

BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ MARTINEAU

Équations différentielles d'ordre infini

Bulletin de la S. M. F., tome 95 (1967), p. 109-154

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__109_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1967__95__109_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFINI

PAR

ANDRÉ MARTINEAU

(Nice).

Introduction.

Dans le texte qui suit, je développe en premier lieu l'article *Équations différentielles d'ordre infini* [17], texte d'une conférence donnée au deuxième Colloque du C. B. R. M. sur l'Analyse fonctionnelle, tenu à Liège en 1964.

Le but de cet article était, d'une part montrer que la méthode de plongement que j'avais employée dans la démonstration du théorème de l'indicatrice de croissance pour une fonction entière du type exponentiel [16] se généralisait aux espaces de fonctions entières d'ordre fini, et d'autre part, d'explicitier quelques résultats sur les équations de convolution. Je corrigerai en passant le « lemme de décomposition » (p. 42 de [17]) dont l'énoncé était manifestement incorrect.

En second lieu, je donnerai des démonstrations directes des théorèmes de division dont j'ai besoin.

Enfin, pour les fonctions entières de type exponentiel, je compléterai les résultats obtenus par l'introduction d'une transformation de Laplace que j'appellerai transformée de Laplace projective. Les méthodes utilisées sont délibérément élémentaires. Ce texte est basé sur trois conférences, données en décembre 1965, du Séminaire dirigé par Jean LERAY au Collège de France.

Table des Matières.

Pages.

INTRODUCTION.....	109
TABLE DES MATIÈRES.....	109

PREMIÈRE PARTIE :

**La transformation de Fourier-Borel
dans les espaces de fonctions d'ordre fini.**

1. Notations et premières définitions.....	110
2. Nature vectorielle topologique des espaces de fonctions entières.....	112

3. Représentation des éléments du dual d'un espace de fonctions entières.	113
4. La série de Taylor.	115
5. Application diagonale et convolution.	119
6. L'isomorphisme de Fourier-Borel.	120
7. Théorèmes de division.	132
8. Applications aux équations de convolution.	136

DEUXIÈME PARTIE :

**Compléments dans le cas des fonctions entières de type exponentiel :
la transformée de Laplace projective.**

9. L'indicatrice projective de Fantappié.	140
10. La transformation de Laplace projective.	147
11. Théorème de l'indicatrice de croissance.	151
BIBLIOGRAPHIE.	153

PREMIÈRE PARTIE.

**La transformation de Fourier-Borel
dans les espaces de fonctions d'ordre fini.**

1. Notations et premières définitions.

Dans la suite, V désignera un espace vectoriel complexe de dimension finie. On notera V^n pour préciser que V est de dimension n . Et par choix d'un système de coordonnées, on entendra un isomorphisme vectoriel (complexe) entre V et \mathbf{C}^n : si $z \in V$, nous écrirons alors $z = (z_1, \dots, z_n)$. On notera par V' l'espace vectoriel (complexe) dual de V . On désignera par fonction entière une fonction holomorphe sur V (resp. sur V').

Soit ρ une fonction continue sur V . On notera par $B_\rho(V)$ l'espace ⁽¹⁾ des fonctions $(z \rightarrow f(z))$ telles que $|f(z) \cdot \exp(-\rho(z))|$ tende vers zéro à l'infini muni de la norme

$$(1) \quad \|f\|_\rho = \sup_{z \in V'} |f(z) \cdot \exp(-\rho(z))|;$$

B_ρ est un espace de Banach. L'espace B_ρ peut être réduit à zéro; en outre se pose le problème de savoir dans quelle mesure B_ρ dépend de ρ . Je reviendrai ailleurs sur ces questions.

Dans tout ce qui suit, ρ va être très particulier.

(a) *Fonctions entières de type exponentiel.* — On se donne une norme réelle sur V , c'est-à-dire une fonction ρ telle que $\rho(z) \geq 0$, $\rho(z) = 0 \Rightarrow z = 0$,

⁽¹⁾ Dans la suite, nous noterons B_ρ à la place de $B_\rho(V)$, etc., quand aucune confusion ne sera possible.

$\rho(u_1 + u_2) \leq \rho(u_1) + \rho(u_2)$, $\rho(\lambda u) = \lambda \rho(u)$ pour tout $\lambda \geq 0$. On désigne par E^1 la réunion

$$(2) \quad \bigcup_{A > 0} B_{A\rho} = E^1.$$

Un élément de E^1 sera dit, fonction entière de type exponentiel.

Il revient au même de dire qu'une fonction entière est de type exponentiel s'il existe A et K tels que

$$(3) \quad |f(z)| \leq K \cdot \exp(A \cdot \rho(z)),$$

où ρ est une norme réelle.

Il est clair que E^1 ne dépend pas du choix de ρ . De même, l'espace

$$(4) \quad \bigcap_{A > 0} B_{A\rho} = E_0^1$$

ne dépend pas du choix de la norme.

Un élément de cet espace sera dit fonction entière de type exponentiel zéro.

On est de même amené à introduire les espaces

$$(5) \quad \bigcup_{A < R} B_{A\rho} = E_{R,\rho}^1,$$

espace des fonctions entières de type exponentiel et de ρ -type inférieur à A , et

$$(6) \quad \bigcap_{A > R} B_{A\rho} = E_{0,R,\rho}^1,$$

l'espace des fonctions entières de type exponentiel et de ρ -type égal à A . Ces espaces dépendent de ρ . On est amené aux conventions naturelles

$$E_{0,0,\rho}^1 = E_0^1, \quad E_{\infty,\rho}^1 = E^1,$$

ce qui nous permettra dans la suite de faire prendre à R les valeurs 0 et ∞ respectivement dans $E_{0,R,\rho}^1$ et dans $E_{R,\rho}^1$.

(b) *Fonctions entières d'ordre fini.* — Nous remplaçons la fonction $A\rho$ par $(A\rho)^k$ où $k \geq 1$, et nous noterons par E^k l'espace des fonctions entières d'ordre k et de type moyen, soit

$$(7) \quad E^k = \bigcup_{A > 0} B_{(A\rho)^k},$$

et par E_0^k son sous-espace des fonctions de type zéro, soit

$$(8) \quad E_0^k = \bigcap_{A > 0} B_{(A\rho)^k}.$$

Ces deux espaces ne dépendent pas du choix de ρ . Nous désignerons par $E_{R,\rho}^k$ l'espace des fonctions entières d'ordre k et de ρ -type inférieur à R , soit

$$(9) \quad E_R^k = \bigcup_{A < R} B_{(A\rho)^k},$$

puis par $E_{0,R,\rho}^k$ l'espace des fonctions d'ordre k et de ρ -type égal à R , soit

$$(10) \quad E_{0,R,\rho}^k = \bigcap_{A > R} B_{(A\rho)^k}.$$

On a donc

$$E_{0,0,\rho}^k = E_0^k \quad \text{et} \quad E_{\infty,\rho}^k = E^k.$$

(c) *Fonctions d'ordre infini.* — Nous poserons, et ceci sera justifié dans l'avenir, E^∞ pour l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de V , E_0^∞ pour l'espace des fonctions entières, $E_{0,R,\rho}^\infty$ pour l'espace des fonctions holomorphes dans l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$, $E_{R,\rho}^\infty$ pour l'espace des fonctions holomorphes au voisinage du compact $\rho(z) \leq R^{-1}$.

2. Nature vectorielle topologique des espaces de fonctions entières.

LEMME 1. — Si $A < A'$, l'application identique de $B_{(A\rho)^k}$ dans $B_{(A'\rho)^k}$ est compacte.

Démonstration. — Supposons d'abord $k \neq \infty$. La boule unité β de $B_{(A\rho)^k}$ est compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V d'après un théorème de Paul MONTEL. Si f_n est une suite d'éléments de cette boule, on peut donc en extraire une sous-suite $f_{n'}$, convergeant vers f_0 , où $f_0 \in \beta$, uniformément sur tout compact. Mais $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe R_0 tel que $\rho(z) > R_0$ entraîne

$$(11) \quad \exp((A\rho(z))^k - (A'\rho(z))^k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et R_0 étant fixé, il existe n_0 tel que $n' > n_0$ entraîne $|f_{n'}(z) - f_{n_0}(z)| < \varepsilon$ pour tout z tel que $\rho(z) \leq R_0$. Donc

$$\begin{aligned} & |f_{n'}(z) - f_{n_0}(z)| \cdot \exp - (A' \cdot \rho(z))^k \\ & \leq \sup_{|z| \leq R_0} |f_{n'}(z) - f_{n_0}(z)| + \dots \\ & \quad + \sup_{|z| > R_0} (|f_{n'}(z) - f_{n_0}(z)| \cdot e^{-(A\rho(z))^k} \cdot e^{(A\rho(z))^k - (A'\rho(z))^k}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc les $f_{n'}$ convergent dans $B_{(\mathcal{A}'\rho)^n}$ vers f_0 . Le lemme est démontré pour $k \neq \infty$. Pour $k = \infty$, il se réduit à la propriété déjà rappelée de MONTEL.

C. Q. F. D.

On peut munir l'espace $E_{R,\rho}^k$ de la topologie de la limite inductive des $B_{(\mathcal{A}\rho)^k}$ où $A < R$. De même, $E_{0,R,\rho}^k$ sera muni de la topologie de la limite projective des $B_{(\mathcal{A}\rho)^k}$. Si $k \neq \infty$, il est immédiat de constater que ces topologies sont plus fines que celle de la convergence uniforme sur tout compact, donc que la topologie de la convergence simple.

D'après le théorème du graphe fermé de KÖTHE-GROTHENDIECK [8], il en résulte que les topologies introduites sont les seules topologies d'espaces $\mathcal{L}^2\mathcal{F}$ plus fines que la topologie de la convergence simple dont peuvent être munis ces espaces. Pour $k = \infty$ et les espaces $E_{R,\rho}^\infty$ (resp. $E_{0,R,\rho}^\infty$), on considère la topologie de la convergence simple des coefficients des séries de Taylor des éléments de $E_{R,\rho}^\infty$ (resp. $E_{0,R,\rho}^\infty$) en tout point de l'ensemble $\rho(z) \leq R^{-1}$ [resp. $\rho(z) < R^{-1}$], topologie moins fine et séparée qui rend naturelle, vu le théorème du graphe fermé, les topologies introduites (on aurait pu faire de même dans les autres cas).

Dorénavant ce sont ces topologies que nous considérerons.

PROPOSITION 1. — *Les espaces E^k , $E_{R,\rho}^k$ sont des duals de Fréchet-Schwartz, les espaces E_0^k et $E_{0,R,\rho}^k$ sont des Fréchet-Schwartz.*

Démonstration. — La terminologie adoptée est celle de l'article de GROTHENDIECK [7]. Je renvoie à cet article pour la théorie de ces espaces. La propriété découle du lemme, cf. [7].

Remarque. — Il est aisé de renforcer le lemme et de montrer que l'application de $B_{(\mathcal{A}\rho)^k}$ dans $B_{(\mathcal{A}'\rho)^k}$ est nucléaire. Donc nos espaces sont même des espaces nucléaires [8], ce qui d'ailleurs ne m'est d'aucune utilité dans la suite.

3. Représentation des éléments du dual d'un espace de fonctions entières.

Soit $k \neq \infty$. Désignons par $C_{\mathcal{A},\rho}^k$ l'espace des fonctions g continues sur V et telles que $|g(z) \cdot \exp(-(A\rho(z))^k)|$ tende vers zéro à l'infini muni de la norme

$$g \rightarrow \sup_{z \in V} |(g \cdot e^{-(A\rho)^k})(z)|.$$

C'est un espace de Banach. Alors nous désignerons par $F_{0,R,\rho}^k$ l'espace

$$(12) \quad \bigcap_{A > R} C_{\mathcal{A},\rho}^k$$

et muni de la topologie de la limite projective des $C_{\mathcal{A},\rho}^k$. C'est un espace de Fréchet dont je vais déterminer le dual. Le dual de l'espace $C_{\mathcal{A},\rho}^k$

est formé des mesures μ sur V telles que $\mu \cdot e^{(\mathcal{A}\varphi(z))^k}$ soit une mesure bornée. En effet, si C_0 est l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, dont le dual est justement l'espace des mesures bornées, l'application $C_0 \rightarrow C_{B,\varphi}$ définie par $g \rightarrow g \cdot e^{(\mathcal{A}\varphi)^k}$ est un isomorphisme métrique dont le transposé envoie $C'_{B,\varphi}$ sur le dual de C_0 . Les fonctions continues à support compact sont denses dans $C_{B,\varphi}$ comme on le voit par une troncature, donc le dual $C'_{B,\varphi}$ de cet espace est un ensemble de mesures, et l'application transposée est $\mu \rightarrow \mu \cdot e^{(\mathcal{A}\varphi)^k}$. Ceci démontre l'assertion.

Il vient alors le lemme ci-dessous :

LEMME 2. — Soit $k \neq \infty$. Le dual de $F_{0,R,\varphi}^k$ est constitué des mesures μ qui satisfont à la propriété : il existe $A > R$ tel que $\mu \cdot e^{(\mathcal{A}\varphi)^k}$ soit une mesure bornée.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer, vu ce que nous venons de démontrer, et notant que le dual de $F_{0,R,\varphi}^k$ est un espace de mesures, le corollaire 2 de la proposition 10, § 2, chap. IV, de BOURBAKI [3].

