BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL ENGUEHARD

Une caractérisation des groupes π-résolubles

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 297-303
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__297_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 297 à 303.

UNE CARACTÉRISATION DES GROUPES π-RÉSOLUBLES

PAR

MICHEL ENGUEHARD.

Les groupes finis résolubles ont été caractérisés par P. HALL [6], [7], comme les groupes finis G qui, pour tout nombre premier p, admettent un sous-groupe dont l'indice dans G est égal à l'ordre d'un p-groupe de Sylow de G. Nous caractérisons ici les groupes finis π-résolubles par des conditions analogues [existence de certains « sous-groupes de Hall » dans G (§ 4, th. 4)].

Le paragraphe 1 est consacré à quelques notations et définitions et le paragraphe 2 à l'énoncé des prinipaux résultats utilisés. Le cas où 2 n'est pas élément de π est traité au paragraphe 3, en employant les méthodes de [7] et un résultat de GLAUBERMAN ([4], chap. VIII). Dans le cas où 2 est élément de π, il ne semble pas que le théorème de Glauberman permette de conclure aussi facilement. Mais il est clair qu'alors, en raison de la résolubilité des groupes finis d'ordre impair [3], les groupes finis π-résolubles ne se distinguent pas des groupes finis résolubles. Utilisant ce fait, il est possible de réduire le nombre de conditions de Hall, suffisantes pour qu'un groupe fini soit résoluble (§ 4, th. 2), et de démontrer que les conditions de π-résolubilité obtenues au paragraphe 3 sont également suffisantes si 2 est élément de π (§ 4, th. 3 et 4).

1. Notations et définitions.

Si H est un sous-groupe du groupe G, nous désignerons par $C_G(H)$ le centralisateur de H dans G, par $N_G(H)$ le normalisateur de H dans G, et par $Z(H)$ le centre de H.

La lettre π désignera toujours un ensemble de nombres premiers (1 n'est pas considéré comme un nombre premier). Le complémentaire de π dans l'ensemble de tous les nombres premiers est noté π'. Par abus, si p est un nombre premier, p' désigne l'ensemble des nombres premiers distincts de p.

Soit G un groupe fini. Nous dirons que G est un π-groupe si tout nombre premier, divisant l'ordre de G, appartient à π. Un sous-groupe L de G est dit π-groupe de Hall de G si L est un π-groupe dont l'indice dans G n'est divisible par aucun élément de π.

La proposition « G contient au moins un π-groupe de Hall » est notée $E_\pi(G)$. La proposition « G contient au moins un π-groupe de Hall S et si H est un sous-groupe de G et un π-groupe, S contient un conjugué de H dans G » est notée $D_\pi(G)$.

Un groupe fini G sera dit π-résoluble si tout facteur de Jordan-Hölder de G est soit un π'-groupe, soit un p-groupe, p étant un élément de π.

L'ensemble des éléments de π, qui divisent l'ordre d'un groupe fini G, est noté $\pi(G)$. Le plus grand sous-groupe normal de G qui soit un π-groupe est noté $O_\pi(G)$. Si σ est comme π un ensemble de nombres premiers, $O_{\pi,\sigma}(G)$ est défini par

$$O_{\pi,\sigma}(G)/O_\pi(G) = O_\sigma(G/O_\pi(G)).$$

Les notions suivantes sont utilisées dans la démonstration du théorème de Glauberman (2.5) (*cf.* [3], chap. VIII, § 6) :

Un groupe fini G est dit p-contraint si le centralisateur dans G d'un p-groupe de Sylow de $O_{p',p}(G)$ est contenu dans $O_{p',p}(G)$. Un groupe fini G est dit p-stable si, quels que soient un p-sous-groupe P de G et un p-sous-groupe A de $N_G(P)$, la condition $[[P, A], A] = 1$ implique

$$A\,.\,C_G(P)/C_G(G) \subset O_p(N_G(P)/C_G(P)).$$

Tous les groupes envisagés seront supposés d'ordre fini.

2. **Résultats utilisés.**

(2.1) *Si G est un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G d'indices premiers entre eux, $G = H_1H_2$, et l'ordre de $H_1 \cap H_2$ est le plus grand commun diviseur des ordres de H_1 et H_2. Si $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont des sous-groupes de G d'indices premiers entre eux deux à deux, l'ordre de leur intersection est le plus grand commun diviseur de leurs ordres; en particulier, si, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, H_i est un π_i-groupe de Hall de G, les ensembles de nombres premiers π_i vérifiant les relations*

$$\pi_i'(G) \cap \pi_j'(G) = \emptyset \qquad si \quad i \neq j,$$

l'intersection des H_i est un π-groupe de Hall de G, π étant l'intersection des π_i.

