

# BULLETIN DE LA S. M. F.

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU

NICOLAE POPESCU

**Anneaux semi-artiniens**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 96 (1968), p. 357-368

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1968\\_\\_96\\_\\_357\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__357_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ANNEAUX SEMI-ARTINIENS

PAR

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU ET NICOLAE POPESCU.

---

### 1. Définitions et notations.

Soit  $A$  un anneau unitaire quelconque, et soient  $M$  un  $A$ -module à gauche et  $N$  un sous-module non nul de  $M$ . On dit que  $M$  est une *extension essentielle* de  $N$  si, pour tout sous-module non nul  $P$  de  $M$ , on a  $P \cap N \neq 0$ . Le  $A$ -module  $M$  est dit *co-irréductible* s'il est extension essentielle de ses sous-modules non nuls. Un sous-module  $N$  de  $M$  est dit *irréductible* si  $M/N$  est co-irréductible.

Dans ce qui suit, on notera par  $\mathfrak{R}(A)$  (ou par  $\mathfrak{R}$ ) le radical de Jacobson d'un anneau  $A$ . Dans [1], on dit que le radical de Jacobson est *T-nilpotent à gauche* (resp. à droite) si, pour toute suite d'éléments  $x_1, \dots, x_n, \dots$  de  $\mathfrak{R}(A)$ , il existe un entier  $n$  tel que  $x_1 x_2 \dots x_n = 0$  (resp.  $x_n x_{n-1} \dots x_1 = 0$ ).

Nous dirons qu'un anneau  $A$  *remplit la condition (H)* à gauche (resp. à droite) si tout  $A$ -module à gauche (resp. à droite) non nul contient un sous-module propre maximal. Une caractérisation des anneaux remplissant une telle condition est donnée par Guy RENAULT dans [9].

Si  $A$  est un anneau commutatif et  $M$  un  $A$ -module un idéal premier  $p \subset A$  est dit associé à  $M$  (au sens de [4], Chap. 4) s'il existe  $x \in M$  tel que  $p = \text{Ann} x$ . On note par  $\text{Ass}(M)$  l'ensemble des idéaux premiers associés à  $M$ .

### 2. Quelques considérations sur les l. c.-anneaux.

Soit  $A$  un anneau unitaire quelconque. Dans [8], on dit que la catégorie  $\text{Mod} A$  des  $A$ -modules à gauche est une *l. c.-catégorie* (i. e. une catégorie localement co-irréductible) si tout  $A$ -module non nul  $M$  contient un sous-module co-irréductible non nul. On dit que  $A$  est un l. c.-anneau à gauche si  $\text{Mod} A$  est une l. c.-catégorie. Dans [8], on donne une caractérisation partielle de ces anneaux.

Jacques FORT dit qu'un  $A$ -module  $M$  est *riche en co-irréductibles* si tout sous-module  $N$  non nul contient un sous-module co-irréductible non nul (voir [5] et [6]). En tenant compte de ses résultats (*loc. cit.*) et de [8], on a le théorème suivant :

**THÉOREME 2.1.** — *Soit  $A$  un anneau unitaire quelconque. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est un l. c.-anneau à gauche;
- (2) Tout idéal à gauche  $\alpha$  de  $A$  est une intersection réduite d'idéaux à gauche irréductibles;
- (3) Pour tout idéal à gauche  $\alpha$ , il existe  $x \in A$  tel que  $(\alpha : x)$  soit irréductible;
- (4) Pour tout  $A$ -module à gauche  $M$ , tout sous-module est une intersection réduite de sous-modules irréductibles;
- (5) Pour tout  $A$ -module à gauche  $M$  et tout sous-module  $N \subset M$ , il existe  $x \in M$  tel que l'idéal  $\{N : x\} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\}$  soit irréductible.

*Démonstration.* — Le théorème 3 de [6] affirme que  $M$  est riche en co-irréductibles si, et seulement si,  $\alpha$  possède une décomposition irréductible réduite dans tout sous-module non nul de  $M$ ; il est alors évident que (1)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (2).