L'espace $E_{0,R,\varphi}^k$ apparaît comme un sous-espace fermé de $F_{0,R,\varphi}^k$ car il est déjà fermé dans ce dernier pour la topologie moins fine de la convergence uniforme sur tout compact. Donc une application du théorème de Hahn-Banach nous donne la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — Soit $k \neq \infty$. Tout élément T du dual de $E_{0,R,\varphi}^k$ peut être représenté par une mesure μ telle que $|\mu| \cdot \exp(B\varphi)^k$ soit bornée pour un $B > R$ au moins, c'est-à-dire que, pour toute $f \in E_{0,R,\varphi}^k$, on a

$$T(f) = \int f(z) d\mu(z)$$

et réciproquement.

Pour $k = \infty$, tout élément T du dual de $E_{0,R,\varphi}^\infty$ peut être représenté par une mesure μ à support compact dans l'ouvert $\varphi(z) < R^{-1}$.

Pour la représentation du dual $E_{R,\varphi}^k$, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — Tout élément T du dual de $E_{R,\varphi}^k$ ($k \neq \infty$) peut être représenté par une mesure μ telle que $|\mu| \cdot \exp(B\varphi)^k$ soit bornée pour tout $B < R$.

Démonstration. — La restriction de T à $B_{(\mathcal{A}\varphi)^k}$, où $A < R$, est continue, donc provient d'une forme linéaire continue μ_A sur $C_{(\mathcal{A}\varphi)^k}$. Convenons d'appeler mesure de Cauchy une mesure de la forme

$$(13) \quad g \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\nu(z_0)} g(z) dz \quad (dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n),$$

où $\nu(z_0)$ est la frontière distinguée orientée d'un polycylindre de centre z_0 .

On a le lemme suivant :

LEMME 3 (MORERA). — Soit $k \neq \infty$. Les mesures de Cauchy forment un ensemble total dans le sous-espace $(B_{(\mathcal{A}, \rho)^k})^0$ (orthogonal de $B_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$) de $C_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$.

Démonstration. — Pour cela, il suffit de voir que si $\mu(f) = 0$ pour toute mesure de Cauchy μ , alors f est holomorphe ce qui est précisément le théorème de Morera.

C. Q. F. D.

Nous appliquons maintenant le procédé de Mittag-Leffler.

Si A_1, \dots, A_n, \dots est une suite strictement croissante de nombres réels telle que $\lim_n A_n = R$, et si l'on note par $\| \cdot \|_n$ la norme dans $C_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$, on remarque que $\| \cdot \|_{n+1} \geq \| \cdot \|_n$ dans $C_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$. Ayant trouvé μ_1 qui représente T sur $B_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$ puis μ'_2 sur $B_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$, la mesure $(\mu'_2 - \mu_1)$ est orthogonale à $B_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$, donc on peut lui ajouter une combinaison linéaire finie de mesures de Cauchy ν_2 telle que

$$(14) \quad \| \mu'_2 - \mu_1 - \nu_2 \|_1 < \frac{1}{2}.$$

On posera $\mu_2 = \mu'_2 - \nu_2$; μ_1, \dots, μ_{n-1} ayant été choisies en sorte que

$$(15) \quad \| \mu_{n-1} - \mu_{n-2} \|_{n-2} < \frac{1}{2^{n-2}},$$

on pourra trouver μ'_n telle que μ'_n représente T dans $B_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$. Donc on peut trouver ν_n combinaison linéaire finie de mesures de Cauchy telle que

$$(16) \quad \| \mu'_n - \nu_n - \mu_{n-1} \|_{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \dots$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ existe dans chaque espace $C_{(\mathcal{A}, \rho)^k}$. Si μ est la mesure limite, elle répond à la question.

C. Q. F. D.

Je ne vois pas la possibilité d'une telle propriété pour $k = \infty$.

4. La série de Taylor.

Soit $f \in E_{0, R, \rho}^k$ (resp. $f \in E_{R, \rho}^k$), et considérons sa série de Taylor à l'origine

$$(17) \quad \mathfrak{S}(f) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha} \quad (\text{considérée en tant que série formelle}).$$

Posons

$$(18) \quad P_n(f; z) = \sum_{|\alpha| = n} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$$

[on a $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$],

alors on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — Supposons que $\rho(\lambda.z) = |\lambda|. \rho(z)$ pour tout λ complexe. La série de terme général $P_n(f; z)$, si $f \in E_{0, R, \rho}^k$, converge vers f dans cet espace. On a, plus précisément, si $f \in B_{(A, \rho)^k}$, sa série converge absolument dans tout $B_{(A', \rho)^k}$ où $A' > A$, ce qui entraîne que, si $f \in E_{R, \rho}^k$, la série $\sum_n P_n(f; z)$ converge vers f dans cet espace.

VARIANTE. — $V = \mathbf{C}^n$. Une norme ρ est dite de Reinhardt si

$$\rho(e^{i\tilde{S}_1}.u_1, \dots, e^{i\tilde{S}_n}.u_n) = \rho(u_1, \dots, u_n).$$

Si ρ est de Reinhardt la série de Taylor de $f \in E_{0, R, \rho}^k$ converge dans cet espace vers f (resp. la série de Taylor de $f \in E_{\rho, R}^k$ converge dans cet espace vers f).

Cette proposition admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — Les polynômes sont denses dans E^k (resp. E_0^k).

Démonstration. — Prendre pour ρ une norme complexe et appliquer la proposition.

Remarquons que cette propriété a lieu en général dans tous nos espaces sous les seules hypothèses du début pour ρ , mais je ne le démontrerai pas ici.

Démonstration de la proposition. — On considère la fonction

$$(19) \quad g(z; \zeta) = f(\zeta.z), \quad \zeta z = (\zeta z_1, \dots, \zeta z_n).$$

Il vient la formule

$$(20) \quad P_n(f; z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} g(z; \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Supposons que $f \in B_{(A, \rho)^k}$, c'est-à-dire en particulier que

$$(21) \quad \sup_{z \in V} |f(z) \cdot \exp - (A \rho(z))^k| \leq M(A) < +\infty.$$

Ceci nous donne

$$(22) \quad |g(z; \zeta)| \leq M(A) \cdot \exp(A \rho(z))^k$$

et, posant $R = \rho(z)$, il vient

$$(23) \quad \sup_{\rho(z)=R} |P_n(f; z)| \leq M(A) \cdot \exp(A.R)^k$$

parce que $\rho(e^{i\theta}.z) = \rho(z)$, d'où

$$(24) \quad \sup_z \left(\sup_{\rho(z)=R} \left| \frac{P_n(f; z)}{(\rho(z))^n} \right| \right) \leq M(A) \frac{\exp(A.R)^k}{R^n}.$$

LEMME 4. — *Le minimum de la fonction $R \rightarrow \frac{\exp(A \cdot R)^k}{R^n}$ est atteint pour $R = \left(\frac{n}{e \cdot k}\right)^{1/k} \frac{1}{A}$. Il vaut $\left(\frac{e \cdot k(A^k)}{n}\right)^{1/k}$.*

Ce type de raisonnement est classique. Posons

$$(25) \quad u_n = \sup_z \frac{|P_n(f; z)|}{(\rho(z))^n}$$

et soit

$$(26) \quad \Theta = \overline{\lim} \left(\left(\frac{n}{e \cdot k} \right)^{1/k} \cdot u_n^{1/n} \right).$$

LEMME 5. — $f \in E_{0, A, \rho}^k$ équivaut à $\Theta = A$.

Démonstration. — $f \in B_{(A', \rho)^k}$ pour tout $A' > A$, d'où, par le lemme précédent,

$$\Theta \leq A' \quad \text{pour tout } A' > A,$$

car on a

$$(27) \quad \left(\frac{n}{e \cdot k} \right)^{1/k} \cdot u_n^{1/n} \leq M(A')^{1/n} \cdot A'.$$

Dans l'autre sens, supposons que $\Theta \leq A$. Alors à partir d'un certain rang, A' étant donné supérieur à Θ , et si $\Theta < A'' < A'$, on a

$$(28) \quad u_n^{1/n} \leq \left(\frac{e \cdot k}{n} \right)^{1/k} \cdot A'',$$

d'où

$$(29) \quad |u_n| \leq \left(\left(\frac{e \cdot k}{n} \right)^{n/k} \cdot (A'')^n = \left(\frac{e \cdot k(A'')^k}{n} \right)^{n/k} \right).$$

Calculons la norme

$$(30) \quad \sup_n |P_n(f; z) \cdot \exp(-(A' \rho(z))^k)| = \lambda_n.$$

On a

$$\lambda_n \leq \left(\frac{e \cdot k(A'')^k}{n} \right)^{n/k} \cdot R^n \cdot \exp(-(A' \cdot R)^k)$$

et, utilisant le lemme 4,

$$(31) \quad R^n \cdot \exp(-(A' \cdot R)^k) \leq \left(\frac{n}{e \cdot k(A')^k} \right)^{k/n},$$

d'où

$$(32) \quad \lambda_n \leq \left(\frac{A''}{A'} \right)^n$$

pour n assez grand, ce qui montre que la série converge.

Elle converge donc vers une fonction $f(z)$ telle que

$$\sup |f(z) \cdot \exp -(A' \rho)^k(z)| < +\infty$$

et $A' > A$ étant arbitraire $f \cdot \exp -(A' \rho)^k$ tend vers zéro à l'infini.

Démonstration de la variante. — On suppose donc que $V = \mathbf{C}^n$ et que ρ est une norme de Reinhardt. On pose

$$(33) \quad v_z = \sup_{\rho(z)=1} |z|^2,$$

puis

$$(34) \quad \tau = \overline{\lim}_x \left(\left(\frac{|\alpha|}{e \cdot k} \right)^{1/x} \cdot v_x^{1/|\alpha|} \cdot |a_x|^{1/|\alpha|} \right).$$

Alors $f \in E_{0, A, \rho}^k$ équivaut à $\tau = A$.

En effet, on a

$$(35) \quad u_n \leq \Phi(n) \cdot \sup_{|\alpha|=n} v_{\alpha} \cdot |a_{\alpha}|,$$

où $\Phi(n)$ est le cardinal de l'ensemble des α tels que $|\alpha| = n$; $\Phi(n)$ est un polynôme de la variable n .

Donc,

$$(36) \quad \left(\frac{n}{e \cdot k} \right)^{1/k} \cdot u_n^{1/n} \leq \left(\frac{n}{e \cdot k} \right)^{1/k} \cdot \Phi(n)^{1/n} \sup_{|\alpha|=n} v_{\alpha}^{1/n} \cdot |a_{\alpha}|^{1/n},$$

d'où $\Theta \leq \tau$.

Dans l'autre sens, appliquons la formule de Cauchy à $P_n(z) = \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$.

Il vient

$$(37) \quad a_{\alpha} = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \int \dots \int_{\substack{|z_1|=\dots=|z_n|=A_n \\ \rho(A_1, \dots, A_n)=1}} \frac{P_n(z)}{z^{\alpha+1}} dz,$$

d'où

$$(38) \quad |a_{\alpha}| \leq \frac{u_n}{v_{\alpha}}, \quad \text{soit} \quad |a_{\alpha} \cdot v_{\alpha}| \leq u_n,$$

d'où $\tau = \Theta$ ce qui montre l'égalité de τ et de Θ dans le cas d'une norme de Reinhardt.

Enfin, cette même inégalité montre que la norme de $a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$ dans un espace $B_{\rho, n}$, où ρ est de Reinhardt, est inférieure à celle de $P_{|\alpha|}(f; z)$, donc est majorée par une série de puissances convergente. Le nombre des α , tels que $|\alpha| = n$, étant un polynôme de n , cette série est sommable,

donc sa somme est égale à $\sum_n \left(\sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha} \right) = f$.

C. Q. F. D.

MAJORATION DES COEFFICIENTS. — On a les majorations suivantes :

Si $f \in B_{A,\rho}$, on a

$$(39) \quad |u_n| \leq \|f\|_{A,\rho} \left(\frac{e \cdot k(A^k)}{n} \right)^{n/k}.$$

Si ρ est en outre une norme de Reinhardt :

$$(40) \quad |a_\alpha| \leq \|f\|_{A,\rho} \cdot \left(\frac{e \cdot k(A^k)}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{1}{v_\alpha}.$$

5. Application diagonale et convolution.

Considérons l'application définie pour toutes les fonctions de V à valeurs dans l'espace des fonctions définies sur $V \times V$ et que je noterai Δ :

$$(41) \quad \Delta : (z \mapsto f(z)) \mapsto ((u, v) \mapsto f(u + v)).$$

L'application Δ peut aussi être définie par la formule (41) pour les germes de fonctions définies au voisinage de l'origine de V et de $V \times V$.

PROPOSITION 5. — L'application Δ applique $E^k(V)$ dans $E^k(V \times V)$ qu'on peut identifier à $E^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E^k(V)$.

Démonstration. — Le cas de $k = \infty$ est bien connu (cf. par exemple [16], p. 88).

Dans la suite, nous supposons $k \neq \infty$.

1° Si ρ est une norme sur V , nous considérerons sur $V \times V$ la norme $\sigma(u, v) = \rho(u) + \rho(v)$,

$$(42) \quad \begin{aligned} |f(u + v)| &\leq M \cdot \exp(A \rho(u + v))^k \\ &\leq M \cdot \exp(A (\rho(u) + \rho(v)))^k \\ &\leq M \cdot \exp(A \sigma(u, v))^k. \end{aligned}$$

La définition de E^k ne dépendant pas de la norme choisie, la première assertion est démontrée.