Démonstration. — La première assertion est élémentaire et bien connue (*cf.* [5], th. 1.5.6). La généralisation au cas de n sous-groupes est immédiate. Enfin si H est un π-groupe de Hall de G, l'indice de H

dans G est le produit des contributions des éléments de $\pi'(G)$ à l'ordre de G. Il en résulte que si H_i est un π_i-groupe de Hall de G et H_j un π_j-groupe de Hall de G, les indices de H_i et H_j sont premiers entre eux si, et seulement si

$$\pi'_i(G) \cap \pi'_j(G) = \emptyset.$$

(2.2) *Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G tels que $G = H.K$. Si $H \cap K$ contient un sous-groupe R normal dans H, K contient un sous-groupe S normal dans G et contenant R.*

Démonstration (*cf.* [7]). — Le plus petit sous-groupe normal de G contenant R est engendré par l'ensemble des conjugués de R dans G. Comme $G = H.K$, un élément quelconque g de G est de la forme $h.k$, où $h \in H$ et $k \in K$. Alors $R^g = R^{h.k} = (R^h)^k = R^k$, car h normalise R. Mais R est contenu dans K, et tout conjugué de R est contenu dans K. Le sous-groupe normal de G, engendré par R et ses conjugués, est donc contenu dans K.

C. Q. F. D.

(2.3) (BURNSIDE) *Si G est un groupe dont l'ordre n'est pas divisible par plus de deux nombres premiers distincts, G est résoluble.*

(2.4) *Si G est un groupe π-résoluble et H un sous-groupe de G, H est π-résoluble. Si H est un sous-groupe normal du groupe G tel que H et G/H soient π-résolubles, G est π-résoluble.*

(2.5) (GLAUBERMAN) *Soient p un nombre premier impair, G un groupe p-résoluble, d'ordre impair si $p = 3$, et tel que $O_p(G) \neq 1$. Soient P un p-groupe de Sylow de G, $J(P)$ le sous-groupe caractéristique de P engendré par les sous-groupes abéliens d'ordre maximal de P. Alors*

$$G = O_{p'}(G).N_G(Z(J(P))).$$

En effet, d'après un théorème de Glauberman ([4], chap. VIII, th. 2.11) l'égalité est vraie sous les hypothèses « p impair, $O_p(G) \neq 1$, G est p-stable et p-contraint ». Or, dans ces conditions, un groupe p-résoluble est p-contraint ([4], chap. VI, th. 3.3). Si, en outre, aucun sous-groupe de G n'a d'image homomorphe au groupe spécial linéaire en dimension 2 sur le corps à p éléments $SL(2, p)$, G est aussi p-stable ([4], chap. VI, th. 5.3). Si p est différent de 3, $SL(2, p)$ n'est pas p-résoluble tandis que tout sous-groupe de G l'est d'après (2.4). Si $p = 3$, G est supposé d'ordre impair. Dans tous les cas, G est p-stable.

(2.6) *Si G est π-résoluble, et si $\sigma \subset \pi$, $D_{\sigma'}(G)$ est vraie.*

Ce théorème est dû à CUNIHIN [2], et est également démontré par P. HALL [8] (th. D. 7*). Le résultat suivant a lui aussi été obtenu par

Cunihin sous des hypothèses légèrement plus fortes [1] (th. XII). Sous les hypothèses énoncées ici, il est dû à P. Hall [8] (corollaire D.5.2) :

(2.7) *Soit G un groupe, et soit π un ensemble de nombre premiers tel que l'ordre d'un facteur de Jordan-Hölder de G soit divisible par au plus un élément de π. Alors $D_\pi(G)$ est vraie.*

(2.8) (Feit-Thompson) *Tout groupe d'ordre impair est résoluble.*

3. Premier cas : tout élément de π est impair.

Théorème 1. — *Soit π un ensemble de nombres premiers impairs. Soit Σ_π l'ensemble $\{\sigma; \sigma$ est un ensemble de nombres premiers et $\sigma = \pi$, ou $\sigma = p'$ et $p \in \pi$, ou $\sigma = \pi \cup \{q\}$ et $q \in \pi'\}$.*

Pour qu'un groupe G soit π-résoluble, il faut et il suffit que $E_\sigma(G)$ soit vraie quel que soit σ dans Σ_π.

Démonstration :

(3.1) Que la condition énoncée soit nécessaire résulte de (2.6) pour les ensembles p' (où $p \in \pi$) et de (2.7) pour les ensembles π ou $\pi \cup \{q\}$ (où $q \in \pi'$).