Prouvons que (2)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $\alpha \subset A$  un idéal, et soit  $\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} \alpha_\alpha$  une intersection réduite d'irréductibles, donc, dans le  $A$ -module  $A/\alpha$ ,  $0 = \bigcap_{\alpha \in I} \bar{\alpha}_\alpha$  (intersection réduite de sous-modules irréductibles). Soit  $\alpha_0 \in I$  et  $\bar{\alpha}'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in I - \{\alpha_0\}} \bar{\alpha}_\alpha$  alors  $\bar{\alpha}'_{\alpha_0} \neq 0$  et  $\bar{\alpha}'_{\alpha_0} \cap \bar{\alpha}_{\alpha_0} = 0$ , donc  $\bar{\alpha}'_{\alpha_0} \subset A/\alpha_{\alpha_0}$ ,

donc est co-irréductible, et par suite, le  $A$ -module  $A/\alpha$  contient un sous-module co-irréductible non nul.

(1)  $\Rightarrow$  (5). Soit  $N \subset M$ ,  $M/N$  contient un co-irréductible non nul, donc il existe  $\hat{x} \in M/N$  tel que  $A\hat{x}$  soit co-irréductible non nul. Il est clair que  $\{N : x\}$  est le noyau de l'application  $\varphi : A \rightarrow A\hat{x}$   $\varphi(\lambda) = \lambda x$ , et est un idéal irréductible.

(5)  $\Rightarrow$  (3) étant évident, il reste à prouver que (3)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $\alpha \subset A$  un idéal, et soit  $\varphi : A/(\alpha : x) \rightarrow A/\alpha$  l'application  $\varphi(\hat{\lambda}) = \hat{\lambda}x$  qui est un monomorphisme, alors  $A/\alpha$  contient un co-irréductible non nul.

### 3. Anneaux semi-artiniens.

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont supposés commutatifs et unitaires, sauf mention explicite du contraire.

**DÉFINITION.** — Soit  $A$  un anneau quelconque (commutatif ou non). On dit que  $A$  est *semi-artinien à gauche* si tout  $A$ -module à gauche non nul contient un sous-module simple non nul.

**PROPOSITION 3.1.** — *Les affirmations suivantes sont vraies :*

- (1) Si  $A$  est intègre et semi-artinien à gauche, c'est un corps;
- (2) Si  $A$  est semi-artinien et  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal bilatère, alors  $A/\mathfrak{a}$  est semi-artinien;
- (3) Tout produit fini d'anneaux semi-artiniens (à gauche) est semi-artinien;
- (4) Si  $A$  est semi-artinien à gauche, tout anneau de fractions  $A[S^{-1}]$  (voir [7], chap. V, p. 415) est semi-artinien.

**Démonstration.** — (1) Si  $A$  est intègre et semi-artinien, soit  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal à gauche minimal. On a  $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ , il existe donc un idempotent  $e \in A$  tel que  $\mathfrak{a} = Ae$ . Vu que  $e$  est diviseur de zéro, on a donc  $e = 1$ , donc  $A$  est un corps.

Les affirmations (2), (3) et (4) sont immédiates.

**Remarque.** — Un produit infini d'anneau semi-artiniens n'est pas forcément semi-artinien; exemple : un produit infini de corps.

**PROPOSITION 3.2.** — *Soit  $A$  un anneau unilaire quelconque. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est semi-artinien à gauche;
- (2) Tout  $A$ -module  $M$  non nul à gauche est une extension essentielle de son socle  $s_0 M$  (le socle étant la somme des sous-modules simples de  $M$ );
- (3) (a)  $\mathfrak{R}(A)$  est  $T$ -nilpotent à droite;  
(b)  $A/\mathfrak{R}(A)$  est semi-artinien à gauche.

**Démonstration.** — Il est clair que (1)  $\Leftrightarrow$  (2). Prouvons que (1)  $\Rightarrow$  (3). Pour démontrer (a), nous allons procéder par récurrence transfinie d'après un procédé de H. BASS [1]. Soient  $\mathfrak{R}_0 = 0$  et  $\mathfrak{R}_{\alpha+1}$  tel que  $\mathfrak{R}_{\alpha+1}/\mathfrak{R}_\alpha$  soit le socle de  $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_\alpha$  et tel que, si  $\alpha$  est un ordinal limite,  $\mathfrak{R}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{R}_\beta$ .  $A$  étant semi-artinien, il existe  $\alpha_0$  tel que  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\alpha_0}$ . Si  $a \in \mathfrak{R}$ , définissons  $h(a)$  comme étant le plus petit ordinal  $\alpha$  tel que  $a \in \mathfrak{R}_\alpha$ . On observe que  $h(a)$  n'est pas un ordinal limite, car si  $a \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{R}_\beta$ , alors  $a \in \mathfrak{R}_\beta$  pour  $\beta < \alpha$ .

