BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE F. JURIE

Anneaux monadiques libres. Hémimorphismes unitaires libres

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 33-46

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__33_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 33 à 46.

ANNEAUX MONADIQUES LIBRES. HÉMIMORPHISMES UNITAIRES LIBRES

PAR

PIERRE F. JURIE.

Nous nous proposons ici de construire et de caractériser de manière intrinsèque, les solutions de certains problèmes universels définis dans le contexte de l'algèbre monadique de Halmos.

Notre terminologie et nos notations seront celles de l'ouvrage de Halmos [2]. La notion centrale de notre travail est celle d'hémimorphisme. Rappelons qu'un hémimorphisme est, selon [2], une application f d'un anneau booléien A dans un anneau booléien B telle que $f0 = 0$ et $f(p \vee q) = fp \vee fq$ pour tous p et q dans A. Nous qualifierons d'unitaire, tout hémimorphisme f tel que $f1 = 1$. Enfin 2 désignera l'anneau booléien réduit à deux éléments.

1. Superposition libre de deux hémimorphismes.

Nous considérerons dans cette partie deux hémimorphismes de même source $g : A \to B$ et $h : A \to C$.

DÉFINITION 1. — Nous disons qu'un couple d'homomorphismes booléiens $(u : B \to S,\ v : C \to S)$ *superpose* h *à* g, si, pour tout a dans A, on a $uga \leq vha$; et que le couple (u, v) est une superposition libre de h à g s'il superpose h à g et si, pour tout couple d'homomorphismes $(u' : B \to S',\ v' : C \to S')$ qui superpose h à g, il existe un unique homomorphisme w de S dans S' tel que $wu = u'$ et $wv = v'$. Remarquons que si (u', v') est lui aussi une superposition libre de h à g, w est un isomorphisme.

Le résultat suivant nous donne une construction d'une superposition libre de h à g.

THÉORÈME 1. — *Soit* $(B \overset{\beta}{\to} B \otimes C,\ C \overset{\gamma}{\to} B \otimes C)$ *la somme amalgamée des anneaux booléiens* B *et* C [4], *et soit* N *l'idéal de* $B \otimes C$ *engendré par*

$$\{\beta ga \wedge (1 + \gamma ha) : a \in A\}.$$

Le couple $(u : B \to B \otimes C/N,\ v : C \to B \otimes C/N)$, *déduit de* (β, γ) *par passage au quotient suivant* N, *est une superposition libre de* h *à* g.

Démonstration. — Soit θ la surjection canonique de $B \otimes C$ sur $B \otimes C/N$. Par hypothèse, $u = \theta\beta$ et $v = \theta\gamma$. On a donc, pour tout $a \in A$,

$$uga \wedge 1 + vha = \theta(\beta ga \wedge (1 + \gamma ha) = 0,$$

d'où $uga \leqq vha$. Donc (u, v) superpose h à g.

Soit, maintenant, $(u' : B \to S',\ v' : C \to S')$ un couple d'homomorphismes superposant h à g. Par définition de la somme amalgamée, il existe un homomorphisme θ' de $B \otimes C$ dans S' tel que $u' = \theta'\beta$ et $v' = \theta'\gamma$. On a, pour tout $a \in A$,

$$\theta'(\beta ga \wedge (1 + \gamma ha)) = u'ga \wedge (1 + v'ha) = 0.$$

Le noyau de θ' contient donc l'idéal N; par suite, il existe un homomorphisme w de $B \otimes C/N$ dans S' tel que $\theta' = w\theta$. D'où $u' = wu$ et $v' = wv$.

On sait [4] que $\beta B \cup \gamma C$ engendre $B \otimes C$. Donc $uB \cup vC$ engendre $B \otimes C/N$. Si w et $\bar{w}$ sont deux homomorphismes de $B \otimes C/N$ dans S' tels que $wu = \bar{w}u = u'$ et $wv = \bar{w}v = v'$, w et $\bar{w}$ coïncident sur $uB \cup vC$. Donc, d'après ce qui précède, $w = \bar{w}$. Le couple (u, v) est donc bien une superposition libre de h à g.

Remarquons que si f est un homomorphisme d'un anneau booléien D dans un anneau booléien D', et k un hémimorphisme unitaire de D dans D', tels que, pour tout $a \in D$, $ka \leqq fa$, on a $k = f$. En effet, pour tout $a \in A$, on a les inégalités

$$1 + ka \leqq k(1 + a) \leqq f(1 + a) \leqq 1 + fa,$$

et donc $fa \leqq ka$.