2° Le produit tensoriel ε est stable par passage à un sous-espace [8], [22], [23]. On sait que

$$C_0(V \times V) \simeq C_0(V) \hat{\otimes}_\varepsilon C_0(V) \quad [22].$$

L'espace $C_{A,\rho}^k(V)$ s'envoyant isométriquement sur $C_0(V)$ par l'application $f \mapsto f \cdot e^{-(1/\rho)^k}$, en appliquant le résultat précédent, on trouve

$$(43) \quad C_{A,\rho}^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon C_{B,\rho}^k(V) \simeq C_{\sigma_{A,B}}^k(V \times V),$$

où

$$(44) \quad (\sigma_{A,B}(u, v))^k = (A\rho(u))^k + (B\rho(v))^k.$$

Donc $B_{A,\rho}^k$ étant fermé dans $C_{A,\rho}^k$ quel que soit A, ρ , on en déduit

$$B_{A,\rho}^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon B_{B,\rho}^k(V) \simeq B_{\sigma_{A,B}}^k(V \times V).$$

En passant à la limite inductive, ce qui est possible notre espace étant complet [8], on obtient le résultat.

C. Q. F. D.

L'identification de $E^k(V \times V)$ avec $E^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E^k(V)$, combinée à Δ , nous permet de définir la convolution; Δ devient une application linéaire continue de $E^k(V)$ dans $E^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E^k(V)$.

L'application transposée $'\Delta$ envoie les applications bilinéaires intégrales sur $E^k(V) \times E^k(V)$ dans $E^k(V)$, en particulier les tenseurs élémentaires $T \otimes U$ dans $E^k(V)$. Par définition, on posera

$$(45) \quad T \star U = '\Delta(T \otimes U)$$

soit

$$(46) \quad (T \star U)(f) = (T \otimes U)(\Delta f).$$

L'espace $(E^k(V))'$ apparaît comme une algèbre commutative et unitaire. En outre, comme $E^k(V) \subseteq E^h(V)$ si $k \leq h$, l'inclusion étant dense, et comme Δ définie sur $E^k(V)$ est la restriction à cet ensemble de Δ , définie sur $E^h(V)$, $(E^h(V))'$ est une sous-algèbre de $(E^k(V))'$. Notons de même que $(C^k(V))'$ est une algèbre et que la représentation est un homomorphisme d'algèbre, toujours parce que Δ est le même.

De façon analogue, on vérifiera :

L'application Δ envoie $E_0^k(V)$ dans $E_0^k(V \times V)$ qu'on peut identifier à $E_0^k(V) \hat{\otimes}_\varepsilon E_0^k(V)$. On en déduit que si

$$T \in (E_0^k(V))', \quad U \in (E_0^k(V))'$$

et si l'on pose

$$(47) \quad T \star U = '\Delta(T \otimes U),$$

$(E_0^k(V))'$ devient une algèbre commutative et unitaire; $(E^k(V))'$ est sous-algèbre de $(E_0^k(V))'$.

6. L'isomorphisme de Fourier-Borel.

L'espace E^1 ou, si $k > 1$, les espaces $E_{h,\rho}^k$ et $E_{0,h,\rho}^k$, pour tout $R \geq 0$, contiennent les fonctions exponentielles ($z \rightarrow \exp \langle z, u \rangle$) où u parcourt le dual V' , de $V \langle z, u \rangle$ désignant la valeur de u sur z . L'espace $E_{h,\rho}^1$ ne contient, lui, que les exponentielles u telles que

$$(48) \quad \sup_{\substack{z \\ \rho(z) < 1}} (\operatorname{Re} \langle z, u \rangle) < R,$$

donc l'ensemble $\rho'(u) < R$ où ρ' désigne la norme duale de ρ . Nous dirons que nous sommes dans le cas (2). La situation précédente sera le cas (1).

De toute façon, pour toute $T \in (E_{\mathcal{R}}^k, \rho)'$, on peut définir $T_z(\exp \langle z, u \rangle)$ quand $(z \rightarrow \exp \langle z, u \rangle)$ appartient à l'espace, et si μ_T est une mesure représentant T et satisfaisant aux conclusions de la proposition 3, on aura

$$T_z(\exp \langle z, u \rangle) = \int d\mu_T. \exp \langle z, u \rangle = \mathcal{F} T(u).$$

Dans le cas (1), la fonction $u \rightarrow \mathcal{F} T(u)$ est une fonction holomorphe entière de u . Dans le cas (2), elle est holomorphe, définie dans l'ouvert $\rho'(u) < 1$. Posons $R' = \frac{1}{R}$, et si $R = 0$, $R' = \infty$, $R = \infty$, $R' = 0$. Soit k' le complément de k , c'est-à-dire si $k \neq 1$, k' défini par $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$, si $k = 1$, $k' = \infty$, et si $k = \infty$, $k' = 1$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — ρ étant une norme complexe, la transformation de Fourier-Borel établit un isomorphisme entre

$$(E_{R, \rho}^k(V))' \quad \text{et} \quad E_{0, (\lambda, (k), R)'}^{k'}(V'), \quad \text{où} \quad \lambda(k) = \frac{k}{(k-1)^{(k-1)/k}} \quad (2).$$

Pour $k=1$, il suffit de supposer que ρ est convexe (c'est le théorème de l'indicatrice de Pólya).

La démonstration du théorème de l'indicatrice de Pólya sera donnée plus loin par une méthode nouvelle. (Pour d'autres démonstrations, cf. [16], [9].) C'est aussi une conséquence du « Fundamental principle » de L. EHRENPREIS [5]. Donc, jusqu'à nouvel ordre, je suppose que ρ est une norme complexe.

LEMME 6. — L'application $T \mapsto \mathcal{F} T$ (dite transformation de Fourier-Borel) est injective de $(E_{R, \rho}^k(V))'$ dans $E_{0, (\lambda, (k), R)'}^{k'}(V')$ [resp. de $(E_{0, R, \rho}^k(V))'$ dans $E_{(\lambda, (k), R)'}^{k'}(V')$].

Démonstration. — Les polynômes sont denses dans $E_{R, \rho}^k$, donc il en est de même des combinaisons linéaires des fonctions exponentielles telles que $\rho'(u) < R$ (dériver en u et faire $u = 0$!). Ceci assure la biunivocité de la correspondance.

Pour le cas de $E_{0, R, \rho}^k(V)$, on note que

$$E_{0, R, \rho}^k(V) = \bigcap_{A > R} (E_{A, \rho}^k(V))$$

(2) Cet énoncé est esquissé de façon très incomplète dans l'Ouvrage de MM. GEL'FAND et ŠILOV sur les distributions.

et l'on définit la transformation de Fourier-Borel de

$$(E_{0,R,\rho}^k(V))' = \bigcup_{A>R} (E_{A,\rho}^k(V))'$$

par la définition précédente. Elle est donc injective de $(E_{0,R,\rho}^k(V))'$ dans

$$\bigcup_{A>R} (E_{0,(\lambda(k),A)',\rho'}^{k'}(V')) = E_{(\lambda(k),A)',\rho'}^{k'}(V')$$

si l'assertion a été démontrée dans le premier cas que je vais considérer maintenant jusqu'à la fin.

Soit μ représentant T . D'après la proposition 2, dans le premier cas, et avec $k \neq \infty$, il est possible de choisir μ , pour tout $B < R$, en sorte que $|\mu| \cdot \exp(B\rho)^k$ soit bornée. Considérons l'intégrale

$$(49) \quad \int_{\mathcal{F}} \exp \langle z, u \rangle \cdot d\mu(z) = \mathcal{F} T(u).$$

Toute dérivée partielle en u donne une intégrale absolument convergente, donc $\mathcal{F} T$ est holomorphe.

On peut écrire

$$(50) \quad \mathcal{F} T(u) = \int_{\mathcal{F}} \exp(\langle z, u \rangle - (B\rho(z))^k) \cdot \exp(B\rho(z))^k \cdot d\mu(z).$$

La mesure $\nu = \mu \cdot \exp(B\rho)^k$ est de masse totale bornée K et il faut évaluer

$$(51) \quad \max_z \operatorname{Re}(\langle z, u \rangle - (B\rho(z))^k) = J(u)$$

si $\rho(z) = R$:

$$\max_{z, \rho(z)=R} \operatorname{Re} \langle z, u \rangle = R \cdot \rho'(u),$$

où ρ' est la norme duale, d'où

$$(52) \quad \begin{cases} J(u) = \max_R (R\rho'(u) - (B \cdot R)^k) = \left(\frac{\rho'(u)}{B} \right)^{k/k-1} \cdot \frac{k-1}{k^{k/k-1}} \\ \text{si } k \neq 1, \infty. \end{cases}$$

On peut écrire

$$J(u) = \left(\rho'(u) \cdot B^{-1} \frac{(k-1)^{k-1/k}}{k} \right)^{k/k-1},$$

donc

$$(53) \quad |\mathcal{F} T(u)| \leq K \cdot \exp \left(\rho'(u) \cdot B^{-1} \frac{(k-1)^{k-1/k}}{k} \right)^{k/k-1}.$$

La constante B étant arbitraire inférieure à R .

Si nous posons

$$(54) \quad \lambda(k) = \frac{k}{(k-1)^{k-1/k}},$$

on a bien

$$\mathcal{F} T \in E_{0, (\lambda(k), R), \rho'}^{k'}(V').$$

Lorsque $k=1$, l'intégrale converge quand $\rho'(u) < B$, donc $\mathcal{F} T$ est holomorphe pour $\rho'(u) < \frac{1}{R}$, c'est-à-dire, avec les conventions précédentes, appartient à $E_{0, R', \rho'}^{\infty}(V')$. Notons que $\lim_{k \rightarrow 1} \frac{(k-1)^{k-1/k}}{k} = 1$, ce qui montre que la formule est ainsi prolongée de façon naturelle pour $k=1$.

Si $k=\infty$, pour tout $B < R$, il existe une mesure μ , à support compact dans l'ouvert $\rho(z) < B^{-1}$, telle que $\mathcal{F} T(u) = \int \exp \langle z, u \rangle d\mu(z)$, d'où

$$|\mathcal{F} T(u)| \leq \|\mu\| \cdot \exp \left(\sup_{\rho(z) \leq B^{-1}} \operatorname{Re} \langle z, u \rangle \right),$$

soit

$$(55) \quad |\mathcal{F} T(u)| \leq \|\mu\| \cdot \exp(B^{-1} \cdot \rho'(u)).$$

La formule se prolonge à nouveau de façon naturelle. Le lemme est démontré. Remarquons que $\lambda(k)$ atteint son maximum pour $k=2$ et vaut alors 2.

LEMME 7. — Si W est un espace vectoriel quotient de V par une application linéaire continue u , et si σ est la norme quotient de ρ , $E_{R, \sigma}^k(W)$ [resp. $E_{0, R, \sigma}^k(W)$] s'identifie à un sous-espace fermé de $E_{R, \rho}^k(V)$ [resp. $E_{0, R, \rho}^k(V)$] par l'application $f \rightarrow f \circ u$ à savoir le sous-espace des fonctions constantes sur les fibres de u .

Démonstration. — Le sous-espace des fonctions constantes sur les fibres de u est fermé dans $E_{R, \sigma}^k(V)$ [resp. $E_{0, R, \sigma}^k(V)$], car il est déjà fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V dans la situation $k \neq \infty$, où, dans le dernier cas, pour les topologies décrites juste avant la proposition 1.

Considérons d'abord $k \neq \infty$. Soit f constante sur les fibres de u et telle que $|f(z)| \leq K \cdot \exp(B\rho(z))^k$. Alors, si $g(t)$ est la fonction définie sur W par $g(t) = f(z)$ où $u(z) = t$, on a

$$(56) \quad |g(t)| \leq K \cdot \exp \left(B \left(\inf_{u(z)=t} \rho(z) \right) \right)^k \leq K \cdot \exp(B\sigma(t))^k.$$

Dans l'autre sens, si $f = g \circ u$ et si $|g(t)| \leq L \cdot \exp(C\sigma(t))$, on a

$$(57) \quad |f(z)| = |g(t)| \leq L \cdot \exp(C\sigma(t))^k \leq K \cdot \exp(C\rho(z))^k$$

puisque $\rho(z) \geq \sigma(t)$. Il est clair que le lemme 7 résulte de ces inégalités.

Ensuite si $k = \infty$, cela résulte de ce que, si f est constante sur les fibres de u et si f est holomorphe pour $\rho(z) < R^{-1}$, alors g est holomorphe pour $\sigma(t) < R^{-1}$.

LEMME 8. — *Le théorème 1 est vrai pour $V = \mathbf{C}^n$,*

$$\|z\|_1 = \sum_{j=1}^n |z_j|, \quad \|z\|_\infty = \sup_j |z_j|.$$

Démonstration. — Rappelons que lorsqu'on pose $V = \mathbf{C}^n$, on identifie V' à \mathbf{C}^n , la forme bilinéaire de dualité $\langle z, u \rangle$ devenant $\sum_j z_j \cdot u_j$. Dans ces conditions, la norme duale de $\|\cdot\|_1$ est la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Il suffit de démontrer le théorème avec les espaces $E_{h,\rho}^k$ et $\rho = \|\cdot\|_1$ ou $\rho = \|\cdot\|_\infty$.