Donc, pour tout  $a \neq 0$ , on peut écrire  $h(a) = \beta + 1$ . Il en résulte que  $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}_{\beta+1} \subset \mathfrak{R}_\beta$  et donc, pour tout  $b \in \mathfrak{R}$ , on a  $h(ba) < h(a)$ . Soit alors la suite  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  d'éléments de  $\mathfrak{R}$  telle que  $a_n a_{n-1} \dots a_1 \neq 0$

pour tout  $n$ , alors la suite d'ordinaux  $\{h(a_n a_{n-1} \dots a_1)\}$  est infinie et strictement décroissante, ce qui est impossible. De plus, il est clair que (b) est une conséquence de la proposition 3.1.

Prouvons que (3)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $M$  un  $A$ -module non nul tel que  $\mathfrak{R}N \neq 0$  pour tout  $N \subset M$ ,  $N \neq 0$ . Vu que  $\mathfrak{R}M \neq 0$ , il existe  $a_1 \in \mathfrak{R}$  tel que  $a_1 M \neq 0$ . Soit  $M_1 = A a_1 M$  sous-module non nul de  $M$ , étant donné que  $\mathfrak{R}M_1 \neq 0$ , il existe  $a'_2 \in \mathfrak{R}$  tel que  $a'_2 A a_1 M \neq 0$ , d'où un  $a_2 \in \mathfrak{R}$  tel que  $a_2 a_1 M \neq 0$ . En continuant le procédé, on trouve donc une suite  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  tel que  $a_n a_{n-1} \dots a_1 M \neq 0$  pour tout  $n$ , ce qui est absurde, car  $\mathfrak{R}$  est  $T$ -nilpotent à droite. Donc, pour tout  $A$ -module  $M$ , il existe  $N \subset M$ ,  $N \neq 0$  tel que  $\mathfrak{R}N = 0$ , donc  $N$  est un  $A/\mathfrak{R}$ -module à gauche, et, par suite, contient un sous-module simple, il en est donc de même pour  $M$ .

**THÉOREME 3.1.** — *Soit  $A$  un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est semi-artinien;
- (2) (a)  $\mathfrak{R}(A)$  est  $T$ -nilpotent,  
(b)  $A/\mathfrak{R}(A)$  est semi-artinien et régulier au sens de von Neumann;
- (3)  $A$  est un l. c.-anneau et remplit la condition (H);
- (4) Tout idéal premier est maximal et, pour tout  $A$ -module  $M$  non nul,  $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* — En vue de la démonstration, on va rappeler les lemmes suivants :

**LEMME 1.** — *Si  $A$  est semi-artinien commutatif, tout idéal premier est maximal.*

Soit  $\mathfrak{p} \subset A$  un idéal premier; comme  $A/\mathfrak{p}$  est semi-artinien intègre, c'est un corps, et par suite  $\mathfrak{p}$  est maximal.

**LEMME 2** (BOURBAKI [3], chap. 2, p. 173, exercice 16). — *Si  $A$  est commutatif et réduit et tel que tout idéal premier soit maximal, alors  $A$  est régulier au sens de von Neumann.*

En tenant compte de ces lemmes et de la proposition 3.2, il est clair que (1)  $\Leftrightarrow$  (2).

(1) = (3). Il est clair que  $A$  est un l. c.-anneau et la condition (H) résulte du théorème 1.2 de [9].

(3)  $\Rightarrow$  (2). En vue du théorème précédemment cité,  $\mathfrak{R}$  est  $T$ -nilpotent,  $A/\mathfrak{R}$  est régulier au sens de von Neumann et est un l. c.-anneau. Au paragraphe 4, théorème 4.1, nous prouverons que un l. c.-anneau régulier est semi-artinien.

(1)  $\Leftrightarrow$  (4). Soit  $M \neq 0$ , il existe  $S \subset M$ ,  $S \neq 0$ , et simple, soit alors  $\mathfrak{p} = \text{Ann} x$ , où  $x \in S$ , alors  $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ .

La réciproque est évidente.

*Remarque 1.* — Si  $A$  est semi-artinien et commutatif, alors il vérifie la condition (H). Le problème qui se pose est de savoir si un anneau semi-artinien à gauche vérifie la condition (H). Nous résoudrons partiellement ce problème au paragraphe 5.

*Remarque 2.* — L'affirmation (2) du théorème précédent nous a été communiquée par Guy RENAULT.

**COROLLAIRE 3.1.** — *Soit  $A$  un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est semi-artinien et noethérien;
- (2)  $A$  est noethérien et vérifie la condition (H);
- (3)  $A$  est artinien.