Il résulte de cette remarque que, quand h est un homomorphisme et $g1 = 1$, le couple (u, v) superpose h à g si et seulement si $ug = vh$. D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Si* h *et* g *sont des homomorphismes, la superposition libre de* h *à* g, *celle de* g *à* h *et la somme amalgamée du couple d'homomorphismes* (g, h) *sont identiques.*

Comme pour la somme amalgamée d'un couple d'homomorphismes booléiens [4], on peut donner une caractérisation intrinsèque de la superposition libre de deux hémimorphismes.

THÉORÈME 2. — *Un couple d'homomorphismes* $(u : B \to S,\ v : C \to S)$ *est une superposition libre de* h *à* g *si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :*

(1) *S est engendré par $uB \cup vC$;*

(2) *Pour tout couple $(b, c) \in B \times C$, l'inégalité*

(i) $ub \leqq vc$

est équivalente à la condition

(ii) *Il existe un entier n et une suite $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A tels que*

$$b \leqq \bigwedge_{j=1}^{n} ga_j \qquad \text{et} \qquad \bigwedge_{j=1}^{n} ha_j \leqq c.$$

Remarque. — Lorsque g est un homomorphisme, la condition (ii) est équivalente à la suivante :

(iii) *Il existe a dans A tel que $b \leqq ga$ et $ha \leqq c$.*

En effet : Il est évident que (iii) implique (ii). D'autre part, pour tout $(b, c) \in B \times C$ tel que (ii), on a

$$b \leqq \bigwedge_j ga_j \leqq g\Big(\bigwedge_j a_j\Big),$$

et,

$$h\Big(\bigwedge_j a_j\Big) \leqq \bigwedge_j ha_j \leqq c,$$

donc, dans ce cas, (ii) entraîne (iii).

Démonstration du théorème 2. — Supposons d'abord que (u, v) soit une superposition libre de h à g. Soit S' le sous-anneau de S engendré par $uB \cup vC$, soit w' l'injection canonique de S' dans S, et soit $(u' : A \to S',\ v' : B \to S')$ le couple d'homomorphismes tel que $w'u' = u$ et $w'v' = v$. Il est clair que (u', v') superpose h à g, donc il existe un homomorphisme w de S dans S' tel que $wu = u'$ et $wv = v'$. On a $w'wu = u$ et $w'wv = v$. Donc $w'w$ est l'identité sur S, ce qui montre que w' est surjectif. Donc $uB \cup vC$ engendre S.

Il est évident que, pour tout $(b, c) \in B \times C$, (ii) implique (i). Soit $(b, c) \in B \times C$ tel que (ii) soit fausse; alors l'idéal de C, engendré par

$$\{ 1 + ha : a \in A \text{ et } b \leqq ga \} \cup \{ c \}$$

est un idéal propre. Cet idéal est donc contenu dans un idéal maximal Q de C. Pour tout a dans A tel que $ha \in Q$, on a $b \not\leqq ga$, donc $ga \vee (1 + b) \neq 1$, et par suite l'idéal de B engendré par

$$\{ ga : a \in A \text{ et } ha \in Q \} \cup \{ 1 + b \}$$

est propre, il est donc contenu dans un idéal maximal P de B. Soit $p : B \to 2$ et $q : C \to 2$, les homomorphismes de noyaux respectifs P et Q. Pour tout a de A, $qha = 0$ implique $ha \in Q$, donc $ga \in P$, et $pga = 0$. On a donc, pour tout a de A, $pga \leqq qha$. Par suite, il existe un homomorphisme w de S dans 2, tel que $wub = pb = 1$ et $wvc = qc = 0$. D'où $ub \not\leqq vc$. On a ainsi montré que, pour tout $(b, c) \in B \times C$, (i) entraîne (ii).