(3.2) Si H est un sous-groupe normal de G et si S est un σ-groupe de Hall de G, $S \cap H$ est un σ-groupe de Hall de H et $S.H/H$ est un σ-groupe de Hall de G/H. Les conditions du théorème 1 passent donc aux sous-groupes normaux comme aux groupes quotients, et nous démontrerons que ces conditions sont suffisantes par récurrence sur l'ordre de G.

(3.3) Traitons d'abord le cas $\pi(G) = \{p\}$, c'est-à-dire en fait celui des groupes p-résolubles. Si G est un p-groupe ou un p'-groupe il n'y a rien à démontrer. Sinon, soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les éléments de $p'(G)$. Par hypothèse, G admet un p'-groupe de Hall et, pour $i = 1, \ldots, n$, un $\{p, q_i\}$-groupe de Hall H_i. Soit P un p-groupe de Sylow de G; comme H_i contient un p-groupe de Sylow de G, conjugué de P, on peut supposer qu'après substitution à H_i d'un conjugué convenable, P est contenu dans H_i, et ceci pour tout i.

(a) S'il existe un i tel que $O_{q_i}(H_i) \neq 1$, soit Q_0 un q_i-groupe de Sylow de H_i, donc de G. Il est clair que Q_0 contient $Q_i = O_{q_i}(H_i)$, et qu'il existe un p'-groupe de Hall de G, soit H, contenant Q_0 et Q_i. D'après (2.1), $G = H_i.H$. Les hypothèses de (2.2) sont satisfaites en remplaçant, dans (2.2), H par H_i, K par H et R par Q_i. Il existe donc un sous-groupe Q de G, normal dans G, contenant Q_i et contenu dans H. Ce groupe Q est un p'-groupe non trivial et est p-résoluble. Le quotient est aussi p-résoluble en raison de (3.2) et de l'hypothèse d'induction. Il résulte alors de (2.4) que G est aussi p-résoluble.

(*b*) Si, pour tout i, $O_{q_i}(H_i) = 1$, comme H_i est résoluble d'après (2.3), $O_p(H) \neq 1$. Soit $Z(J(P))$ le p-groupe non trivial défini en (2.5), et soit N son normalisateur dans G. Si $p \neq 3$, ou si $p = 3$ et H_i est d'ordre impair, N contient H_i d'après (2.3). Donc ou bien $N \supset H_i$ quel que soit i, ou bien N contient tous les H_i sauf un, celui pour lequel $q_i = 2$, et $p = 3$. Dans le premier cas, $Z(J(P))$ est normal dans G, car les H_i engendrent G. Dans le second cas, N contient P et un q_i-groupe de Sylow de G pour tout i sauf pour $q_i = 2$. L'indice de N dans G est donc une puissance de 2. Soit alors D un $\{p, 2\}$-groupe de Hall de G contenant P. Il résulte de (2.1) que $G = N.D$. Les hypothèses de (2.2) sont satisfaites avec N au lieu de H, D au lieu de K et $Z(J(P))$ au lieu de R. Il existe donc un sous-groupe S de D, normal dans G et contenant $Z(J(P))$.

Dans les deux cas, G contient un sous-groupe normal non trivial et résoluble [$Z(J(P))$ ou S]. Le quotient est p-résoluble d'après l'hypothèse de récurrence et (3.2), et G est donc lui-même p-résoluble.

(3.4) Supposons maintenant que $\pi(G)$ contienne au moins deux éléments. Soit p_1 l'un d'eux. Il existe dans G un p'-groupe de Hall, soit H, d'ordre inférieur à celui de G, et on voit par (2.1) que H satisfait aux conditions du théorème 1 :

un π-groupe de Hall s'obtient par intersection avec un π-groupe de Hall de G; si $p \neq p_1$, un p'-groupe de Hall de H s'obtient par intersection avec un p'-groupe de Hall de G, etc.

Le groupe H est donc π-résoluble, et il admet un sous-groupe normal non trivial R tel que R soit un π'-groupe ou un p-groupe avec $p \in \pi$.

(*a*) *Si R est un π'-groupe :* Soit p_2 un élément de π, distinct de p_1, et soit K un p'_2-groupe de Hall de G. Tout comme H, K est π-résoluble et $G = H.K$ [*cf.* (2.1)]. L'intersection d'une famille complète de p'-groupes de Hall de G, p parcourant π, famille sans répétition et contenant H et K, est un π'-groupe de Hall de G d'après (2.1), et aussi un π'-groupe de H et de K, soit T. Comme R est normal dans H, $R \subset T$. Les hypothèses de (2.2) sont encore satisfaites, et il existe un sous-groupe normal de G, non trivial, contenu dans K, soit S. Mais S est π-résoluble, car K l'est, et G/S est π-résoluble par induction. Le groupe G est donc π-résoluble.