L'équivalence (1)  $\Leftrightarrow$  (2) résulte du théorème précédent du fait qu'un anneau noethérien est un l. c.-anneau.

L'équivalence (1)  $\Leftrightarrow$  (3) est évidente.

**COROLLAIRE 3.2.** — *Soit  $A$  un anneau semi-artinien. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $M$  est un  $A$ -module noethérien;
- (2)  $M$  est un  $A$ -module artinien;
- (3)  $M$  est de longueur finie.

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  (3). Soit  $M_0 = s_0 M$  le socle de  $M$ ,

$$M_1/M_0 = s_0(M/M_0), \dots, M_n/M_{n-1} = s_0(M/M_{n-1}), \dots$$

$M$  étant noethérien, il existe  $n$  tel que  $M_n = M$  et chaque  $M_1, \dots, M_n$  est de longueur finie.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Soient  $M_0 \subset M$  un sous-module propre maximal (qui existe en vertu du théorème 3.1),  $M_1 \subset M_0$  un sous-module propre maximal de  $M_0$ ,  $\dots$ ,  $M_n \subset M_{n-1}$  un sous-module propre maximal de  $M_{n-1}$ . Vu que  $M$  est artinien, il existe  $n$  tel que  $M_n = 0$ .

**COROLLAIRE 3.3.** — *Soit  $A$  semi-artinien. Soient  $M$  un  $A$ -module et  $a \in A$ . L'homothétie de rapport  $a$  dans  $M$  est un monomorphisme si, et seulement si,  $a$  n'appartient à aucun idéal de  $\text{Ass}(M)$ .*

*Démonstration.* — Si  $a$  appartient à un idéal premier  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ , on a  $\mathfrak{p} = \text{Ann} x$  avec  $x \in M$ ,  $x \neq 0$ ; d'où  $ax = 0$ , et l'homothétie de

rapport  $a$  n'est pas injective. Réciproquement, si  $ax = 0$  pour un  $x \in M$  tel que  $x \neq 0$ , on a  $Ax \neq \{0\}$ , d'où  $\text{Ass}(Ax) \neq \emptyset$  (en vertu du théorème 3.1).

Soit  $p \in \text{Ass}(Ax)$ ; on a évidemment  $p \in \text{Ass}(M)$  si  $p = \text{Ann}(bx)$ ,  $b \in A$ , d'où  $a \in p$  puisque  $abx = 0$ . De ce corollaire, résulte le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.4.** — *L'ensemble des diviseurs de zéro dans un anneau semi-artinien est réunion des  $p \in \text{Ass}(A)$ .*

Dans [10], H. STORRER dit qu'un anneau commutatif  $A$  est saturé si toute extension épimorphe de  $A$  est égale à  $A$ . Il dit que  $A$  est *fortement saturé* si toute image homomorphe de  $A$  est saturée, c'est-à-dire si tout épimorphisme de source  $A$  est surjectif.

En tenant compte des résultats de [10], on obtient le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.5.** — *Si  $A$  est un anneau, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est semi-artinien;
- (2) (a)  $\mathfrak{R}(A)$  est  $T$ -nilpotent,
- (b)  $A$  est un l. c.-anneau fortement saturé.

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) est une conséquence immédiate de la proposition 2.3 de [10] et du théorème 3.1.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $N$  l'idéal des éléments nilpotents de  $A$ , alors  $A/N$  est un l. c.-anneau fortement saturé et, en vertu de la proposition 2.6 de [10],  $A/N$  est régulier au sens de von Neumann. Donc  $N = \mathfrak{R}$ , et il résulte du théorème 3.1 que  $A$  est semi-artinien.

En particulier, si  $A$  est semi-artinien,  $A$  est saturé, donc, en vertu du corollaire 2.5 de [10], tout  $a \in A$  non diviseur de zéro est inversible et tenant compte du corollaire 3.4, on a le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3.6.** — *Soit  $A$  un anneau semi-artinien, alors, pour tout idéal premier  $p \subset A$ , on a*

$$p \subset \bigcup_{q \in \text{Ass}(A)} q.$$

*En particulier, si  $A$  est semi-artinien et tel que  $\text{Spec}(A)$  soit fini, alors tout idéal premier est associé.*

**COROLLAIRE 3.7.** — *Soit  $A$  semi-artinien tel que  $\text{Spec}(A)$  soit fini. Alors, tout  $A$ -module simple est isomorphe à un idéal minimal de  $A$ .*

*Démonstration.* — Soit  $S$  un  $A$ -module simple, donc  $S = A/\mathfrak{m}$  où  $\mathfrak{m}$  est maximal dans  $A$ .  $\text{Spec}(A)$  étant fini, alors  $\mathfrak{m}$  est associé, si  $\mathfrak{m} = \text{Ann } x$  où  $x \in A$ , alors  $Ax$  est minimal et isomorphe à  $S$ .