Supposons maintenant que (u, v) vérifie les conditions (1) et (2) du théorème, et soit $(\bar{u} : B \to \bar{S}, \bar{v} : C \to \bar{S})$ une superposition libre de h à g. Pour tout $a \in A$, on a trivialement $ha \leqq ha$ et $ga \leqq ga$, donc, d'après (2), $uga \leqq vha$. Il existe donc un homomorphisme w de $\bar{S}$ dans S, tel que $w\bar{u} = u$ et $w\bar{v} = v$. On va montrer que (u, v) est une superposition libre de h à g, en prouvant que w est un isomorphisme. Il est clair que w est surjectif, car $uB \cup vC$ engendre S. D'autre part, il résulte de la première partie de la démonstration que $\bar{u}B \cup \bar{v}C$ engendre $\bar{S}$; donc le noyau de w est engendré par

$$\{\bar{u}b \wedge \bar{v}c : (b, c) \in B \times C \text{ et } ub \wedge vc = 0\}.$$

D'après (2), si un élément $\bar{u}b \wedge \bar{v}c$ appartient à cet ensemble, il existe une suite $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A, telle que

$$\bar{u}b \leqq \bigwedge_j \bar{u}ga_j \leqq \bigwedge_j \bar{v}ha_j \leqq 1 + \bar{v}c,$$

et par suite $\bar{u}b \wedge \bar{v}c = 0$. On voit donc que w est injectif. Ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. — *Si g est un homomorphisme et si (u, v) est une superposition libre de h à g, le noyau de u est engendré par*

$$\{ga : a \in A \text{ et } ha = 0\}$$

et celui de v par

$$\{1 + ha : a \in A \text{ et } ga = 1\}.$$

Si l'ensemble $h^{-1}(0)$ des éléments a de A tels que $ha = 0$, est réduit à 0, u est injectif. Si g est injectif et si $h1 = 1$, v est injectif.

Démonstration. — Supposons que g soit un homomorphisme et que (u, v) soit la superposition libre de h à g. D'après la remarque annexe au théorème précédent, pour tout b dans B tel que $ub = 0$, il existe un a dans A tel que $b \leqq ga$ et $ha = 0$. Ce qui montre que $\{ga : a \in A \text{ et } ha = 0\}$ engendre le noyau de u. De même, si c est un élément de C tel que $vc = 0$, on a $u1 \leqq v(1 + c)$, et par suite, il existe a dans A tel que $1 = ga$ et $ha \leqq 1 + c$, donc $c \leqq 1 + ha$. D'où il résulte que $\{1 + ha : a \in A \text{ et } ga = 1\}$

engendre le noyau de v. Les deux dernières assertions du corollaire sont des conséquences immédiates de ce qui précède.

DÉFINITION 2. — Si $h : A \to C$ est un hémimorphisme tel que $h1 = 1$, nous appelons *centre* de h le plus grand sous-anneau T de A tel que la restriction de h à T soit un homomorphisme.

PROPOSITION 2. — *Soit $h : A \to C$ un hémimorphisme tel que $h1 = 1$. Le centre de h est l'ensemble*

$$T = \{ a \in A : h(1 + a) \wedge ha = 0 \}.$$

Démonstration. — Vérifions d'abord que T est un sous-anneau de A : Il est évident que si $a \in T$, on a encore $1 + a \in T$ et que $0 \in T$, car $h0 = 0$. Enfin, si a et b sont dans T, on a

$$h(a \wedge b) \wedge h(1 + (a \wedge b)) \leq (ha \wedge hb \wedge h(1 + a)) \vee (ha \wedge hb \wedge h(1 + b)) = 0,$$

donc $a \wedge b$ est aussi dans T. Donc T est bien un sous-anneau de A.

Pour tout a de A, on a

$$ha \vee h(1 + a) = h1 = 1,$$

donc

$$h(1 + a) \geq 1 + ha,$$

et donc, si $a \in T$,

$$h(1 + a) = 1 + ha.$$

D'où il résulte que la restriction de h à T est un homomorphisme. Donc T est contenu dans le centre de h. Par ailleurs, il est évident que le centre de h est contenu dans T. Donc T est le centre de h.

PROPOSITION 3. — *Le centre d'un quantificateur coïncide avec son image.*

Démonstration. — Soit $\exists : A \to A$ un quantificateur sur un anneau A, et soit C son centre. Puisque, pour tout x dans l'image $\exists A$ de $\exists$, on a $\exists x = x$, C contient $\exists A$. Réciproquement, pour tout a dans C, l'égalité suivante est vérifiée :

$$0 = \exists a \wedge \exists (1 + a) = \exists (\exists a \wedge 1 + a) = \exists a \wedge (1 + a),$$

d'où $\exists a = a$, et par suite a est dans $\exists A$. Donc C est contenu dans $\exists A$. On a donc bien $C = \exists A$.