Soit $z \rightarrow \exp \langle z, u \rangle$ une exponentielle de l'espace $E_{h,\rho}^k$. La série $\sum_\alpha \frac{z^\alpha \cdot u^\alpha}{\alpha!}$ est sommable dans cet espace fonctionnel, donc

$$T(\exp \langle z, u \rangle) = \sum_\alpha T(z^\alpha) \frac{u^\alpha}{\alpha!}.$$

Nous posons $c_\alpha = T(z^\alpha)$. La série de Taylor de $\mathcal{F}T$ est donc

$$(58) \quad \sum_\alpha c_\alpha \frac{u^\alpha}{\alpha!} = \sum_\alpha b_\alpha \cdot u^\alpha.$$

Soit $f \in E_{h,\rho}^k$ de série de Taylor $\sum_\alpha a_\alpha \cdot z^\alpha$ absolument sommable, donc sommable, dans l'espace fonctionnel vers f d'après la proposition 5. En conséquence :

$$(59) \quad T(f) = \sum_\alpha T(a_\alpha z^\alpha) = \sum_\alpha \alpha! a_\alpha \cdot b_\alpha,$$

la famille des nombres $\alpha! a_\alpha \cdot b_\alpha$ étant sommable. Réciproquement, si b_α est une suite de nombres tels que, pour toute $f \in E_{h,\rho}^k$, $f = \sum_\alpha a_\alpha \cdot z^\alpha$, la

famille des nombres $(\alpha! a_\alpha \cdot b_\alpha)$ est sommable, il est clair que $f \rightarrow \sum_\alpha \alpha! a_\alpha \cdot b_\alpha$ définit une forme linéaire sur $E_{h,\rho}^k$. La continuité résultera des inégalités qui vont suivre. La transformée de Fourier-Borel de cette forme linéaire

continue est donc par (59) et (58) la fonction de série de Taylor à l'origine $\sum_{\alpha} b_{\alpha} \cdot u^{\alpha}$.

Majorons maintenant les b_{α} sous la seule hypothèse de convergence de toutes les séries $\sum_{\alpha} \alpha! a_{\alpha} \cdot b_{\alpha}$. D'après le lemme 5 appliqué avec la norme $\|\cdot\|_1$ il faut calculer v_{α} :

$$(z_1 + \dots + z_n)^{|\alpha|} = \sum_{\alpha = |\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \cdot z^{\alpha},$$

d'où

$$\sup_{\|z\|_1=1} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \cdot |z|^{\alpha} \leq 1$$

et

$$(60) \quad v_{\alpha} \leq \frac{\alpha!}{|\alpha|!}.$$

D'autre part

$$(61) \quad v_{\alpha} \geq \frac{\alpha!}{|\alpha|! \Phi(|\alpha|)}.$$

En conséquence, dans le calcul du type, on peut remplacer v_{α} par $\frac{\alpha!}{|\alpha|!}$. Le type τ d'une fonction f de E^k par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$ sera donc donné par

$$(62) \quad \tau(f) = \overline{\lim} \left(\frac{|\alpha|}{e \cdot k} \right)^{1/k} \cdot \frac{\alpha!}{|\alpha|!} \cdot |a_{\alpha}|^{1/|\alpha|}.$$

Si $f \in E_h^k$, cela veut dire qu'il existe un A_0 tel que, pour tout A tel que $A_0 < A < R$, on a $\tau(f) < A$. Donc, dès que $|\alpha|$ est assez grand, on a

$$(63) \quad |a_{\alpha}| \leq A^{|\alpha|} \left(\frac{e \cdot k}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

d'après la formule (62).

La série $\sum \alpha! a_{\alpha} \cdot b_{\alpha}$ est sommable, donc il existe une constante telle que $|\alpha! a_{\alpha} \cdot b_{\alpha}| < M$, d'où $|b_{\alpha}| \leq |\alpha! a_{\alpha}|^{-1}$. Or on peut prendre

$$a_{\alpha} = A^{|\alpha|} \left(\frac{e \cdot k}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

puisque $A < R$, car, avec ce choix, la série $\sum a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$ a pour somme, d'après le lemme 5, un élément de E_h^k , $\|\cdot\|_1$. Ceci nous donne

$$(64) \quad |b_{\alpha}| < M \cdot A^{-|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|}{e \cdot k} \right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{1}{|\alpha|!}$$

et

$$(65) \quad |b_x|^{1/|\alpha|} \leq M^{1/|\alpha|} \cdot A^{-1} \left(\frac{|\alpha|}{e \cdot k} \right)^{1/k} \cdot \frac{1}{(|\alpha|!)^{1/|\alpha|}}.$$

On a la formule de Stirling :

$$|\alpha|! = \left(\frac{|\alpha|}{e} \right)^{|\alpha|} \cdot \sqrt{2\pi|\alpha|} \cdot \exp(-\delta(|\alpha|)/12)$$

où

$$0 \leq \delta(|\alpha|) \leq 1 \quad [2],$$

on en tire

$$(66) \quad |b_x|^{1/|\alpha|} \leq M^{1/|\alpha|} \cdot (\sqrt{2\pi|\alpha|} \cdot \exp \delta(|\alpha|)/12)^{1/|\alpha|} \\ \times \left\{ \frac{|\alpha|}{e \cdot (1-1/k)^{-1}} \right\}^{(-1+1/k)k^{1/k}} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-(1-1/k)} \cdot A^{-1}.$$

On a bien

$$\lambda(k)^{-1} = \frac{k^{1/k}}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{1-1/k}}.$$

L'inégalité (66) ayant lieu quel que soit $A < R$, il s'ensuit que

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha} \cdot z^{\alpha} \in E_{0, (\lambda(k), R)^{-1}, || \cdot ||_{\infty}}^{k'}.$$

Réciproquement, si $\sum_{\alpha} b_{\alpha} \cdot z^{\alpha} \in E_{0, (\lambda(k), R)^{-1}, || \cdot ||_{\infty}}^{k'}$, ceci veut dire que, pour tout $A < R$, on a

$$(67) \quad |b_{\alpha}| \leq M(A) \left(\frac{e \cdot k'(\lambda(k) \cdot A)^{-k'}}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|/k'}.$$

Si $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$ appartient à $B_{A', || \cdot ||_1}$, on a

$$(68) \quad |a_{\alpha}| \leq \|f\|_{A', || \cdot ||_1} \left(\frac{e \cdot k(A^k)}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|/k} \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!},$$

donc la série de terme général $|\alpha|! a_{\alpha} \cdot b_{\alpha}|$ a son terme majoré par

$$M(A) \cdot \|f\|_{A', \rho} \left(\frac{e}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \left(\frac{A}{A'} \right)^{|\alpha|},$$

donc

$$(69) \quad \left| \sum_{\alpha} |\alpha|! a_{\alpha} \cdot b_{\alpha} \right| \leq M(A) \cdot \|f\|_{A', || \cdot ||_1} \sum_{\alpha} \sqrt{2\pi|\alpha|} \cdot \left(\frac{A}{A'} \right)^{|\alpha|}, \\ \left| \sum_{\alpha} \alpha! a_{\alpha} \cdot b_{\alpha} \right| \leq K \cdot M(A) \cdot \|f\|_{A', || \cdot ||_1}.$$

Ce qui montre que la forme linéaire ainsi définie est continue sur chaque $B_{\mathcal{A}, || ||_1}$, donc sur $E_{\mathcal{A}, || ||_1}^k$, donc que l'application de Fourier-Borel envoie le dual de $E_{R, || ||_1}^k$ sur $E_{0, (\lambda(k), R)^{-1}, || ||_\infty}^{k'}$.

De façon analogue, on verra qu'elle envoie le dual de $E_{R, || ||_\infty}^k$ sur $E_{0, (\lambda(k), R)^{-1}, || ||_1}^{k'}$. Le lemme 8 est démontré.

Notons qu'il était évidemment possible de commencer par les inégalités (67) à (69), puis d'appliquer le lemme 6. Mais nous avons voulu montrer en outre la propriété que, si la série $\sum \alpha! a_x \cdot b_x$ converge pour toute $f \in E_{R, \rho}^k$ où ρ est une norme de Reinhardt, alors les b_x sont les coefficients de Taylor de la transformée de Fourier-Borel d'un élément du dual de cet espace. Quant à la notion de convergence de départ pour la série, elle est indifférente, car on peut toujours remplacer a_x par $|a_x| \cdot \frac{\bar{b}_x}{|b_x|}$, donc la série doit toujours être sommable.

LEMME 9. — Soit u une application linéaire injective de V dans W , deux espaces normés complexes de dimension finie. On suppose que si σ est la norme de V , ρ celle de W ,

$$\rho(u(e)) = \sigma(e) \quad \text{pour tout } e \text{ de } V.$$

Soit u' l'application transposée, surjective de W' sur V' .

Si $T \in (E_{0, R, \sigma}^k)'$ [resp. $T \in (E_{R, \sigma}^k)'$], on définit $u(T)$ par $u(T)(f) = T(f \circ u)$ pour toute $f \in E_{0, R, \rho}^k$ (resp. $f \in E_{R, \rho}^k$). On a la formule

$$(70) \quad \mathcal{F}(u(T)) = \mathcal{F}(T) \circ u'.$$

Démonstration. — Pour tout $f' \in F'$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(T))(f') &= u(T)(f \mapsto \exp \langle f, f' \rangle) \\ &= T(\exp \langle u(f), f' \rangle) = T(e \mapsto \exp \langle e, u'(f') \rangle) = \mathcal{F} T \circ u'(f'). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

LEMME 10. — Mêmes hypothèses qu'au lemme 9, c'est-à-dire que $V \subset W$ est un sous-espace vectoriel normé de W . L'application de restriction de $E_{R, \rho}^k(W)$ [resp. $E_{0, R, \rho}^k(W)$] à V est surjective sur $E_{R, \sigma}^k(V)$ [resp. $E_{0, R, \sigma}^k(V)$].

Démonstration. — On peut utiliser les résultats de L. HÖRMANDER [9], mais ce lemme est de nature très élémentaire. On va utiliser le résultat suivant bien classique quand $n = 1$.

LEMME 11. — A f holomorphe au voisinage de l'origine de W et de série de Taylor $\sum_{\alpha} a_x \cdot z^x$, on associe la série de Taylor $\sum_{\alpha} \left(\frac{|\alpha|}{k \cdot e} \right)^k \cdot a_x \cdot z^x = \Theta_k(f)$.

Soit ρ une norme complexe. Si $f \in E_{0,R,\rho}^k(W)$ [resp. $f \in E_{R,\rho}^k(W)$], $\Theta_k(f)$, regroupée en série de polynômes homogènes $\sum_n \left(\frac{n}{k \cdot e}\right)^k \cdot P_n(f; z)$, converge dans $E_{0,R,\rho}^\infty(W)$ [resp. dans $E_{R,\rho}^\infty(W)$] vers $S_k(f)$. L'application $f \rightarrow S_k(f)$ établit un isomorphisme entre $E_{0,R,\rho}^k(W)$ et $E_{0,R,\rho}^\infty(W)$ [resp. entre $E_{R,\rho}^k(W)$ et $E_{R,\rho}^\infty(W)$] qui commute avec l'opération de restriction à un sous-espace complexe de W ; S_k ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées.

Démonstration. — Si $f \in E_{0,R,\rho}^k$,

$$(71) \quad u_n \leq \|f\|_{A,\rho} \left(\frac{e \cdot k}{n} A^k\right)^{n/k} \text{ pour tout } A > R \text{ d'après (39),}$$

donc

$$(72) \quad \left| \left(\frac{n}{k \cdot e}\right)^k \cdot u_n \right| \leq \|f\|_{A,\rho} \cdot A^n \text{ pour tout } A > R,$$

donc $\sum_n \left(\frac{n}{k \cdot e}\right)^k \cdot P_n(f; z)$ est une série convergeant uniformément absolument sur tout compact de l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$. Réciproquement, si une série $\sum_n Q_n(z)$ de polynômes homogènes converge uniformément sur tout compact de l'ouvert $\rho(z) < R^{-1}$, on a

$$(73) \quad \sup_{\rho(z) \leq 1} |Q_n(z)| \leq M(A) \cdot A^n \text{ pour tout } A > R.$$

Donc la série de polynômes $P_n(f; z) = \left(\frac{k \cdot e}{n}\right)^k \cdot Q_n$ converge dans $E_{0,R,\rho}^k$.

Ceci démontre l'isomorphisme dans le premier cas. Il en est exactement de même dans l'autre cas. Enfin la restriction de $P_n(f; z)$ à V , si V est une sous-variété complexe de W , est la partie homogène de degré n du développement de la restriction de f à V . Il en résulte la commutation de l'opération de restriction avec S_k . Un polynôme homogène P , de degré n , est caractérisé par le fait suivant, $P(\lambda \cdot z) = \lambda^n P(z)$, parmi les fonctions entières et $S_k(P) = \left(\frac{n}{k \cdot e}\right)^k \cdot P$ ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées. Ceci reste vrai pour toute fonction.

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme 10. — Appliquant S_k , on est ramené au fait suivant bien connu (H. CARTAN) : Si Ω est un ouvert convexe (resp. un compact convexe) de W , espace vectoriel complexe de dimension finie, et si V est un sous-espace linéaire de W , la restriction à $V \cap \Omega$ de $H(\Omega)$ est égale à l'espace des fonctions holomorphes dans l'ouvert $V \cap \Omega$ de la variété V .