*Exemple.* — Dans [1], H. Bass dit qu'un anneau  $A$  est parfait à gauche si tout  $A$ -module à gauche admet un recouvrement projectif. En tenant compte du théorème P de [1], il résulte que  $A$  est parfait à gauche si, et seulement si,  $A$  est semi-artinien à droite et s'il n'existe qu'un nombre fini d'idempotents orthogonaux de  $A$ . Si  $A$  est parfait et commutatif, nous sommes dans les conditions du corollaire 3.7.

**COROLLAIRE 3.8.** — *Soit  $A$  un anneau (commutatif). Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est parfait;
- (2)  $A$  est semi-artinien et  $\text{Spec } A$  est fini.

*Démonstration.*

(1)  $\Rightarrow$  (2) est évident, car  $A/\mathfrak{R}$  est semi-simple ([1], théorème P).

(2)  $\Rightarrow$  (1). Si  $\text{Spec}(A)$  est fini,  $\text{Spec}(A/\mathfrak{R})$  l'est aussi. D'après le corollaire 3.7, tout module simple est isomorphe à un idéal minimal;  $A/\mathfrak{R}$  est régulier au sens de von Neumann (théorème 3.1), donc tout idéal minimal de  $A/\mathfrak{R}$  est projectif, c'est-à-dire tout  $A/\mathfrak{R}$ -module simple est projectif, donc  $A/\mathfrak{R}$  est semi-simple.

#### 4. Anneaux semi-artiniens et réguliers au sens de von Neumann.

Dans ce paragraphe, tous les anneaux sont unitaires et commutatifs. Rappelons que l'anneau  $A$  est dit *régulier au sens de von Neumann* si, quelque soit  $x \in A$ , il existe  $a \in A$  tel que  $x = xax = x^2a$ .

**THÉORÈME 4.1.** — *Soit  $A$  un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A$  est un l. c.-anneau régulier;
- (2)  $A$  est semi-artinien et régulier;
- (3)  $A$  est semi-artinien et réduit;
- (4) Tout idéal de  $A$  est une intersection réduite d'idéaux maximaux;
- (5) Tout sous-module d'un  $A$ -module est une intersection réduite de sous-modules maximaux.

On se sert du lemme suivant :

**LEMME 4.1.** — *Si  $A$  est régulier (commutatif), alors :*

- (1) Tout idéal irréductible de  $A$  est maximal;
- (2) Tout sous-module irréductible d'un  $A$ -module est maximal.

*Démonstration.*

1° Soit  $B = A/\mathfrak{a}$  où  $\mathfrak{a}$  est un idéal irréductible,  $B$  est régulier, donc, pour tout  $x \in B$ ,  $Bx$  est somme directe de  $B$ , mais  $B$  étant un  $B$ -module co-irréductible, on a  $B = Bx$  quel que soit  $x \in B$ , donc  $B$  est un corps et par suite  $\mathfrak{a}$  est maximal.

2° Supposons d'abord que  $M$  soit co-irréductible et soit  $x \in M$ , alors  $Ax = A/\mathfrak{a}$  où  $\mathfrak{a}$  est irréductible, donc  $Ax$  est simple pour tout  $x \in M$ .  $M$  étant co-irréductible, alors  $M = Ax$  et par suite  $M$  est simple.

Soient maintenant  $M$  quelconque et  $N \subset M$  un sous-module irréductible de  $M$ ; il est clair que  $M/N$  est simple, donc  $N$  est maximal.

Les implications (1)  $\Rightarrow$  (5)  $\Rightarrow$  (4) du théorème sont donc maintenant claires.

Prouvons que (4)  $\Rightarrow$  (3). Il est clair que  $A$  est réduite; soit  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal; d'après (4), on a  $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{m}_\alpha$  intersection réduite d'idéaux maximaux et, dans le  $A$ -module  $A/\mathfrak{a}$ , on a  $0 = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha$  (intersection réduite) et  $\overline{\mathfrak{m}}_\alpha$  maximal dans  $A/\mathfrak{a}$ . Soit  $\alpha_0 \in I$  et  $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in I - \{\alpha_0\}} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha$  où  $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \neq 0$  et  $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \cap \overline{\mathfrak{m}}_{\alpha_0} = 0$ . Donc  $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \subset A/\mathfrak{m}_{\alpha_0}$ , donc  $A/\mathfrak{a}$  contient un  $A$ -module simple.