PROPOSITION 4. — *Soit (u, v) une superposition libre de h à g. Si g est un homomorphisme injectif et si $h1 = 1$, les applications ug et vh coïncident sur le centre T de h, et*

$$uB \cap vC = ugT = vhT.$$

Démonstration. — Soit $T' = \{ a : a \in A$ et $uga = vha \}$.

Puisque ug est un homomorphisme, la restriction de vh à T' est un homomorphisme. Comme v est injectif (d'après le corollaire 1), il en est de même de la restriction de h à T'; donc T' est contenu dans T. Réciproquement, pour tout $a \in T$, on a $h(1 + a) \leqq 1 + ha$, donc,

$$1 + uga = ug(1 + a) \leqq vh(1 + a) \leqq 1 + vha,$$

d'où $vha \leqq uga$, par suite $vha = uga$, et $a \in T'$. Donc $T = T'$.

De ce qui précède, résulte immédiatement que

$$ugT = vhT = ugT \cap vhT \subset uB \cap vC.$$

Achevons la démonstration en montrant l'autre inclusion. Soit $x \in uB \cap vC$, il existe b dans B et c dans C tels que $x = ub = vc$. De l'inégalité $ub \leqq vc$, on déduit qu'il existe a dans A tel que $b \leqq ga$ et $ha \leqq c$, donc tel que

$$x = ub \leqq uga \leqq vha \leqq vc \leqq ub;$$

ce qui montre que x est dans $ugT \cap vhT$. D'où l'inclusion

$$uB \cap vC \subset ugT \cap vhT.$$

2. **Anneaux monadiques libres sur un hémimorphisme.**

Définition 3. — Soit h un hémimorphisme d'un anneau booléien A dans un anneau booléien C. Si $\exists$ est un quantificateur sur un anneau booléien S, si u est un homomorphisme de A dans S et v un homomorphisme de C dans S tels que $vC \subset \exists S$ et $\exists u = vh$, nous dirons que la suite $(S, \exists, u, v)$ est un *anneau monadique libre* sur h si la condition suivante est vérifiée :

Si $\exists'$ est un quantificateur sur un anneau booléien S', si u' est un homomorphisme de A dans S' et v' un homomorphisme de C dans S' tels que $v'C \subset \exists' S'$ et $\exists' u' = v'h$, il existe un unique homomorphisme f de S dans S' tel que

$$\exists' f = f \exists, \qquad fu = u' \qquad \text{et} \qquad fv = v'.$$

Remarquons encore que si $(S, \exists, u, v)$ et $(S', \exists', u', v')$ sont tous deux libres, l'homomorphisme f de S dans S' est un isomorphisme.

Nous allons construire, grâce à la notion de superposition libre, un anneau monadique libre sur l'hémimorphisme $h : A \to C$.

Considérons une superposition libre $(u : A \to S,\ v : C \to S)$ de l'hémimorphisme h à l'application identique de A. Remarquons que, dans ce cas particulier, la condition (iii) du théorème 2 précédent est équivalente, pour tout a dans A et tout c dans C, à l'inégalité $ha \leqq c$. Donc, d'après ce théorème, pour tout $(a, c) \in A \times C$, l'inégalité $ua \leqq vc$ est équivalente, ici, à $ha \leqq c$.

Le sous-anneau vC de S est relativement complet, i. e. pour tout x dans S, l'ensemble $S(x)$ défini par

$$S(x) = \{ vc : c \in C \text{ et } x \leqq vc \}$$

possède un plus petit élément. En effet, supposons tout d'abord que x soit de la forme $ua \wedge vc$, où a est dans A et c dans C; on a

$$ua \wedge vc \leqq vha \wedge vc = v(ha \wedge c)$$

et, pour tout c' dans C tel que $ua \wedge vc \leqq vc'$,

$$ua \leqq v((1 + c) \vee c'),$$

donc $ha \leqq (1 + c) \vee c'$ et $v(ha \wedge c) \leqq vc'$. Donc $v(ha \wedge c)$ est le plus petit élément de $S(x)$. Si x est, maintenant, un élément quelconque de S, puisque $uA \cup vC$ engendre S, il existe une suite $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de A et une suite $(c_1, \ldots, c_n)$ d'éléments de C tels que

$$x = \bigvee_{i=1}^{n} (ua_i \wedge vc_i).$$

Alors

$$S(x) = \bigcap_{i=1}^{n} S(ua_i \wedge vc_i),$$

donc, puisque pour tout i, $v(ha_i \wedge c_i)$ est le plus petit élément de $S(ua_i \wedge vc_i)$, $\bigvee_{i=1}^{n} v(ha_i \wedge c_i)$ est le plus petit élément de $S(x)$.