On peut donner une démonstration élémentaire de cette propriété basée sur la représentation intégrale de J. LERAY (formule (110)) du moins dans les hypothèses que nous venons d'adopter.

LEMME 12. — Soit $V \subset W$, sous-espace vectoriel normé de W , espace vectoriel complexe de dimension finie. On note par ρ la norme de V , par σ celle de W . Les polynômes nuls sur V sont denses dans le sous-espace des fonctions de $E_{R,\sigma}^k(W)$ [resp. $E_{0,R,\sigma}^k(W)$] nulles sur V .

Démonstration. — Il suffit de démontrer ce lemme quand V est un hyperplan. On choisit des coordonnées, et l'on suppose que V est de la forme $z_n = 0$. Si f entière s'annule sur V , elle est de la forme $f = z_n \cdot g$. Il reste à voir que $g \in E_{R,\sigma}^k(W)$ [resp. $g \in E_{0,R,\sigma}^k(W)$]. Soit $\Phi(\zeta)$ holomorphe au voisinage du disque $|\zeta| \leq 1$. Par l'inégalité de Schwarz, on sait que

$$(74) \quad |\Phi(\zeta)| \leq |\zeta| \cdot \sup_{|\zeta'|=1} |\Phi(\zeta')|.$$

Donc, appliquant ceci à $\Phi(\zeta) = f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta \cdot z_n)$, on a

$$(75) \quad |g(z)| \leq \sup_{|\zeta'|=1} |f(z_1, \dots, \zeta' \cdot z_n)| \leq K \cdot \exp(A(\rho(z) + \alpha))^k$$

si $|f(z)| \leq K \cdot \exp(A\rho(z))^k$, où

$$\alpha = \sup_{|\zeta'|=1} \rho((0, \dots, 0, \zeta')),$$

ce qui assure évidemment que g appartient au même espace fonctionnel que f . Maintenant g est limite d'une suite P_n de polynômes dans $E_{R,\sigma}^k(W)$ [resp. $E_{0,R,\sigma}^k(W)$] (proposition 4), donc $f = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot P_n$.

C. Q. F. D.

LEMME 13. — Soient $V \subset W$, un sous-espace vectoriel normé de W , espace vectoriel complexe de dimension finie, et ρ, σ les normes de V et W . Soit u l'injection de V dans W . Alors $\Theta \in (E_{R,\sigma}^k(W))'$ [resp. $\Theta \in (E_{0,R,\sigma}^k(W))'$] est de la forme $\Theta = u(T)$ où $T \in (E_{R,\rho}^k(V))'$ [resp. $T \in (E_{0,R,\rho}^k(V))'$] si et seulement si $\mathcal{F}\Theta$ est constante sur les fibres de u' . Il revient au même de dire que $\Theta(f) = 0$ pour toute fonction f de $E_{R,\rho}^k(W)$ [resp. de $E_{0,R,\rho}^k(W)$] et nulle sur V .

Démonstration. — Notons par r l'application de restriction, qui admet $(T \mapsto u(T))$ comme transposée. L'application est surjective d'après le lemme 8, donc u a une image fermée, car nos espaces sont simultanément des (ωS) ou des $(\mathcal{F}S)$ [7]. En conséquence, cette image est connue par son orthogonal, à savoir le noyau de r . Il reste à voir que $\Theta(f) = 0$ pour toute f telle que $r(f) = 0$ équivaut à : $\mathcal{F}\Theta$ est constante sur les fibres

de u' . Or $\Theta(f) = 0$ si et seulement si, d'après le lemme 12, $\Theta(p) = 0$ pour tout polynôme p nul sur V .

Si l'on choisit un système de coordonnées (z_1, \dots, z_n) , V , défini par $z_n = \dots = z_{n-k+1} = 0$, alors $\mathcal{F}\Theta$ ne dépend pas des dernières coordonnées. Réciproquement, si $\mathcal{F}\Theta$ ne dépend pas des dernières coordonnées, cela signifie que sa série de Taylor à l'origine ne dépend pas des k dernières variables, ce qui d'après la formule (58) et la définition des c_x signifie que Θ est orthogonale à tous les polynômes z^α où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ l'un des α_j pour $j \geq n - k + 1$ étant différent de zéro, donc est orthogonale à tout polynôme s'annulant sur V .

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème 1. — Soit ρ une norme complexe, on peut trouver ρ_1 , norme quotient d'une norme $\sum_{i=1}^N |z_i|$ aussi voisine qu'on peut de ρ , telle par exemple que $\rho \leq \rho_1 \leq (1 + \varepsilon)\rho$ (cf. [16]).

Nous notons l'ensemble des telles normes ρ_1 par \mathcal{Q} . Soit q l'application surjective de l'espace $(\mathbf{C}^N, \|\cdot\|_1)$ sur l'espace (V, ρ_1) , de passage au quotient, et soit q' sa transposée, injective de (V', ρ_1') dans $(\mathbf{C}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

D'après le lemme 8, la transformation de Fourier-Borel établit un isomorphisme entre $E_{R, \|\cdot\|_1}^k(\mathbf{C}^N)$ et $(E_{0, (\lambda(k), R)'}^{k'}(\mathbf{C}^N))'$. D'après le lemme 7, $E_{R, \rho_1}^k(V)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de $E_{R, \|\cdot\|_1}^k(\mathbf{C}^N)$ constantes sur les fibres de q . Soit f un élément de cet espace. Il existe un élément Θ de $(E_{0, (\lambda(k), R)'}^{k'}(\mathbf{C}^N))'$ tel que $\mathcal{F}\Theta = f$. Alors nous savons que Θ est de la forme $q'(T)$ où $T \in (E_{0, (\lambda(k), R)'}^{k'}(V'))'$ grâce au lemme 13. Enfin, grâce à la formule du lemme 9, on a $f = \mathcal{F}T \circ q$ ce qui montre que \mathcal{F} est injective de $(E_{0, (\lambda(k), R)'}^{k'}(V'))'$ sur $E_{R, \rho_1}^k(V)$. Le théorème est démontré avec ρ_1 . Sa validité en résulte pour toute norme complexe car, par exemple, du cas déjà démontré, on déduit

$$(76) \quad (E_{0, R, \rho}^k)' = \bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{Q} \\ \sigma \geq \rho}} E_{(\lambda(k), R)'}^{k', \sigma'} = E_{(\lambda(k), R)'}^{k', \rho'}.$$

Tous les autres cas s'en déduisent de façon analogue.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — « Représentation de Pólya ».

(a) Si $f \in E_{0, R, \rho}^k(V)$, il existe une mesure μ , définie sur V' , telle que, pour tout $A < (\lambda(k), R)'$, $|\mu| \cdot \exp(A\rho'(u))^k$ soit bornée et telle que

$$(77) \quad f(z) = \int_V \exp \langle z, u \rangle d\mu(u) \quad \text{si } k \neq \infty.$$

(b) Sans hypothèse sur k , si $f \in E_{R, \rho}^k(V)$, il existe une mesure μ définie sur V' , telle que $|\mu| \cdot \exp(A \rho'(u))^k$ soit bornée pour un A supérieur à $(\lambda(k) \cdot R)'$ et telle que

$$(78) \quad f(z) = \int_{V'} \exp \langle z, u \rangle d\mu(u).$$

Démonstration. — On utilise les propositions 2 et 3 sur la représentation du dual de

$$E_{(\lambda(k) \cdot R)', \rho'}^{k'}(V') \quad [\text{resp. de } E_{0, (\lambda(k) \cdot R)', \rho'}^{k'}],$$

puis le théorème 1.

C. Q. F. D.

Dans l'article [17], j'ai énoncé un lemme de décomposition (p. 42) manifestement erroné. Il est aisé de le reformuler de façon raisonnable. Je m'inspirais du classique lemme de décomposition de A.J. MACINTYRE [2] (p. 80).

LEMME 14 (MACINTYRE). — Supposons V' recouvert par des cônes convexes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ de sommet de l'origine et d'intérieurs non vides. Soit Γ_j^0 le cône dual, c'est-à-dire le cône des z tels que $\operatorname{Re} \langle z, u \rangle \leq 0$ pour tout $u \in \Gamma_j$; on notera de façon plus générale par Γ_j^z le cône défini par

$$(79) \quad \Gamma_j^z = \{z \mid \operatorname{Re} \langle z, u \rangle \leq \alpha \rho'(u) \rho(z), \forall u \in \Gamma_j\}.$$

Soit maintenant $f \in E_{R, \rho}^k(V)$ [resp. $f \in E_{0, R, \rho}^k(V)$]. Il existe des fonctions f_j telles que:

$$1^\circ \quad f = \sum_j f_j;$$

$$2^\circ \quad f_j \in E_{R, \rho}^k(V) \quad [\text{resp. } f_j \in E_{0, R, \rho}^k(V)];$$

$$3^\circ \quad f_j \text{ est bornée sur } \Gamma_j^0. \text{ Plus généralement si } k \neq 1, \infty, \text{ pour } z \in \Gamma_j^z.$$

$$(80) \quad |f_j(z)| \leq K_j(B) \cdot \exp(\lambda(k')^{-1} \cdot \alpha \cdot B \cdot \rho(z))^k,$$

pour tout $B > R$ dans le second cas.

$$(81) \quad |f_j(z)| \leq K_j(B) \cdot \exp((\lambda(k')^{-1} \cdot \alpha \cdot B) \cdot \rho(z))^k,$$

pour un $B < R$ dans le premier cas.

Lorsque $k=1$, (81) reste valable et on l'appliquera aux deux situations.

Quand $k=\infty$, on doit interpréter comme suit :

Dans le second cas, f_j est holomorphe dans l'ouvert $\rho(z) < R$, dans l'intérieur de l'ensemble $\Gamma_j^z \cap \{\rho(z) \leq 1/R\alpha\}$ et dans l'intérieur de Γ_j^0 .

Dans le premier cas, elle est holomorphe au voisinage du compact $\rho(z) \leq R$ et dans un voisinage de chacun des compacts $\Gamma_j^z \cap \{\rho(z) \leq 1/R\alpha\}$.

Démonstration. — Il est commode d'utiliser la représentation de Pólya contrairement au plan de [17].

On a $f = \mathcal{F} T$ où $T \in (E_{(\lambda(k), R)', \rho'}^k(V))'$ [resp. $T \in (E_{0, (\lambda(k), R)', \rho'}^k(V'))'$]. Si $k' \neq \infty$, donc $k \neq 1$, il est possible dans le second cas de trouver des μ_j , μ_j telle que son support soit dans Γ_j et telle que $|\mu_j| \cdot \exp(A \rho'(u))^{k'}$ soit bornée pour tout $A < (\lambda(k) \cdot R)^{-1}$, telle enfin que $\mu = \sum_j \mu_j$ représente T .

Nous considérons alors

$$f_j = \int \exp \langle z, u \rangle d\mu_j(u).$$

Pour $z \in \Gamma_j^\alpha$, on a $\operatorname{Re} \langle z, u \rangle < \alpha \cdot \rho(z) \cdot \rho'(u)$. Cette intégrale, si $k' \neq 1$, donc $k \neq \infty$, définit une fonction entière.

On a pour tout $A < (\lambda(k) \cdot R)'$:

$$(82) \quad |f_j(z)| \leq \exp(\sup(\alpha \cdot \rho(z) \cdot \rho'(u) - (A \cdot \rho'(u))^{k'})) \\ \times \|\mu_j \cdot \exp(A \cdot \rho'(u))^{k'}\|,$$

soit

$$(83) \quad |f_j(z)| \leq K_j(A) \cdot \exp\left(\left(\frac{\alpha \cdot \rho(z)}{A}\right)^k \left(\frac{1}{k'}\right)^{1/k' - 1} \cdot (1 - 1/k')\right) \\ \leq K_j(A) \cdot \exp\left(\frac{\alpha \cdot \lambda(k')^{-1}}{A} \cdot \rho(z)\right)^k.$$

Lorsque $k = \infty$, on voit que l'intégrale converge lorsque

$$\alpha \cdot \rho(z) \cdot \rho'(u) - A \cdot \rho'(u) = (\alpha \cdot \rho(z) - A) \cdot \rho'(u)$$

reste négatif, donc pour

$$\rho(z) < \frac{A}{\alpha} < \frac{1}{R\alpha} \quad \text{dans le cône } \Gamma_j^\alpha.$$

Les autres cas se traitent par des modifications évidentes. La raison de la différence de $k = 1$ avec k fini tient à la proposition 3.

C. Q. F. D.

7. Théorèmes de division.

Partant d'une remarque que m'avait faite B. MALGRANGE, je vais démontrer les théorèmes de division sur les fonctions entières, dont nous avons besoin, en utilisant le fait que F/G est sousharmonique sur les droites complexes issues de l'origine. En fait, V. AVANISSIAN [1], en utilisant une idée de P. LELONG et les propriétés des moyennes des fonctions plurisousharmoniques étudiées par celui-ci dès 1950 [11], apporte une simplification notable en donnant une démonstration fondée sur les seules propriétés des moyennes. La méthode que j'avais donnée

dans [17] passait par l'intermédiaire des produits canoniques à une variable [2] et, pour passer au cas de n variables, utilisait la structure des indicatrices de croissance.