**COROLLAIRE 4.1.** — *Soient  $A$  un anneau semi-artinien et  $\mathfrak{a} \subset A$  un idéal tel que  $\mathfrak{a}$  soit égal à sa racine; alors  $\mathfrak{a}$  est une intersection réduite d'idéaux maximaux.*

Il suffit en effet d'observer que  $A/\mathfrak{a}$  est semi-artinien et réduit.

**COROLLAIRE 4.2.** — *Soit  $A$  semi-artinien régulier; alors tout  $A$ -module  $M$  est une extension essentielle d'une somme directe  $P \oplus Q$  où  $P$  est  $A$ -module simple et projectif et  $Q$  une somme directe des modules simples et injectifs.*

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.2,  $M$  est extension essentielle de son socle  $s_0 M$ . D'après un résultat classique de Kaplansky, tout module simple sur un anneau régulier commutatif est injectif. Soient alors  $P$  la somme des modules projectifs et simples de  $s_0 M$ , et  $Q$  la somme des modules simples injectifs et non projectif. On observe qu'un module simple est projectif si, et seulement si, il est isomorphe à un idéal minimal de  $A$ .

**COROLLAIRE 4.3.** — *Soit  $A$  semi-artinien et régulier alors tout  $A$ -module  $P$  projectif est extension essentielle d'une somme directe d'idéaux minimaux.*

En effet, si  $S$  est un module simple de  $s_0 P$ , étant injectif, c'est une sommande directe, donc  $S$  est projectif et, par suite, est isomorphe à un idéal minimal.

**COROLLAIRE 4.4.** — *Si  $A$  est semi-artinien et régulier, alors tout  $A$ -module noethérien est semi-simple et injectif.*

*Exemples d'anneaux semi-artiniens réguliers au sens de von Neumann qui ne sont pas noethériens.* — Soit  $B$  un anneau réduit (commutatif ou pas) ayant des idéaux minimaux à gauche et soit  $\mathfrak{b}$  l'un d'entre-eux. On a  $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$  ( $B$  étant réduit). Il existe un idempotent  $e \in \mathfrak{b}$  tel que  $\mathfrak{b} = Be$ . Soit  $\mathfrak{a}$  l'idéal de  $B$ , somme directe d'idéaux à gauche minimaux ( $\mathfrak{a}$  est bilatère), et soit  $A$  le plus petit sous-anneau de  $B$  contenant  $\mathfrak{a}$  et l'élément unité de  $B$ .

Si  $\mathfrak{b}$  est minimal dans  $B$ , il est minimal dans  $A$ . En effet (cf. BOURBAKI [2], § 5, exercices),  $\mathfrak{b} = Be$  est minimal si, et seulement si,  $eBe$  est un corps et, de même,  $\mathfrak{b} = Ae$  est minimal dans  $A$ , car  $eAe = eBe$  est un corps.

Tout élément de  $A$  est de la forme  $n \cdot 1 + x$ , où  $x \in \mathfrak{a}$  et  $n$  un entier. Si  $B$  est de caractéristique  $p$  non nulle, alors  $A/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{F}_p$ , et  $A$  est semi-artinien.

*Cas particulier.* — Soient  $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  le corps des entiers modulo  $p$  ( $p$  nombre premier) et  $B = \prod_{i \in I} \mathbf{F}_p$  (card  $I =$  infini). Soit  $\mathfrak{a}$  l'idéal  $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_p$ , et considérons dans  $B$  l'anneau  $A$  contenant  $\mathfrak{a}$  et l'élément unité de  $B$ , alors  $A$  est semi-artinien régulier au sens de von Neumann, mais n'est pas noethérien.

## 5. Élévation d'un module.

Soient  $A$  un anneau unitaire quelconque et  $M$  un  $A$ -module à gauche. Soit  $M_0 = s_0 M$  le socle de  $M$ . Si  $\alpha$  est un ordinal,  $M_{\alpha+1}$  est défini tel que  $M_{\alpha+1}/M_\alpha$  soit le socle de  $M/M_\alpha$ . Si  $\alpha$  est un ordinal limite, alors

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta.$$

**DÉFINITION.** — Soit  $M$  un  $A$ -module à gauche, on dira que l'élévation de  $M$  est *définie* s'il existe un ordinal  $\alpha$  tel que  $M = M_\alpha$ . Le plus petit ordinal possédant cette propriété sera appelé l'élévation de  $M$  et sera noté  $e(M)$ .