Comme vC est un sous-anneau de S relativement complet, il résulte immédiatement des théorèmes 4 et 5 de [2] qu'il existe un quantificateur unique $\exists$, sur S, d'image vC, et que ce quantificateur associe à chaque x dans S le plus petit élément de $S(x)$. Donc, d'après le calcul précédent, on a, pour tout a dans A,

$$\exists\, ua = vha, \qquad i.\text{ e. } \quad \exists\, u = vh.$$

Vérifions maintenant que la suite $(S, \exists, u, v)$ ainsi définie, est un anneau monadique libre sur h. Pour cela considérons un quantificateur $\exists'$ sur un anneau booléien S' et des homomorphismes u' de A dans S' et v' de C dans S' tels que $v'C \subset \exists' S'$ et $\exists' u' = v'h$. Nous avons, pour tout a dans A,

$$u'a \leqq \exists' u'a = v'ha,$$

ce qui montre que (u', v') superpose h à l'application identique de A. Par suite, il existe un unique homomorphisme f de S dans S' tel que $fu = u'$ et $fv = v'$. Si a est dans A et c dans C, nous avons

$$\begin{aligned} f\exists\,(ua \wedge vc) &= fv\,(ha \wedge c) = v'ha \wedge v'c = \exists' u'a \wedge v'c \\ &= \exists'\,(u'a \wedge v'c) = \exists' f(ua \wedge vc), \end{aligned}$$

car $v'c$ est dans $\exists' S'$; comme $f\exists$ et $\exists' f$ sont des hémimorphismes, et que tout élément de S est une borne supérieure d'éléments de la forme $ua \wedge vc$, où $(a, c) \in A \times C$, nous en déduisons que $f\exists = \exists' f$. Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Théorème 3. — *Si h est un hémimorphisme d'un anneau booléien A dans un anneau booléien C, et si $(u : A \to S, v : C \to S)$ est la superposition libre de h à l'application identique de A, il existe un quantificateur (unique) $\exists$ sur S, d'image vC et tel que $(S, \exists, u, v)$ soit libre sur h.*

Les deux propositions suivantes sont des corollaires immédiats du théorème précédent et du corollaire 1 ci-dessus.

Proposition 5. — *Si $(S, \exists, u, v)$ est un anneau monadique libre sur un hémimorphisme h de A dans C, les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *$uA \cup vC$ engendre S (ce qui implique que $vC = \exists S$);*

(ii) *le noyau de v est engendré par l'élément $1 + h1$ (dont v est injectif si et seulement si $h1 = 1$);*

(iii) *le noyau de u est $h^{-1}(0)$.*

Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 6. — *Soient h un hémimorphisme d'un anneau booléien A dans un anneau booléien C, $\exists$ un quantificateur sur un anneau booléien en S, et soient u et v des homomorphismes de A dans S et de C dans S, respectivement, tels que $vC \subset \exists S$ et $\exists u = vh$. Si $(S, \exists, u, v)$ vérifie les conditions* (i) *et* (ii) *de la proposition précédente, $(S, \exists, u, v)$ est un anneau monadique libre sur h.*

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Proposition 7. — *Si $(A, \exists)$ est un anneau monadique, si 1_A désigne l'application identique de A, et j l'injection canonique de $\exists A$ dans A, $(A, \exists, 1_A, j)$ est libre sur l'hémimorphisme de A dans $\exists A$, de même graphe que $\exists$.*

Rappelons [2] qu'une constante d'un monadique $(S, \exists)$ est un endomorphisme p de S, tel que $p\exists = \exists$ et $\exists p = p$.

Théorème 4. — *Soit h un hémimorphisme de A dans C tel que $h1 = 1$, et soit $(S, \exists, u, v)$ un anneau monadique libre sur h. Il existe une bijection* *canonique de l'ensemble des homomorphismes f de A dans C tel que, pour tout a dans A, $fa \leqq ha$, sur l'ensemble des constantes de $(S, \exists)$.*

Démonstration. — D'après le théorème 3, le couple (u, v) est une superposition libre de h à l'application identique de A. Si f est un homomorphisme de A dans C tel que, pour tout a dans A, $fa \leqq ha$, (vf, v) superpose h à l'application identique de A, donc il existe un endomorphisme f^+ de S, défini en fonction de f par $f^+u = vf$ et $f^+v = v$.