(*b*) *Si R est un p-groupe et $p \in \pi$:* Comme $\pi \in \Sigma_\pi$, il existe un π-groupe de Hall K dans G, et les théorèmes de Sylow permettent de supposer que K contient R. L'indice de K dans G est premier à p_1, donc, selon (2.1), $G = H.K$. Encore une fois les hypothèses de (2.2) sont satisfaites : K contient un sous-groupe S normal dans G et contenant R. Les hypothèses du théorème sont satisfaites par S et G/S qui sont tous deux d'ordre strictement inférieur à l'ordre de G. Ces deux groupes sont π-résolubles, donc G aussi, et le théorème 1 est démontré.

4. Second cas : groupes résolubles.

THÉORÈME 2. — *Soit G un groupe fini. S'il existe dans G un $2'$-groupe de Hall et un $\{2, p\}$-groupe de Hall pour tout nombre premier impair p, G est résoluble.*

Démonstration. — La démonstration utilise (2.8) :

Nous procéderons par récurrence sur l'ordre de G. Si G est d'ordre impair, G est résoluble. Sinon, soit H un $2'$-groupe de Hall de G : H est résoluble. Si H est trivial, G est un 2-groupe, donc résoluble. Sinon il existe un premier p, tel que H admette un p-sous-groupe normal non trivial R. Soit K un $\{2, p\}$-groupe de Hall de G. Comme K contient un p-groupe de Sylow de G, on peut supposer que K contient R, après avoir remplacé K par un conjugué convenable. Encore une fois, (2.2) permet d'affirmer l'existence d'un sous-groupe normal S de G contenu dans K et contenant R. Comme K est résoluble, d'après le théorème de Burnside, R aussi. Il résulte de l'alinéa 3.2 que G/S satisfait aux hypothèses du théorème 2 et est donc résoluble. Ainsi G est résoluble, et le théorème 2 est démontré.

THÉORÈME 3. — *Soit π un ensemble de nombres premiers contenant 2. Soit Σ_π défini comme au théorème* 1. *Un groupe G est résoluble si, et seulement si, $E_\sigma(G)$ est vraie pour tout σ dans Σ_π.*

Ce théorème contient le précédent, et donne une infinité de conditions équivalentes caractérisant les groupes résolubles. Il se démontre comme le théorème 1, tout ce qui est affirmé en (3.1), (3.2) et (3.4) étant vrai quel que soit π; le théorème 2 se substitue à (3.3), et on obtient donc une caractérisation des groupes π-résolubles, c'est-à-dire des résolubles, puisque $2 \in \pi$.

L'énoncé suivant n'est qu'une redite des théorèmes 1 et 3, masquant sous de mêmes apparences des situations très différentes....

THÉORÈME 4. — *Soit π un ensemble de nombres premiers. Soit Σ_π défini comme au théorème* 1. *Pour qu'un groupe G soit π-résoluble, il faut et il suffit que $E_\sigma(G)$ soit vraie quel que soit Σ_π.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CUNIHIN (S. A.). — Sur les π-propriétés des groupes finis [en russe], *Mat. Sbornik*, N.S., t. 67, 1949, p. 321-346.

[2] CUNIHIN (S. A.). — Sur les propriétés des groupes finis de Sylow [en russe], *Doklady Akad. Nauk SSSR.*, N.S., t. 73, 1950, p. 29-32.

[3] FEIT (W.) and THOMPSON (J. G.). — Solvability of groups of odd order, *Pacific* *J. of Math.*, t. 13, 1963, p. 775-1029.

[4] GORENSTEIN (D.). — *Finite groups*. — New-York, Harper and Row, 1968 (*Harper's Series in modern mathematics*).

[5] HALL (M.). — *The theory of groups*. — New-York, Mac Millan, 1959.

[6] HALL (P.). — A note on soluble groups, *J. London math. Soc.*, t. 3, 1928, p. 98-105.

[7] HALL (P.). — A characteristic property of soluble groups, *J. London math. Soc.*, t. 12, 1937, p. 198-200.

[8] HALL (P.). — Theorems like Sylow's, *Proc. London math. Soc.*, t. 6, 1956, p. 286-304.

(Texte reçu le 11 février 1970.)

Michel ENGUEHARD,
4, rue Jean-Mermoz,
94-Le Kremlin-Bicêtre.