*Remarque.* — Si  $M$  est un  $A$ -module de type fini, son élévation n'est pas un ordinal limite. De la définition précédente, il résulte clairement la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — Soit une suite exacte de  $A$ -modules

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

- (1) L'élévation de  $M$  est définie si, et seulement si, les élévations de  $M'$  et  $M''$  sont définies.
- (2) (a)  $e(M') \leq e(M)$ ,  
 (b)  $e(M'') \leq e(M)$ ,  
 (c)  $e(M) \leq e(M') + e(M'')$ .

DÉFINITION. — Si  $A$  est un anneau semi-artinien à gauche, on définit l'élévation de l'anneau  $A$  comme étant l'élévation du  $A$ -module  $A_s$ , par suite l'élévation de  $A$  n'est pas un ordinal limite.

PROPOSITION 5.2. — Soit  $A$  un anneau semi-artinien à gauche. Les affirmations suivantes sont équivalentes

- (1)  $e(A) \leq \alpha$ ;  
 (2) Pour tout  $A$ -module à gauche  $M$ ,  $e(M) \leq \alpha$ .

Il est trivial que (2)  $\Rightarrow$  (1) et (1)  $\Rightarrow$  (2) car  $e(A) = e(A^{(J)})$  où  $J$  est un ensemble d'indices.

PROPOSITION 5.3. — Soit  $A$  semi-artinien à gauche tel que

$$e(A) = n \quad (n, \text{ nombre naturel}).$$

Alors tout  $A$ -module à gauche  $M$  contient un sous-module propre maximal [i. e. vérifie la condition (H)].

Démonstration. — On a la suite  $0 \subset M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ . Cependant  $M/M_{n-1} = S_1 \oplus \dots \oplus S_p \oplus \dots$ , où  $S_i$  sont des modules simples, il existe donc  $M'$  tel que, par exemple, l'on ait  $M_i/M' \cong S_i$ , donc  $M'$  est maximal dans  $M$ .

Remarque. — Si  $A$  est semi-artinien à gauche, la condition (H) n'est pas forcément remplie. Par exemple, soit  $A$  parfait à droite et non parfait à gauche (voir [1], p. 476, exemple), il est semi-artinien à gauche. Si  $A$  vérifiait la condition (H), alors, d'après le théorème 1.5 [9],  $\mathfrak{R}(A)$  serait  $T$ -nilpotent à gauche, mais  $A/\mathfrak{R}$  est semi-simple (étant parfait à droite), donc  $A$  serait parfait à gauche.

PROPOSITION 5.4. — Soient  $A$  un anneau quelconque,  $Q$  un  $A$ -module injectif tel que  $e(Q) \leq \aleph_0$ . Soient  $B = \text{Hom}_A(Q, Q)$  et  $\mathfrak{R}$  le radical de Jacobson de  $B$ . Alors :

- (1)  $\mathfrak{R}$  est l'ensemble de morphismes  $f: Q \rightarrow Q$  tels que  $\text{Ker } f \supset s_0 Q$ ;
- (2)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^n = 0$ ;

(3)  $B/\mathfrak{R}$  est un produit d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels sur certains corps.

*Démonstration.* — 1° Elle résulte d'un cas classique plus général qui affirme que si  $Q$  est un  $A$ -module injectif, le radical de Jacobson de  $B$  est l'ensemble des morphismes tels que  $\text{Ker} f$  soit essentiel.

2° Soit  $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_n \subset \dots$  tel que  $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$  et  $Q_{n+1}/Q_n$  semi-simple.

Soit  $\mathfrak{R}^{(n)}$  l'ensemble des morphismes  $f: Q \rightarrow Q$  tels que  $\text{Ker} f \supset Q_{n-1}$ . Si  $f \in \mathfrak{R}^{(n)}$ , il est clair que  $f(Q_{m+n})$  soit contenu dans  $Q_m$ , cela entraîne que  $R^{(m)}.R^{(n)}$  est contenu dans  $R^{(m+n)}$ .