Comme $vC = \exists A$, pour tout a dans A, il existe c dans C tel que $vc = \exists a$, d'où

$$f^+ \exists a = f^+vc = vc = \exists a,$$

donc

$$f^+ \exists = \exists.$$

Puisque $uA \cup vC$ engendre S, f^+S est engendré par

$$f^+uA \cup f^+vC = vC = \exists A,$$

donc $f^+S = \exists A$, et par suite, $\exists f^+ = f^+$.

Comme $h1 = 1$, v est injectif. Donc si f et g sont deux homomorphismes de A dans C tel que $f^+ = g^+$, on a $vf = vg$, et par suite $f = g$. Donc l'application $^+$ est injective. Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit p une constante de $(S, \exists)$, comme v est injective, et que $puA \subset \exists S = vC$, il existe un homomorphisme (unique) f de A dans C tel que $vf = pu$. Pour tout $x \in S$, on a

$$0 = p(x \wedge (1 + \exists x)) = px \wedge 1 + \exists x,$$

donc $px \leqq \exists x$, donc, pour tout $a \in A$,

$$vfa = pua \leqq \exists ua = vha.$$

D'où il résulte que, pour tout a dans A, $fa \leqq ha$.

D'autre part, on a

$$f^+u = vf = pu \qquad \text{et} \qquad f^+v = v = pv,$$

donc $f^+ = p$. Ce qui achève la démonstration.

3. Hémimorphismes unitaires libres.

Définition 4. — Soit A un anneau booléien. Nous dirons qu'un hémimorphisme unitaire h de A, dans un anneau booléien C, est *libre sur A* si, pour tout hémimorphisme unitaire h' de A dans un anneau C', il existe un unique homomorphisme f de C dans C' tel que $fh = h'$.

Il résulte de cette définition que si h et h' sont tous deux libres sur A, f est un isomorphisme. Pour construire un hémimorphisme libre sur A, nous considérons l'anneau booléien libre L sur l'ensemble A et l'injection canonique j de l'ensemble A dans L. Soit N l'idéal de L engendré par

$$\{j(a \vee b) + (ja \vee jb) : a \in A \text{ et } b \in A\} \cup \{0 + j0,\ 1 + j1\}.$$

Il est clair que l'application h de A dans L/N, déduite de j par passage au quotient suivant N, est un hémimorphisme unitaire. On vérifie facilement, par une démonstration du même type que celle du théorème 1 ci-dessus, que h est bien un hémimorphisme unitaire libre sur A.

Le théorème suivant nous donne une caractérisation intrinsèque des hémimorphismes libres sur un anneau booléien A.

Théorème 5. — *Pour qu'un hémimorphisme h d'un anneau booléien A dans un anneau booléien C soit libre sur A, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) *C est engendré par hA;*

(2) *Pour tout entier $n \geqq 1$ et toute suite $(a_1, \ldots, a_n, a)$ d'éléments de A, telle que $\bigwedge_{i=1}^{n} ha_i \leqq ha$, il existe i, $1 \leqq i \leqq n$, tel que $a_i \leqq a$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $h : A \to C$ soit un hémimorphisme unitaire libre sur A. Soient $\bar{C}$ le sous-anneau de C engendré par hA, et $\bar{h}$ l'hémimorphisme de A dans $\bar{C}$ induit par h; il est clair que $\bar{h}$ est, lui aussi, libre sur A, donc l'injection canonique de $\bar{C}$ dans C est nécessairement un isomorphisme, d'où $\bar{C} = C$. On a donc bien (1). Considérons, maintenant une suite $(a_1, \ldots, a_n, a)$ d'éléments de A telle que $\bigwedge_{i=1}^{n} ha_i \leqq ha$. Soit h' l'hémimorphisme de A dans l'anneau réduit à deux éléments 2, tel que, pour tout x dans A, $hx = 0$ si et seulement si $x \leqq a$, et soit f l'homomorphisme de C dans 2 tel que $fh = h'$. L'inégalité $\bigwedge_{i=1}^{n} ha_i \leqq ha$ implique

$$\bigwedge_{i=1}^{n} h'a_i = f \bigwedge_{i=1}^{n} ha_i \leqq fha = h'a = 0.$$

Par suite, il existe i, $1 \leqq i \leqq n$, tel que $h'a_i = 0$, i. e. $a_i \leqq a$. Donc h vérifie (2).

