résulte.

Puisque $n\sigma$ opère librement sur S^{-2nl-1} pour tout entier $n \geq 1$, la suite d'injections canoniques $\mathbf{C}^{nl} \to \mathbf{C}^{(n+1)l}$ induit une suite de plongements de variétés $S^{2nl-1}/n\sigma \to S^{2(n+1)l-1}/(n+1)\sigma$, dont la limite inductive peut être prise pour B_Π. Il s'ensuit que la classe fondamentale de S^{2l-1}/σ a pour image, par le morphisme canonique

$$H_{2l-1}(S^{2l-1}/\sigma, \mathbf{Z}) \to H_{2l-1}(B_\Pi, \mathbf{Z}) \cong H^{2l}(\Pi, \mathbf{Z}),$$

un générateur maximal de $H^{2l}(\Pi, \mathbf{Z})$, lequel n'est pas nul. Puisque

$$\mu([S^{2l-1}, \sigma]) \neq 0,$$

c'est que $[S^{2l-1}, \sigma]$ n'est pas nul dans $\tilde{\Omega}_{2l-1}(B_\Pi)$, d'où la partie (ii).

5. Remarques sur la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de B_Π.

Pour tout CW-complexe et toute théorie réduite h, définie sur les CW-complexes, on considère la suite spectrale de (X, h) associée au couple exact

$$\begin{tikzcd} h^*(X_p) \arrow[r] & h^*(X_{p-1}) \arrow[dl, "\partial"] \\ E_1^{p,*}(X, h) = h^*(X_p/X_{p-1}) \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd} h_*(X_{p-1}) \arrow[r] & h_*(X_p) \arrow[dl] \\ E^1_{p,*}(X, h) = h_*(X_p/X_{p-1}) \arrow[u, "\partial"] & \end{tikzcd}\right).$$

Si X n'a qu'un nombre fini de cellules en chaque dimension, ou si h vérifie l'axiome d'additivité de Milnor, on a

$$E_2^{p,q}(X, h) = \tilde{H}^p(X, h^q(S^0)) \qquad [\text{resp. } E^2_{p,q}(X, h) = \tilde{H}_p(X, h_q(S^0))].$$

Voici deux critères permettant d'affirmer que la suite spectrale de (X, h) converge vers $h(X)$:

CRITÈRE 1 (J. MOORE [11]). — *Supposons que h^* (resp. h_*) vérifie l'axiome de Milnor. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il n'y ait qu'un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ tels que $p + q = n$ et $E_r^{p,q}(X, h) \neq 0$ [resp. $E^r_{p,q}(X, h) \neq 0$], la suite spectrale de (X, h) converge alors vers $h(X)$.*

Ainsi que me l'a fait remarquer M. ZISMAN, il se peut que h^* vérifie l'axiome de Milnor sans qu'il en soit de même pour $h^* \otimes \mathbf{Z}[1/2]$. On a, toutefois, le deuxième critère.

CRITÈRE 2. — *Si la suite spectrale de (X, h) converge vers $h(X)$, et si Λ est un groupe sans torsion, la suite spectrale de $\left(X, h \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \Lambda\right)$ converge vers $h(X) \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \Lambda$.*

Remarque. — Pour tout CW-complexe, et pour toute théorie de *bordisme*, les hypothèses du critère de Moore sont satisfaites; il n'en est pas de même en cobordisme ou en K-théorie.

Puisque E_Π est contractile et que la théorie h est réduite, on a

$$h^*(B_\Pi) = \operatorname{Ker}(h^*(B_\Pi) \to h^*(E_\Pi))$$
$$(\text{resp. } h_*(B_\Pi) = \operatorname{Coker}(h_*(E_\Pi) \to h_*(B_\Pi))).$$

Par ailleurs, on sait déjà que $\tilde{H}(B_\Pi)$ ne contient que de la k-torsion (cohomologie ou homologie ordinaire à coefficients dans un groupe arbitraire), et que $h_*(B_\Pi)$ ne contient que de la $\tilde{k}$-torsion pourvu que h_* vérifie l'axiome de Milnor [corollaire (A_2)].

Je ne sais pas généraliser aux CW-complexes infinis la suite spectrale des revêtements utilisée au lemme (A). Toutefois, pour $X = X_{r'}(\Pi)$, on peut démontrer la conclusion du lemme (A) en ne se servant que de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch. On démontre ainsi le lemme ci-dessous :

LEMME (A′). — *Si la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de* (B_Π, h) *converge vers* $h(B_\Pi)$, $h(B_\Pi)$ *ne contient que de la* $\hat{k}$*-torsion en général, que de la k-torsion en cohomologie ou homologie ordinaire, et est nul si* $h(S^0)$ *est un* $\mathbf{Z}[1/k]$*-module.*

En effet, si $h^*(S^0)$ est un $\mathbf{Z}[1/k]$-module, le groupe

$$E_2^{p,q}(B_\Pi, h) = \tilde{H}^p(\Pi, h^q(S^0))$$

est nul (c'est un $\mathbf{Z}[1/k]$-module, annulé par k). On en déduit que $h(B_\Pi) = 0$.

Dans le cas général, on obtient une nouvelle théorie de cohomologie généralisée en posant $\bar{h}^*(X) = h^*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/k]$ ($\mathbf{Z}[1/k]$ est $\mathbf{Z}$-plat, car sans torsion); il est clair que $\bar{h}^*(S^0)$ est un $\mathbf{Z}[1/k]$-module. Par conséquent,

$$h^*(B_\Pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/k] = 0.$$

C'est dire que $h^*(B_\Pi)$ ne contient que de la $\hat{k}$-torsion.

En homologie, la démonstration est analogue.

LEMME (B′). — *Supposons que la suite spectrale de* (B_Π, h) *converge vers* $h(B_\Pi)$. *Si, en outre,*

(i) $H^{\text{impair}}(\Pi, h^*(S^0)) = 0$ [*resp.* $\tilde{H}_{\text{pair}}(\Pi, h_*(S^0)) = 0$];

(ii) $\tilde{H}^{\text{pair}}(\Pi, h^{\text{impair}}(S^0)) = 0$ [*resp.* $H_{\text{impair}}(\Pi, h_{\text{impair}}(S^0)) = 0$],

alors :

$$\begin{cases} G_* h^{2s}(B_\Pi) = \bigoplus_i H^{2i}(\Pi, h^{2(s-i)}(S^0)), \\ h^{\text{impair}}(B_\Pi) = 0 \end{cases}$$

$$\text{[resp.} \begin{cases} G_* h_{2s+1}(B_\Pi) = \bigoplus_i H_{2i+1}(\Pi, h_{2(s-i)}(S^0)), \\ h_{\text{pair}}(B_\Pi) = 0]. \end{cases}$$

La vérification de ce lemme est immédiate. Notons que l'hypothèse de convergence implique que la somme directe égale à $G_* h^{2s}(B_\Pi)$ [resp. $G_* h_{2s+1}(B_\Pi)$] ne contient qu'un nombre fini de facteurs non nuls.

Le théorème 7 (§ 4) est en fait un cas particulier du lemme (B′).

Les lemmes (A′) et (B′) permettent aussi de généraliser les conclusions du théorème 1 au cas d'un fibré $P \to X$ dont la base est un CW-complexe infini, pourvu que la suite spectrale de (B_Π, h) converge.

P. LANDWEBER m'a signalé que R. SWAN a démontré le résultat suivant : les seuls groupes finis Π vérifiant $H^{\text{impair}}(\Pi, \mathbf{Z}) = 0$ sont les groupes à cohomologie périodique (*).