En particulier,  $\mathfrak{R}^n$  est contenu dans  $R^{(n)}$ . D'autre part, les morphismes canoniques  $Q^n \subset Q$  et  $Q \rightarrow Q/Q_n$  engendrent les suites exactes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(Q/Q_n, Q) \xrightarrow{i_n} \text{Hom}(Q, Q) \xrightarrow{p_n} \text{Hom}(Q_n, Q) \rightarrow 0.$$

On observe que  $\mathfrak{R}^{(n+1)}$  n'est autre que  $\text{Im}(i_n)$ . Les applications  $p_n$  définissent donc un isomorphisme  $B/\mathfrak{R}^{(n+1)} \cong \text{Hom}(Q_n, Q)$ . Mais la formule

$$B = \text{Hom}(Q, Q) = \text{Hom}\left(\lim_{\rightarrow} Q_n, Q\right) = \lim_{\leftarrow} \text{Hom}(Q_n, Q) = \lim_{\leftarrow} A/\mathfrak{R}^{(n+1)}$$

montre que  $B$  est un anneau séparé et complet pour la filtration définie par les idéaux  $\mathfrak{R}^{(n)}$  et par la suite

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^{(n)} = 0, \quad \text{d'où} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^n = 0.$$

3° On voit facilement que  $B/\mathfrak{R} = \text{Hom}_A(Q_0, Q_0)$ , où  $Q_0$  est le socle de  $Q$ , semi-simple et, par suite,

$$\text{Hom}_A(Q_0, Q_0) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_{F_i}(V_i, V_i),$$

$V_i$ , espaces vectoriels,

**COROLLAIRE 5.1.** — Soient  $A$  un anneau quelconque et  $Q$  un injectif tel que  $e(Q) = n$  et soit  $B = \text{Hom}_A(Q, Q)$ . Si  $\mathfrak{R}$  est le radical de Jacobson de  $B$ , alors  $\mathfrak{R}^n = 0$ .

**COROLLAIRE 5.2.** — Soit  $A$  un anneau semi-artinien d'élévation finie. Si  $Q$  est un injectif, somme finie d'injectifs indécomposables (i. e. de longueur au sens de Goldie), alors l'anneau  $B = \text{Hom}_A(Q, Q)$  est semi-primaire.

(Un anneau est dit semi-primaire si son radical de Jacobson  $\mathfrak{R}$  est tel que  $\mathfrak{R}^n = 0$  pour un certain  $n$  et si  $A/\mathfrak{R}$  est semi-simple.)

*Démonstration.* — Si  $e(A) = n$ , alors  $e(Q) \leq n$  et donc  $\mathfrak{R}^n = 0$ . D'autre part,  $B/\mathfrak{R}$  est semi-simple, car le socle  $Q_0$  de  $Q$  contient un nombre fini de modules simples.

Ce corollaire généralise un résultat donné dans [9], théorème 3.1.

*Exemples d'anneaux semi-artiniens d'élévation finie :*

1° Tout anneau artinien est d'élévation finie.

2° Soit l'anneau  $B = \prod_{i \in I} \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$  où  $\text{Card } I$  est infini. Notons  $\mathfrak{o}$  l'idéal

de  $B$  égal à  $\sum_{i \in I} \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$  et soit  $A$  le plus petit sous-anneau de  $B$  contenant  $\mathfrak{o}$

et l'élément unité de  $B$ . Il est clair que  $A$  est semi-artinien d'élévation  $n$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BASS (Hyman). — Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 95, 1960, p. 466-494.
- [2] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*. Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Bourbaki*, 23).
- [3] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).
- [4] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 3 et 4. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1293; *Bourbaki*, 28).
- [5] FORT (Jacques). — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, série A, p. 1239-1242.
- [6] FORT (Jacques). — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, *Math. Z.*, t. 103, 1968, p. 363-388.
- [7] GABRIEL (Pierre). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).
- [8] NĂSTĂSESCU (C.) et POPESCU (N.). — Sur la structure des objets de certaines catégories abéliennes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, Série A, p. 1295-1297.
- [9] RENAULT (Guy). — Sur les anneaux  $A$ , tels que tout  $A$ -module à gauche non nul contient un sous-module maximal, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, Série A, p. 622-624.
- [10] STÖRRER (Hans H.). — Sur les épimorphismes dans la catégorie des anneaux commutatifs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, Série A, p. 263-265.

(Manuscrit reçu le 10 juin 1968.)

Constantin NĂSTĂSESCU,  
Institut de Mathématiques  
de l'Académie de la R. S. R.,  
rue M. Eminescu, 47,  
Bucuresti 9 (Roumanie).

Nicolae POPESCU,  
Institut de Mathématiques  
de l'Académie de la R. S. R.,  
rue M. Eminescu, 47,  
Bucuresti 9 (Roumanie).