Si g est une fonction définie dans le plan complexe (je n'ai pas dit une fonction holomorphe!), nous noterons $M(g; z_0, r)$ la moyenne de g sur le disque de centre z_0 et de rayon r par rapport à la mesure de Lebesgue.

LEMME 15 (*module minimum*). — Soit $\zeta \mapsto G(\zeta)$ une fonction entière d'une variable complexe ζ et satisfaisant à une majoration,

$$|G(\zeta)| \leq K \cdot \exp(A|\zeta|)^k, \quad G(0) \neq 0.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$(84) \quad M(\log |G|; z; \lambda |z|) \geq \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 G(0) + \dots \\ + \left(1 - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 \right) [A'(1+\lambda)|z|]^k$$

pour tout $A' > A$ et $|z|$ assez grand, précisément $|z| \geq z_0(K, A')$ où $z_0(K, A') = \left(\frac{\log(\sup(K, 1))}{A'^k - A^k} \right)^{1/k}$.

Démonstration. — Posons $\nu = \log |G|$. Pour $A' > A$ et si $|z| \geq \left(\sup \left(\frac{\log K}{A'^k - A^k}, 0 \right) \right)^{1/k}$, on a

$$(85) \quad \nu - (A' \cdot |z|^k) < 0.$$

Supposons ceci réalisé, et posons $R = (1+\lambda) \cdot |z|$ où $\lambda > 0$, puis

$$(86) \quad \nu' = \nu - (A' \cdot R)^k,$$

on a l'inégalité

$$(87) \quad R^2 \cdot M(\nu'; 0; R) \leq (\lambda |z|)^2 \cdot M(\nu'; z; \lambda \cdot |z|),$$

car on intègre une fonction négative.

D'autre part, ν' est une fonction sousharmonique, donc on a

$$(88) \quad R^2 (\log |G(0)| - (A' \cdot R)^k) \leq R^2 \cdot M(\nu'; 0; R).$$

Il vient donc

$$(89) \quad \lambda^2 [M(\nu; z; \lambda |z|) - (A' \cdot R)^k] \geq (1+\lambda)^2 (\log |G(0)| - (A' \cdot R)^k),$$

d'où

$$(90) \quad M(\nu; z; \lambda |z|) \geq \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 \cdot \log |G(0)| \\ + \left(1 - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 \right) ((1+\lambda) A' |z|)^k.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2 [1]. — Soit F entière dans le plan complexe. On suppose $|F(z)| \leq K \cdot \exp(A|z|)^k$. Soit G entière telle que F/G soit entière, $G(o) \neq 0$, et telle que $|G(z)| \leq L \cdot \exp(B|z|)^k$. Pour tout $A' > A$, $B' > B$ et $|z| \geq \sup(z_0(K, A'), z_0(L, B'))$, on a l'inégalité

$$(90') \quad |F/G(z)| \leq |G(o)|^{-\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2} \\ \times \exp\left(\left[(A'(1+\lambda))^k + ((1+\lambda)B')^k \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 - 1\right)\right]^{1/k} |z|\right)^k.$$

Démonstration. — La fonction F/G étant entière, $\log |F/G|$ est sous-harmonique, donc

$$(91) \quad \log |F/G(z)| \leq M(\log |F/G|; z, \lambda |z|)$$

et il vient

$$(92) \quad M(\log |F/G|; z, \lambda |z|) \leq M(\log |F|; z, \lambda |z|) - M(\log |G|; z, \lambda |z|).$$

Ceci nous donne d'après le lemme 15, pour $|z| \geq \sup(z_0(K, A'), z_0(L, B'))$

$$(90'') \quad \log |F/G(z)| \leq \left((A'(1+\lambda))^k + \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 - 1\right) (B'(1+\lambda))^k\right) \\ \times |z|^k - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 \log |G(o)|.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — Soient F et G deux fonctions entières définies sur V , d'ordre fini k et de types A et B relativement à une norme complexe ρ . Si F/G est entière, c'est une fonction entière d'ordre fini k et de type inférieur à

$$(93) \quad \inf_{\lambda} \left[(A(1+\lambda))^k + (B(1+\lambda))^k \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 - 1\right) \right]^{1/k}.$$

En particulier, si $B = 0$, le type de F/G est égal à A .

Démonstration. — On a des majorations

$$|F(z)| \leq K(A') \cdot \exp(A'\rho(z))^k, \quad |G(z)| \leq L(B') \cdot \exp(B'\rho(z))^k$$

pour tout $A' > A$, $B' > B$. Soit z_0 un point où $G(z_0) \neq 0$. On a

$$(94) \quad \rho(z) - \rho(z_0) \leq \rho(z + z_0) \leq \rho(z) + \rho(z_0),$$

donc

$$(95) \quad \lim_{\rho(z) \rightarrow \infty} \frac{\rho(z + z_0)}{\rho(z)} = 1.$$

Donc les fonctions $F(z-z_0)$ et $G(z-z_0)$ sont d'ordre k et de types inférieurs à A et B par rapport à ρ . Posons (c'est la méthode de MALGRANGE [14]) :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_z(\zeta) = F(\zeta \cdot (z-z_0)) \\ g_z(\zeta) = G(\zeta \cdot (z-z_0)) \end{array} \right\} \rho(z-z_0) = 1.$$

On a, pour tout couple $A' > A$, $B' > B$, ζ assez grand mais uniformément en z :

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f_z(\zeta)| \leq K'(A') \cdot \exp(A'|\zeta|)^k, \\ |g_z(\zeta)| \leq L'(B') \cdot \exp(B'|\zeta|)^k. \end{array} \right.$$

Donc d'après l'inégalité (93) :

$$(98) \quad \log |f_z(\zeta)/g_z(\zeta)| \leq \left((A'(1+\lambda))^k + \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) (B'(1+\lambda))^k \right) |\zeta|^k - \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 \log |G_{z_0}(0)|$$

pour $|\zeta| \geq (z_0(K', A'), z_0(L', B'))$.

Donc $F(z-z_0)/G(z-z_0)$ est de type inférieur ou égal à

$$\left((A'(1+\lambda))^k + (B'(1+\lambda))^k \left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) \right)^{1/k}$$

quel que soit $A' > A$, $B' > B$, $\lambda > 0$. Il en est de même pour $F/G(z)$. Notons par $\alpha(H)$ le type d'une fonction H .

Si $B=0$, λ étant fixé ainsi que A' , il résulte de (93) que $\alpha(F/G) \leq A'(1+\lambda)$, donc :

$$(99) \quad \alpha(F/G) \leq A.$$

Mais on a clairement

$$(100) \quad \alpha(G \cdot (F/G))^k \leq \alpha(F/G)^k + \alpha(G)^k,$$

d'où l'égalité.

C. Q. F. D.

Ce théorème a été démontré pour la première fois à n -variables par B. MALGRANGE (type exponentiel) et L. EHRENPREIS (ordre fini) sous la forme : Le quotient de deux fonctions entières d'ordre fini et de type moyen est une fonction entière d'ordre fini et de type moyen. Le cas très utile de $B=0$ pour une variable est un théorème de G. PÓLYA (cf. [2], p. 191, et [20]).

L'extension aux fonctions de n variables de la théorie des produits canoniques, donnée par P. LELONG [11], permet une méthode directe, prolongeant à n variables celle de LINDELÖF.

8. Applications aux équations de convolution.

Considérons l'espace $E^k(V)$ [resp. $E_0^k(V)$]. Son dual, comme nous l'avons vu, est une algèbre de convolution.

Soit $T \in (E^k(V))'$ [resp. $T \in (E_0^k(V))'$]. Nous nous proposons de montrer que les résultats précédents ont des conséquences importantes pour l'équation linéaire $\check{T} \star X = Y$, où $X \in E_0^k$ (resp. $X \in E_0^k$), $Y \in E^k$, (resp. $Y \in E_0^k$). L'opérateur $X \rightarrow \check{T} \star X$ est évidemment défini par la relation

$$(101) \quad \langle \check{T} \star X, \Theta \rangle = \langle X, T \star \Theta \rangle.$$

L'application transposée de $X \rightarrow \check{T} \star X$ est alors par définition l'application $\Theta \rightarrow T \star \Theta$ de $(E^k(V))'$ dans $(E^k(V))'$ [resp. de $(E_0^k(V))'$ dans $(E_0^k(V))'$]. La méthode que nous suivons est celle de SCHWARTZ [21], [14].

Utilisons l'isomorphisme de Fourier-Borel :

$$(102) \quad \begin{cases} \mathcal{F}((E_0^k(V))') = E^{k'}(V'), \\ \mathcal{F}((E^k(V))') = E_0^{k'}(V'). \end{cases}$$

L'application devient $\mathcal{F}\Theta \rightarrow \mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}\Theta$. C'est une application injective, d'autre part elle est d'image fermée, grâce au corollaire du théorème 2.

En effet, si x est un point de V' au voisinage duquel une fonction de $E_0^{k'}(V')$ [resp. $E^{k'}(V')$] est holomorphe et si f_x est un filtre convergent vers f_0 , $\mathfrak{S}_x(f_x)$ la série de Taylor en x de f_x converge vers $\mathfrak{S}(f_0)$ pour la topologie de la convergence simple des coefficients. Donc il en résulte qu'une limite de fonctions de la forme $\mathcal{F}T \cdot f_x$ a sa série de Taylor, en chaque point où elle existe, divisible par celle de $\mathcal{F}T$. Soit $g \in E^{k'}(V')$ [resp. $g \in E_0^{k'}(V')$] telle que cette propriété soit vraie en chaque point de V' où toutes les fonctions de $E^{k'}(V')$ [resp. de $E_0^{k'}(V')$] sont holomorphes. Alors g/T est dans tous les cas holomorphe en tous ces points [14], et donc, si $k' = \infty$, $g/T \in E^{k'}(V')$ [resp. $g/T \in E^{k'}(V')$], et si $k' \neq \infty$, $g/T \in E^{k'}(V')$ [resp. $g/T \in E_0^{k'}(V')$] d'après le corollaire du théorème 2, c'est-à-dire que g est un multiple de T .

Nous avons donc montré les deux propriétés. Dans $E^{k'}(V')$ [resp. dans $E_0^{k'}(V')$] :

(a) L'idéal des multiples de $\mathcal{F}T$ est fermé, donc l'application $\Theta \rightarrow T \star \Theta$ est injective et d'image fermée, ce qui entraîne, nos espaces étant soit des $(\mathcal{O}\mathcal{S})$, soit des $(\mathcal{F}\mathcal{S})$, que sa transposée est surjective ⁽³⁾.

(b) Sauf dans la situation de $E^\infty(V')$, une fonction appartient à cet idéal si, et seulement si, sa série de Taylor en tout point de V' est divi-

⁽³⁾ La théorie des Fréchet-Schwartz et des duals de Fréchet-Schwartz est élémentaire.

sible par celle de $\mathcal{F}T$; dans le cas de $E^\times(V')$, c'est vrai si, et seulement si, sa série de Taylor à l'origine est divisible par celle de $\mathcal{F}T$. Mais ceci, selon MALGRANGE [14], veut dire qu'une telle fonction est orthogonale à l'ensemble des exponentielles polynômes de l'équation $\check{T} \star X = 0$. Donc cet orthogonal est juste, $T \star (E^k)'$ [resp. $T \star (E_0^k)'$].

Il vient donc le théorème suivant :

THÉORÈME 3.

(a) L'équation $\check{T} \star X = f$, où $f \in E^k(V)$ [resp. $f \in E_0^k(V)$] si $T \in (E^k(V))'$ [resp. $T \in (E_0^k(V))'$], admet toujours une solution dans le même espace fonctionnel.

(b) Toute solution de l'équation $\check{T} \star X = 0$ est limite des solutions exponentielles polynômes de l'équation homogène.

Ce théorème, pour $k = \infty$ dans le premier cas est dû à B. MALGRANGE [14]. Il est possible de préciser le type de X en fonction de celui de f à l'aide du théorème 2.

Maintenant, appelons *opérateur différentiel* (à coefficients constants) *relativement à l'ordre k tout élément T de $(E^k)'$* .

Donc, un opérateur différentiel relativement à l'ordre k est un opérateur dont la *transformée de Fourier-Borel* est une fonction entière d'ordre k' et de type zéro. Une équation aux dérivées partielles à coefficients constants est dans ce cas quel que soit l'ordre.

Les raisonnements précédents s'adaptent immédiatement. Le corollaire du théorème 2 dans le cas $B = 0$ donne donc ceci :

THÉORÈME 4. — Si T est un opérateur différentiel d'ordre infini relativement à l'ordre k alors, pour tout R , tout ρ ,

(a) $\check{T} \star E_{0,R,\rho}^k \subset E_{0,R,\rho}^k$ (resp. $\check{T} \star E_{R,\rho}^k \subset E_{R,\rho}^k$).

(b) L'application $f \rightarrow \check{T} \star f$ est surjective dans chacun de ces espaces fonctionnels.

(c) Les exponentielles polynômes du noyau sont totales dans le noyau.

Démonstration. — Traitons seulement de $E_{R,\rho}^k$. L'assertion (a) est évidente grâce à l'isomorphisme de Fourier-Borel. Le point (b), ainsi que (c), résultent des faits suivants :

$$(E_{R,\rho}^k(V))' \cong E_{0,(\lambda,(k),R)'\rho'}^k(V')$$

et une fonction de $E_{0,(\lambda,(k),R)'\rho'}^k(V')$ est de la forme $f \cdot \mathcal{F}T$, où f appartient au même espace si, et seulement si, elle est divisible en chaque point par $\mathcal{F}T$. Remarquons à nouveau que ce théorème s'applique à toutes les équations aux dérivées partielles et à coefficients constants pour tout $k \geq 1$.

