BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur le mouvement d'une droite

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 114-117

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__114_1>

Sur le mouvement d'une droite; par M. HALPHEN.

(Séance du 19 février 1873)

M. Mannheim a trouvé cette remarquable propriété que, *si quatre points d'une droite se meuvent dans des plans, tous les points de la droite décrivent des ellipses.*

Je me propose de faire connaître quelques autres propriétés de ce mouvement.

Étant donnés cinq plans $P_1, \ldots, P_5$ et une droite D, il est facile de voir qu'il existe une développable du quatrième degré et de la troisième classe tangente à ces plans et bitangente à la droite, et qu'il n'en existe qu'une. Soit S cette surface. Par chaque point, on peut lui mener trois plans tangents, et, par suite, trois droites bitangentes. Par suite aussi, par chaque point d'une bitangente à cette surface, passe un seul plan tangent à S, qui ne contienne pas cette bitangente. Donc tous les plans tangents divisent homographiquement les bitangentes de la surface.

La congruence formée par ces bitangentes contient toutes les droites qui sont partagées par les cinq plans homographiquement à la droite D. Car on voit aisément que, par un point d'un de ces plans, on ne peut mener qu'une seule droite satisfaisant à cette condition et non contenue dans ce plan ; et que, par le même point, ne passe aussi qu'une seule bitangente à S non contenue dans ce même plan. Ces deux droites coïncident donc. Par suite :

Théorème I. — *Les droites, qui sont partagées par cinq plans donnés homographiquement à une droite donnée, forment une congruence dont la focale est une surface développable du quatrième degré et de la troisième classe. Tous les plans tangents de cette surface divisent homographiquement toutes les droites de la congruence.*

En particulier, si l'un des plans, P_5, est à l'infini, la congruence est formée des droites divisées par quatre plans donnés semblablement à une droite donnée, et l'on voit que tous les points homologues d'un même point de la droite donnée sont dans un même plan.

Si, parmi les droites de cette dernière congruence, on choisit celles qui sont divisées en parties égales à celles de D, ces droites forment une surface, qui est celle engendrée par une droite dont quatre points se meuvent dans quatre plans. Le théorème I nous apprend que, dans ce cas, chaque point se meut également dans un plan. Parvenu à ce résultat par d'autres considérations, M. Mannheim, s'appuyant alors sur un théorème de Dupin, en conclut que chaque point décrit une ellipse. Je vais démontrer la même proposition sans avoir recours au théorème de Dupin.

Revenons à la première congruence considérée. Les droites qui la constituent déterminent une correspondance point à point entre deux plans tangents quelconques de la surface focale S, en sorte qu'à une droite d'un de ces plans correspond une droite dans chacun des autres. Si, dans un de ces plans, P_1, on considère une droite L_1, les droites de la congruence, qui rencontrent L_1 et ne sont pas dans le plan P_1, forment un hyperboloïde tangent à chaque plan P. Les droites qui correspondent à L_1 dans le plan P sont les génératrices rectilignes d'un système. Les droites de la congruence sont celles de l'autre système. Deux hyperboloïdes, déterminés par deux droites L_1, L'_1 du plan P_1, se coupent suivant la droite de la congruence qui passe au point commun à ces deux droites et n'est pas située dans le plan P_1.

Il est facile de déterminer la seconde droite suivant laquelle le plan P_1 coupe l'hyperboloïde déterminé par L_1. Cette droite passe par un point de L_1 où deux des trois plans tangents à S se confondent avec P_1. C'est le point où L_1 rencontre la génératrice rectiligne T_1 de la surface S, suivant laquelle le plan P_1 touche cette surface. Le même plan coupe S, en outre, suivant une conique C_1 tangente à T_1. La droite cherchée est donc l'autre tangente à C_1, issue du point commun à L_1 et à T_1. Il en est de même dans chaque plan P. Il coupe l'hyperboloïde suivant deux droites, l'une L, et l'autre tangente à la conique C et passant au point de rencontre de L et de T.

Supposons de nouveau que le plan P_5 soit à l'infini. L'hyperboloïde considéré devient un paraboloïde. Les deux droites de ce paraboloïde, contenues dans le plan P_5, se coupent sur la droite T_5. Donc :

THÉORÈME II. — *Tous les paraboloïdes contenus dans la congruence des droites divisées par quatre plans semblablement à une droite donnée sont tels que, pour chacun d'eux, l'intersection des plans directeurs est parallèle à un plan fixe.*

Par un point O menons des parallèles aux génératrices d'un de ces paraboloïdes, et portons sur ces droites des longueurs OM égales aux segments interceptés sur les génératrices par deux plans P, et de même sens. On voit immédiatement que le lieu des points M est une droite parallèle à l'intersection des plans directeurs. Si l'on prend un autre paraboloïde et qu'on fasse la même construction, on obtiendra une autre droite, qui rencontrera la précédente, attendu que les deux paraboloïdes ont une génératrice commune. Donc le plan de ces deux droites est parallèle au plan fixe défini dans le dernier théorème. Donc :

THÉORÈME III. — *Si l'on transporte parallèlement à elles-mêmes toutes les droites de la congruence, en réunissant en un même point tous les homologues d'un certain point, les homologues de tout autre point sont dans un même plan de direction constante.*

Dans la nouvelle figure ainsi formée, une série de plans Q parallèles entre eux correspondent un à un aux plans P de la première. Les droites de la congruence considérée et les droites menés par le point O se correspondent une à une, et déterminent sur deux plans P, Q correspondants une correspondance point à point ; de sorte que deux courbes correspondantes sur ces deux plans sont du même degré. On voit aussi très-aisément que les droites à l'infini de ces deux plans se correspondent, en sorte que les asymptotes de deux courbes correspondantes sont des droites homologues. Il en résulte immédiatement que les points de concours des asymptotes des courbes tracées sur les plans P, et qui correspondent à une courbe tracée sur l'un d'eux, décrivent des droites de la congruence. Si ce sont des coniques, leurs centres sont en ligne droite.

Les droites de la congruence, pour lesquelles les segments compris entre deux plans P sont égaux, sont parallèles à des droites issues de O et formant un cône de révolution, dont l'axe est perpendiculaire aux plans Q. Ce cône est coupé par chaque plan Q suivant un cercle. A chacun de ces cercles répond, dans chaque plan P, une conique. Le lieu des centres de ces coniques est la droite de la congruence qui est parallèle à l'axe du cône ; cette droite est, par suite, la droite de la congruence sur laquelle les plans

P interceptent les plus petits segments. On peut donc compléter le théorème de M. Mannheim de la manière suivante :

Théorème IV. — *Si deux droites sont partagées par quatre plans en segments proportionnels, et qu'on les fasse mouvoir toutes deux de manière que les extrémités de ces segments restent dans les plans donnés : 1° tous leurs points décrivent des ellipses ; 2° les ellipses décrites par deux points homologues sont dans le même plan, concentriques et homothétiques ; 3° le lieu des centres de ces ellipses est la droite unique partagée par les plans donnés en segments proportionnels à ceux des droites données et les plus petits possible ; 4° chacune des deux droites fait, dans son mouvement, un angle constant avec cette ligne des centres.*