Réciproquement, si h est un hémimorphisme unitaire tel que (1) et (2), soient $\bar{h} : A \to \bar{C}$ un hémimorphisme unitaire libre sur A, et f l'homomorphisme unique de $\bar{C}$ dans C tel que $f\bar{h} = h$. On vérifie facilement que f est un isomorphisme; ce qui montre que h est libre sur A.

Supposons maintenant que l'anneau A est atomique. Soient X l'ensemble de ses atomes, et Y l'ensemble des parties finies non vides de X. Pour tout a dans A, désignons par $\mathrm{at}(a)$ l'ensemble des atomes de A dominés par a. Nous avons évidemment, $\mathrm{at}(0) = \emptyset$, $\mathrm{at}(1) = X$, et pour toute famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de A possédant une borne supérieure dans A,

$$\mathrm{at}\Big(\bigvee_{i\in I} a\Big) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{at}(a_i).$$

D'où il résulte que l'application h de A dans l'anneau des parties de Y, définie pour tout a dans A, par

$$ha = \{ J : J \in Y \text{ et } J \cap \mathrm{at}(a) \neq \emptyset \},$$

est un hémimorphisme unitaire complet.

Cet hémimorphisme vérifie la condition (2) du théorème précédent. En effet, si $(a_1, \ldots, a_n, a)$ est une suite d'éléments de A telle que, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $a_i \not\leq a$, il existe, pour tout i, un atome x_i dans $\mathrm{at}(a_i)$ n'appartenant pas à $\mathrm{at}(a)$. Soit $J = \{ x_i : 1 \leq i \leq n \}$. Par définition, $J \cap \mathrm{at}(a)$ est vide, i. e. $J \notin ha$, et, pour tout i, $J \cap \mathrm{at}(a_i) \neq \emptyset$, i. e. $J \in \bigcap_{i=1}^{n} ha_i$. D'où $\bigcap ha_i \not\subseteq ha$.

Soit C_A le sous-anneau de l'anneau des parties de Y engendré par hA (il est clair que ce sous-anneau est propre si et seulement si A est infini); et désignons par h_A l'hémimorphisme de A dans C_A ayant même graphe que h. Nous déduisons de ce qui précède et du théorème 5, le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Si A est un anneau atomique, l'hémimorphisme canonique h_A, défini ci-dessus, est un hémimorphisme unitaire libre sur A. En outre, il est complet.*

COROLLAIRE. — *Soit $h : A \to C$ un hémimorphisme unitaire libre sur un anneau booléien A atomique.*

(i) *C est atomique.*

(ii) *Si A est fini et possède n atomes, C possède $2^n - 1$ atomes.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer ce résultat pour l'hémimorphisme canonique h_A. Si J est une partie finie non vide de X, on a clairement

$$\{ J \} = \bigcap_{x\in J} hx \cap \Big(1 + h\Big(\bigvee_{x\notin J} x\Big)\Big),$$

ce qui montre que $\{J\} \in C_A$. Donc C_A est atomique, et Y est l'ensemble des atomes de C_A. Si A est fini et possède n atomes, Y est l'ensemble de parties finies non vides d'un ensemble de n éléments, il a donc $2^n - 1$ éléments.

4. Anneaux monadiques libres sur un anneau booléien.

DÉFINITION 5. — Soit A un anneau booléien. Si $(S, \exists)$ est un anneau monadique et si u est un homomorphisme de A dans S, nous dirons que la suite $(S, \exists, u)$ est un *anneau monadique libre* sur A si, pour tout anneau monadique $(S', \exists')$ et tout homomorphisme u' de A dans S', il existe un unique homomorphisme f de S dans S' tel que $f\exists = \exists' f$ et $fu = u'$.

Il résulte de cette définition que si $(S, \exists, u)$ et $(S', \exists', u')$ sont tous deux libres sur A, f est un isomorphisme.

Si $h : A \to C$ est un hémimorphisme unitaire libre sur A et si $(S, \exists, u, v)$ est un anneau monadique libre sur h, $(S, \exists, u)$ est libre sur A. En effet, soient $(S', \exists')$ un anneau monadique et u' un homomorphisme de A' dans S' (*).