Voici deux cas extrêmes :

$k = \infty : E_{B, \rho}^k$ (resp. $E_{0, B, \rho}^k$) est l'espace des fonctions holomorphes au voisinage du compact $\rho(z) \leq R^{-1}$ [resp. dans l'ouvert $\rho(z) \leq R^{-1}$]. T est un opérateur différentiel d'ordre infini.

$k = 1 : E_{0, B, \rho}^k$ est l'espace des fonctions entières de ρ -type exponentiel R . On pourra prendre pour T n'importe quel opérateur aux différences et même par exemple un opérateur du type suivant :

$$(103) \quad T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \partial(z_n),$$

où $|\lambda_n| \rho(z_n)$ est à décroissance plus rapide que toute exponentielle. On aura dans ce cas :

Étant donné f du type exponentiel et de ρ -type R , il existe g du même type telle que

$$(104) \quad f = \sum_n \lambda_n \cdot g(z - z_n),$$

la série convergeant dans $E_{0, B, \rho}^1$ et *a fortiori* pour la convergence normale.

Notons que si $\mathcal{F}T$ est sans zéros, il y a unicité de la solution. Il y a évidemment de tels opérateurs non triviaux, c'est-à-dire distincts du cas de la translation dès que $k < 2$, à savoir les T telles que $\mathcal{F}T = \exp \sigma(z)$ où σ est un polynôme de degré supérieur à 1.

Dans le même ordre d'idées, on a, par exemple, le théorème d'unicité suivant :

PROPOSITION 7. — Soit μ une mesure positive sur R^n , telle que $\mu \exp A\rho(x)$ soit bornée pour un A . Il existe un B tel que toute solution de l'équation

$$\mu \star f = 0 \quad \text{où } f \in E_{B, \rho}^1 \quad (\text{resp. } f \in E_{0, B, \rho}^1)$$

est la solution nulle. En plus, si $\mu \cdot \exp A\rho(x)$ est bornée pour tout $A > 0$, l'application $f \mapsto \mu \star f$ est un isomorphisme de $E_{B, \rho}^1$ sur lui-même (resp. de $E_{0, B, \rho}^1$ sur lui-même).

Le nombre B est évidemment le rayon de la plus grande ρ -boule ne contenant aucun zéro de $\mathcal{F}\mu$, et $\mathcal{F}\mu(0) > 0$, donc $B > 0$. En exemple, prenons la mesure $e^{-|X|^2}$ où $|X|$ est une norme euclidienne, dX désignant la mesure de Lebesgue attachée à la forme quadratique $|X|^2$.

L'application

$$(105) \quad f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} f(z + u) \cdot e^{-|u|^2} du$$

a pour inverse

$$(106) \quad g \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} g(z + iu) \cdot e^{-|u|^2} du \quad (f, g \in E^1).$$

Dans le cas des espaces $E_{0,R,\rho}^1$ (resp. $E_{R,\rho}^1$), il convient de noter que les résultats connus sont beaucoup plus complets. En effet, d'après H. CARTAN [4], un idéal fermé dans l'un des espaces E^z, \dots est caractérisé par sa fermeture algébrique, donc, dans ces espaces, *l'ensemble des solutions exponentielles polynômes d'un système homogène quelconque d'équations de convolutions est dense dans l'ensemble de toutes les solutions*. Ce genre de remarque a été utilisé pour la première fois systématiquement par B. MALGRANGE dans son « cours Peccot » au Collège de France.

DEUXIÈME PARTIE.

Compléments dans le cas des fonctions entières de type exponentiel :

La transformée de Laplace projective.

9. L'indicatrice projective de Fantappié.

La lettre V désignant toujours un espace vectoriel complexe de dimension finie, $P(V)$ sera le projectif obtenu à partir de V en lui ajoutant ses points à l'infini, V' sera le dual de V , et $P(V')$ le projectif associé à V' . Nous noterons par (ζ_0, z) les coordonnées homogènes d'un point de $P(V)$, $z \in E$, $\zeta_0 \in \mathbf{C}$, par $(\bar{\zeta}_0, \bar{\zeta})$ celles d'un point de $P(V')$.

L'hyperplan de $P(V)$, associé à $(\bar{\zeta}_0, \bar{\zeta})$, est défini par l'équation

$$(107) \quad \bar{\zeta}_0 \cdot \zeta_0 + \langle z, \bar{\zeta} \rangle = 0,$$

et noté par $\bar{\zeta}$.

Cette correspondance sera dite dualité pour une raison évidente. Soient $z \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$ des coordonnées choisies dans V , et $\bar{\zeta} \rightarrow (\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_n)$ les coordonnées duales dans V' .

Soit

$$(108) \quad \pi(z) = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \quad \bar{\pi}(\bar{\zeta}) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \bar{\zeta}_j dz_1 \wedge \dots \wedge \hat{d\bar{\zeta}}_j \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n$$

et soit

$$(109) \quad \varpi(\bar{\zeta}, z) = \bar{\pi}(\bar{\zeta}) \wedge \pi(z).$$

La forme

$$\frac{\varpi(\bar{\zeta}, z)}{(\langle z, \bar{\zeta} \rangle + \bar{\zeta}_0)^n} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j \bar{\zeta}_j d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge \hat{d\bar{\zeta}}_j \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{(z_1 \bar{\zeta}_1 + \dots + z_n \bar{\zeta}_n + \bar{\zeta}_0)^n}$$

est homogène de degré zéro en $\bar{\zeta}$, donc dans le complémentaire dans $V \times P(V')$ de l'ensemble des points $\langle z, \bar{\zeta} \rangle + \bar{\zeta}_0 = 0$ elle définit une forme différentielle. Nous orientons un ouvert Ω de \mathbf{C}^n par la condition

$$\frac{1}{(2i)^n} \int_{\Omega} \pi(\bar{z}) \wedge \pi(z) \geq 0.$$

Soit maintenant Γ le bord d'un ouvert Ω strictement convexe, supposé régulier, orienté par la formule de Stokes écrite : $\int_{\partial\Omega} \pi = \int_{\Omega} d\pi$.

A tout point z de Γ , on associe l'hyperplan complexe $\bar{\xi}(z)$ passant par z et tangent à Γ . L'image par l'application $z \rightarrow (z, \bar{\xi}(z))$ de Γ est une variété $\sum(\Gamma)$ de $V \times P(V')$ isomorphe à Γ . On oriente cette variété par transport de l'orientation de Γ . Soit alors f une fonction holomorphe au voisinage de Γ . On a la formule démontrée par Jean LERAY [12] :

$$(110) \quad f(u) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\sum(\Gamma)} f(z) \frac{1}{(\langle u, \bar{\xi} \rangle + \bar{\xi}_0)^n} \varpi(\bar{\xi}; z)$$

si $u \in \Omega$. Nous allons l'interpréter.

Soit K un compact de \mathbf{C}^n . Nous désignons par $H(K)$ l'espace $\lim_{\substack{\omega \supset K \\ \omega \rightarrow K}} H(\omega)$ limite inductive, dans la catégorie des espaces localement convexes, des espaces de Fréchet $H(\omega)$. Comme l'application de restriction $H(\omega) \rightarrow H(\omega')$ est compacte, si ω' est relativement compact dans ω , et comme $H(K)$, muni de la topologie de la convergence simple des coefficients des séries de Taylor en chaque point de K , est séparé, il s'ensuit que $H(K)$ est un dual de Fréchet-Schwartz [7] (c'est même un espace nucléaire).

Nous notons par $\bigcup^* K$ la partie ouverte de $P(V')$ formée des hyperplans $\bar{\xi}$ tels que $\bar{\xi} \cap K = \emptyset$.

Soit $T \in H'(K)$. Considérons la fonction

$$(111) \quad z \mapsto \frac{\bar{\xi}_0}{\langle z, \bar{\xi} \rangle + \bar{\xi}_0}$$

qui, étant homogène de degré zéro en $\bar{\xi}$, ne dépend que de l'hyperplan défini par $(\bar{\xi}_0, \bar{\xi})$.

Si $\bar{\xi} \in \bigcup^* K$, c'est une fonction holomorphe de z au voisinage de K , donc elle définit un élément de $H(K)$ que nous noterons encore $z \mapsto \frac{\bar{\xi}_0}{\langle z, \bar{\xi} \rangle + \bar{\xi}_0}$.

On peut prendre la valeur de T sur cet élément.

DÉFINITION (FANTAPPIÉ). — On désigne par indicatrice projective de T la fonction $\bar{\xi} \mapsto \left(T \left(z \mapsto \frac{\bar{\xi}_0}{\langle z, \bar{\xi} \rangle + \bar{\xi}_0} \right) \right)$ définie sur $\bigcup^* K$, et qu'on notera Φ_T .

Il vient le théorème suivant :

THÉORÈME 5 [18]. — *Le dual de $H(K)$ où K est un convexe compact, est isomorphe avec sa topologie forte, par l'application $T \mapsto \Phi_T$ qui, à une fonctionnelle analytique T définie sur K , associe son indicatrice projective, à l'espace $P_0(\overset{*}{\mathbb{G}}K)$ des fonctions holomorphes dans $\overset{*}{\mathbb{G}}K$ et nulles aux points à l'infini de $\overset{*}{\mathbb{G}}K$, ($\xi_0 = 0$), muni de la topologie de la convergence compacte. Ce résultat a été retrouvé par L. A. AÏZENBERG [26].*

Démonstration. — On a le lemme suivant :

LEMME 16. — *K étant un compact quelconque, Φ_T est holomorphe dans $\overset{*}{\mathbb{G}}K$ et nulle à l'infini.*

Démonstration. — On a

$$(112) \quad \Phi_T(\xi) = \xi_0 \cdot T\left(z \mapsto \frac{1}{\langle z, \xi \rangle + \xi_0}\right)$$

des coordonnées étant fixées. Donc si $\langle z, \xi \rangle \neq 0$, on voit que Φ_T s'annule quand ξ_0 s'annule. Ensuite, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \omega_n$, où les ω_n sont des

voisinages ouverts de K . Si j_n est l'application canonique (de restriction) de $H(\omega_n)$ dans $H(K)$, nous noterons par T_n l'application continue $T \circ j_n$. L'espace $H(\omega_n)$ est un sous-espace fermé de $C(\omega_n)$ l'espace des fonctions continues sur ω_n et muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Par Hahn-Banach, il existe une mesure μ_n à support compact dans ω_n et telle que

$$(113) \quad T_n(f) = \int f d\mu_n \quad \text{pour toute } f \in H(\omega_n).$$

Considérons, si $\bar{\xi} \cap \omega_n = \emptyset$, la fonction

$$\left(z \in \omega_n; z \mapsto \frac{\xi_0}{\langle z, \xi \rangle + \xi_0}\right).$$

Par définition, on a

$$\Phi_T(\bar{\xi}) = T_n\left(\left(z \in \omega_n; z \mapsto \frac{\xi_0}{\langle z, \xi \rangle + \xi_0}\right)\right),$$

d'où

$$(114) \quad \Phi_T(\bar{\xi}) = \xi_0 \int \frac{d\mu_n(z)}{\langle z, \xi \rangle + \xi_0}$$

qui est donc manifestement holomorphe en ξ_0, \dots, ξ_n pourvu que $\bar{\xi} \cap \sigma(\mu) = \emptyset$ où $\sigma(\mu)$ désigne le support de μ . Ceci ayant lieu pour tout n ,

Φ_T est holomorphe dans $\oint^* K$.

C. Q. F. D.

LEMME 17. — *Supposons K convexe. Soit ψ une fonction définie sur $\oint^* K$, holomorphe et nulle à l'infini; soit $\bar{f} \in H(K)$: on considère un représentant f de \bar{f} , holomorphe dans un voisinage Ω de K ; soit ω un voisinage strictement convexe à frontière régulière de K inclus dans Ω ; on pose*

$$(115) \quad T_\psi(\bar{f}) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma^{(\omega)}} f(u) \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}} \left(\frac{1}{\xi_0} \psi(\xi) \right) \varpi(u, \xi).$$

Le nombre ainsi défini ne dépend que de \bar{f} , donc ne dépend pas du choix de f , puis de celui de ω , et l'application $\bar{f} \mapsto T_\psi(\bar{f})$ est une forme linéaire continue sur $H(K)$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'expression a un sens. En effet, en dehors de l'infini, $\psi(\xi)/\xi_0$ est de degré -1 en ξ_0 , donc $\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}} (\psi(\xi)/\xi_0)$ est de degré $-n$ en ξ et

$$(116) \quad \omega(\psi)(\xi; u) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}} (\psi(\xi)/\xi_0) \mathfrak{P}(\xi) \wedge \pi(u)$$

est de degré zéro en ξ , ce qui fait que cette forme est bien définie sur $\oint^* K$ privé de ses points à l'infini. En ce qui concerne l'infini, faisant par exemple $\xi_1 = 1$ après choix d'un système de coordonnées, on voit que $\psi(\xi)/\xi_0$, puisque ψ s'annule à l'infini, est holomorphe au voisinage

de tout point à l'infini de $\oint^* K$ tel que $\xi_1 \neq 0$. Il en est de même pour toutes les autres cartes obtenues à partir du système de coordonnées.