Posons $h' = \exists' u'$; h' est un hémimorphisme unitaire de A dans S', donc il existe un homomorphisme g de C dans S' tel que $gh = h' = \exists' u'$. Comme C est engendré par hA, gC est engendré par $ghA = \exists' u' A \subset \exists' S'$, donc $gC \subset \exists' S'$, et par suite, il existe un homomorphisme f de S dans S' tel que $f\exists = \exists' f$, $fu = u'$ et $fv = g$. Vérifions enfin l'unicité de f. Supposons que f et $\bar{f}$ soient deux homomorphismes de S dans S' tel que

$$\exists' f = f\exists, \qquad \exists' \bar{f} = \bar{f}\exists, \qquad fu = u' = \bar{f}u.$$

Nous avons, pour tout a dans A,

$$\begin{aligned} fvha &= f\exists\, ua = \exists' fua = \exists' \bar{f} ua \\ &= \bar{f}\exists\, ua = \bar{f}vha, \end{aligned}$$

donc fv et $\bar{f}v$ coïncident sur hA. Comme hA engendre C, on a $fv = \bar{f}v$, d'où $f = \bar{f}$.

Le résultat précédent va nous permettre d'utiliser les théorèmes 3 et 5 pour caractériser les anneaux monadiques libres sur un anneau booléien A.

(*) Dans [3], Halmos a donné une construction de nature topologique de $(S, \exists, u)$. H. Bass dans [1] a étudié $(S, \exists, u)$ dans le cas particulier où l'anneau booléien A est librement engendré par un nombre fini de générateurs; une partie des résultats de [1] sont généralisés par le théorème 8 ci-dessous.

THÉORÈME 7. — *Soient A un anneau booléien, $(S, \exists)$ un anneau monadique et u un homomorphisme de A dans S. Alors $(S, \exists, u)$ est libre sur A si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *S est engendré par $uA \cup \exists\, uA$ (ce qui implique que $\exists\, S$ est engendré par $\exists\, uA$);*

(2) *Pour tout entier $n \geqq 1$ et toute suite $(a_1, \ldots, a_n, a)$ d'éléments de S, tels que*

$$\bigwedge \exists\, ua_i \leqq \exists\, ua,$$

il existe i, $1 \leqq i \leqq n$, tel que $a_1 \leqq a$ (ce qui implique évidemment que u est injectif).

THÉORÈME 8. — *Soient A un anneau booléien atomique, X l'ensemble des atomes de A, Y l'ensemble des parties finies non vides de X, et Z l'ensemble des couples $(x, J) \in X \times Y$ tels que $x \in J$. Si $\exists$ est le quantificateur sur $\mathfrak{B}(Z)$, associé à la partition $(Z_J)_{J \in Y}$ de Z définie par*

$$Z_J = \{ (x, K) \in Z : K = J \}$$

pour tout $J \in Y$. Si u est l'homomorphisme canonique de A dans $\mathfrak{B}(Z)$ tel que pour tout $a \in A$,

$$ua = \{ (x, J) \in Z : x \leqq a \},$$

et si S est le sous-anneau de $\mathfrak{B}(Z)$ engendré par $uA \cup \exists\, uA$, le sous-anneau monadique $(S, \exists)$ est libre sur A.

Démonstration. — Soit $h_A : A \to C_A$, l'hémimorphisme libre sur A, défini dans la section précédente, et v l'homomorphisme de C_A dans $\mathfrak{B}(Z)$, défini pour tout $P \in C_A$, par

$$vP = \{ (x, J) \in Z : J \in P \}.$$

On a, pour tout a dans A, $ua \leqq vha$ car, pour tout $(x, J) \in ua$, on a $x \leqq a$, et $x \in J$, donc $J \in ha$, et par suite $(x, J) \in vha$.

D'autre part, pour tout a dans A, et tout P dans C_A, tel que $ua \leqq vP$, on a $ha \leqq P$. En effet, soit $J \in ha$, il existe x dans X tel que $x \in J$ et $x \leqq a$, donc $(x, J) \in ua$, d'où $(x, J) \in vF$, et par suite $J \in P$. D'autre part, on vérifie facilement que $vC_A = \exists\, S$, donc $uA \cup vC_A$ engendre S. D'où il résulte que le couple $(u : A \to S,\ v : C_A \to S)$ est la superposition libre de h à l'application identique de A, donc, d'après le théorème 3, $(S, \exists, u, v)$ est l'anneau monadique libre sur h_A, et, par suite, $(S, \exists, u)$ est libre sur A.