Donc $\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}} \left(\frac{1}{\xi_0} \psi(\xi) \right) \mathfrak{P}(\xi)$ est une forme différentielle holomorphe définie sur $\oint^* K$, et l'intégration indiquée en (115) est possible.

La fonction f étant choisie, montrons que l'intégrale ne dépend pas du choix de ω . Pour cela il suffit de vérifier que si $\omega' \subset \omega$,

$$(117) \quad \int_{\Sigma^{(\omega')}} f(u) \cdot \omega(\psi)(\xi, u) = \int_{\Sigma^{(\omega)}} f(u) \cdot \omega(\psi)(\xi, u).$$

Pour cela il suffit, grâce au théorème de Stokes, de vérifier que $\sum(\omega') - \sum(\omega)$ est le bord d'une variété sur laquelle $f(u) \cdot \omega(\psi)(\xi, u)$ est une forme fermée.

Nous considérons un point M_0 intérieur à ω' . Si M est un point sur la frontière de ω , nous considérons la demi-droite (réelle!) issue de M_0 et passant par M , qui rencontre la frontière de ω' en un seul point M' .

Si ξ_M désigne une équation du plan tangent complexe en M à $\sum(\omega)$ et $\xi_{M'}$, une équation du plan tangent complexe en M' à $\sum(\omega')$, au point

$$(118) \quad tM + (1-t)M', \quad 0 < t < 1,$$

la valeur de ξ_M est égale à $(1-t) \cdot \xi_{M'}(M')$, et celle de $\xi_{M'}$ est égale à $t \cdot \xi_{M'}(M)$, donc posant

$$(119) \quad \frac{t\xi_M}{\xi_M(M')} - (1-t) \frac{\xi_{M'}}{\xi_{M'}(M)} = \xi_{M(t)}$$

l'hyperplan d'équation

$$(120) \quad \xi_{M(t)}(z) = 0$$

passé par $M(t)$.

Montrons que cet hyperplan complexe ne rencontre pas K . Pour cela, désignons par Ξ_M une équation réelle de l'hyperplan tangent à $\sum(\omega)$ en M , et par $\Xi_{M'}$ celle de l'hyperplan réel correspondant en M' ; alors posant

$$(121) \quad \Xi_{M(t)} = \left(\frac{t\Xi_M}{\Xi_M(M')} - (1-t) \frac{\Xi_{M'}}{\Xi_{M'}(M)} \right),$$

l'hyperplan réel, d'équation $\Xi_{M(t)}(z) = 0$, contient l'hyperplan complexe $\xi_{M(t)}$, défini par $\xi_{M(t)}$. Il faut voir que cet hyperplan ne contient pas de points de ω' . Mais

$$(122) \quad - (1-t) \frac{\Xi_{M'}(M)}{\Xi_{M'}(M)} < 0,$$

donc

$$(123) \quad \inf_{z \in K} \left(- (1-t) \frac{\Xi_{M'}(z)}{\Xi_{M'}(M)} \right) > 0.$$

De même

$$(124) \quad t \frac{\Xi_M(M')}{\Xi_M(M')} > 0,$$

donc

$$(125) \quad \left(\inf_{z \in K} \frac{t\Xi_M(z)}{\Xi_M(M')} \right) > 0,$$

d'où

$$(126) \quad \inf_{z \in K} \Xi_{M(t)}(z) > 0.$$

Il est clair que (M, t) donne au voisinage de chaque point, où $t \neq 0$, une carte du lieu des points $(M(t), \bar{\xi}_{M(t)})$ qui forme une variété $\sum (\omega, \omega')$ de bord $\sum (\omega') - \sum (\omega)$. Maintenant sur $\sum (\omega, \omega')$, calculons

$$(127) \quad \begin{aligned} d(f(u) \cdot \omega(\psi)(\xi; u)) \\ = d_u' f(u) \wedge \omega(\psi)(\xi; u) + f(u) d_\xi' \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial \bar{z}_0^{n-1}} (\psi/\bar{z}_0) \right) \bar{\omega}(\xi) \\ \wedge \pi(u) + f(u) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial \bar{z}_0^{n-1}} (\psi/\bar{z}_0) d' \bar{\omega}(\xi) \wedge \pi(u). \end{aligned}$$

Le premier terme est nul, car $d'f \wedge \pi(u) = 0$. De la relation $\langle u, \bar{\xi} \rangle + \bar{z}_0 = 0$ on déduit

$$(128) \quad d' \bar{\xi} \wedge \pi(u) = 0,$$

d'où la nullité du second et du troisième terme. Ceci montre l'égalité (117).

En conséquence $T_\psi(f)$ ne dépend que de \bar{f} .

Enfin, ω étant donnée, si $\bar{\omega}' \subset \omega$, ω' strictement convexe à frontière régulière,

$$\int_{\sum (\omega')} f(u) \cdot \omega(\psi)(\xi, u) = T_\psi(\bar{f})$$

est manifestement linéaire continue sur $H(\omega)$. Donc T_ψ est une forme linéaire et continue sur $H(K)$.

C. Q. F. D.

Posons, des coordonnées étant choisies, $c_\alpha = T(z^\alpha)$ si $T \in H'(K)$. On a

$$(129) \quad \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_0 + \bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n} = \bar{z}_0 \cdot \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\frac{\bar{z} z}{\bar{z}_0} \right)^\alpha$$

pourvu que la série converge, ce qui a lieu uniformément dans un voisinage de K si $\sup_j |\bar{z}_j/\bar{z}_0|$ est assez petit. Dans ce cas, la série converge aussi dans l'espace $H(K)$.

D'où

$$\Phi_T(\bar{z}) = \bar{z}_0 \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{\bar{z}^\alpha}{\bar{z}_0^{|\alpha|}} \cdot c_\alpha$$

pourvu que $\bar{\xi}$ soit assez près de l'origine de V' . On fait alors $\xi_0 = 1$, et Φ_T s'exprime dans les coordonnées duales comme suit :

$$(130) \quad \Phi_T(u) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} c_{\alpha} \cdot u^{\alpha}.$$

Soit $\psi \in P_0 \left(\oint^* K \right)$. Considérons, pour calculer les moments c_{α} de T_{ψ} , une sphère Ω de centre l'origine et de rayon R assez grand pour contenir K dans son intérieur. Pour tout $\bar{\xi} \in \oint^* \Omega$, la série de Taylor à l'origine de ψ converge, et ce uniformément sur $\oint^* \Omega$. Si l'on a

$$(131) \quad \psi(u) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot u^{\alpha},$$

il vient

$$(132) \quad (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \bar{\xi}_0^{n-1}} (\psi(\bar{\xi})/\bar{\xi}_0) = \sum_{\alpha} (|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n - 1) a_{\alpha} \frac{\bar{\xi}^{\alpha}}{\bar{\xi}_0^{|\alpha| + n}}.$$

L'hyperplan tangent au point (z_1, \dots, z_n) à la sphère Ω de rayon R et d'équation

$$(133) \quad -R^2 + \sum_{j=1}^n z_j \cdot \bar{z}_j = 0$$

a pour coordonnées projectives :

$$(134) \quad \bar{\xi}_0 = -R^2, \quad \bar{\xi}_j = \bar{z}_j.$$

On a donc à calculer :

$$(135) \quad c_{\beta} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^n} \int_{\partial(\sum z_i \bar{z}_i < R^2)} z^{\beta} \\ \times \sum_{\alpha} (|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n - 1) a_{\alpha} \frac{\bar{z}^{\alpha}}{(-R^2)^{(|\alpha| + n)}} \\ \times \dots \left(\sum_{h=1}^n (-1)^h \bar{z}_h d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge \hat{d\bar{z}_h} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \right) \wedge \pi(z).$$

Vu la convergence absolue uniforme de la série, il suffit d'évaluer chaque terme :

$$(136) \quad \lambda_{\alpha, \beta} = \int_{\partial(\sum z_i \bar{z}_i < R^2)} \frac{(|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n - 1)}{(-R^2)^{(|\alpha| + n)}} z^{\beta} \bar{z}^{\alpha} \varpi(\bar{z}) \wedge \pi(z).$$

On peut appliquer la formule de Stokes, le bord étant orienté comme il faut, et faire $R=1$ en vertu de la formule (117), d'où

$$(137) \quad \lambda_{\alpha, \beta} = \int_{\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j < 1} \frac{(|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n - 1)}{(-1)^{(|\alpha| + n)}} d(z^\beta \bar{z}^\alpha \bar{z} \wedge \pi(z)),$$

$$(138) \quad \lambda_{\alpha, \beta} = - \int_{\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j < 1} \frac{(|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n)}{(-1)^{(|\alpha| + n)}} z^\beta \bar{z}^\alpha \pi(\bar{z}) \wedge \pi(z).$$

Ceci donne, avec nos conventions d'orientation :

$$(139) \quad \begin{cases} \lambda_{\alpha, \beta} = 0 & \text{si } \beta \neq \alpha, \\ \lambda_{\alpha, \alpha} = -(2i)^n \frac{(|\alpha| + 1) \dots (|\alpha| + n)}{(-1)^{(|\alpha| + n)}} \pi^n \frac{\alpha!}{(|\alpha| + n)!}, \end{cases}$$

d'où

$$(135') \quad c_\beta = (-1)^{|\beta|} \frac{\beta!}{|\beta|!} \cdot a_\beta,$$

d'où

$$\Phi_{T_\psi}(u) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot u^{\alpha} \quad \text{au voisinage de } u = 0,$$

soit

$$(140) \quad \Phi_{T_\psi} = \psi.$$

La formule (115) réalise donc l'inversion de l'application définie par la formule (112). Il est aisé de vérifier les assertions topologiques du théorème 5 à partir de (112) et (115). Je ne le ferai pas. La démonstration du théorème 5 est achevée. Les calculs qui précèdent sont inspirés par ceux effectués par Jean LERAY pour la démonstration de la formule de Cauchy-Fantappiè [12].

Signalons que nous avons montré que, réciproquement, quand pour un compact réel K , tel que $K = \overset{*}{\bigcup} \overset{*}{\bigcup} K$, le théorème 5 est valable, alors K est forcément convexe pour $n \geq 2$.

10. La transformation de Laplace projective.

Commençons par le cas d'une variable. Soit $F(\zeta)$ une fonction entière de type exponentiel. Si D est une demi-droite issue de l'origine, on considère l'intégrale de Laplace :

$$(141) \quad \Phi_D(p) = \int_D F(\zeta) \cdot e^{-\zeta \cdot p} d\zeta.$$

On introduit la fonction $\Lambda_F(\zeta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \cdot \log |F(r, \zeta)|$. Il est classique que cette fonction est une fonction convexe, positivement homogène [2], c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\Lambda_F(t, \zeta) &= t \Lambda_F(\zeta) & \text{si } t \geq 0, \\ \Lambda_F(z_1 + z_2) &\leq \Lambda_F(z_1) + \Lambda_F(z_2).\end{aligned}$$

L'intégrale (141) converge absolument pourvu que

$$(142) \quad \operatorname{Re}(\zeta \cdot p) > \Lambda_F(\zeta) \quad \text{si } \zeta \in D, \quad \zeta \neq 0,$$

et uniformément absolument si $\operatorname{Re}(\zeta \cdot p) > \Lambda_F(\zeta) + \varepsilon |\zeta|$ pour un $\varepsilon > 0$. Nous noterons \mathcal{C}_D le demi-espace de convergence défini par la relation (142).

Il est alors connu [2], que $\bigcup_D \mathcal{C}_D$ est le complémentaire d'un convexe

compact Γ , dit diagramme indicateur de croissance de F , ce compact étant caractérisé par la fonction

$$(143) \quad h_\Gamma(z) = \sup_{p \in \Gamma} (\operatorname{Re}(p \cdot z)) \quad [p \in \Gamma \Leftrightarrow \operatorname{Re}(p \cdot z) \leq h_\Gamma(z) \text{ pour tout } z].$$

Si $\mathcal{C}_{D_1} \cap \mathcal{C}_{D_2} \neq \emptyset$, on a

$$\Phi_{D_1} - \Phi_{D_2} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_{D_1} \cap \mathcal{C}_{D_2},$$

donc les Φ_D se prolongent analytiquement les uns dans les autres et définissent dans $\bigcup \Gamma$ une fonction holomorphe $L_F(p)$ dite transformée de Laplace de F .

La fonction $p \mapsto L_F(p)$ tend vers zéro à l'infini.

Introduisant la sphère de Riemann, qui est le compactifié projectif de \mathbf{C} , cette fonction apparaît comme la restriction à $\bigcup K$ d'une fonction holomorphe dans l'ouvert $\bigcup K \cup (\infty)$ et nulle à l'infini. Mais les points sont des hyperplans, donc les points de $\bigcup K$ sont ceux de $\bigcup^* K$ différents de 0. L'identification est effectuée par

$$p \rightarrow (\xi_0, \xi_1) \quad \text{où } \xi_0 + \xi_1 p = 0, \quad \text{soit } p = -\frac{\xi_0}{\xi_1}.$$

Il apparaît l'intégrale

$$(144) \quad \int_D F(\zeta) \exp \zeta (\xi_0 / \xi_1) \cdot d\zeta$$

qu'on va transformer, par le changement de variable :

$$(145) \quad \zeta / \xi_1 = -u$$

en

$$(146) \quad \int_{D'} F(-\xi_1, u) \cdot e^{-\xi_0 u} \cdot \xi_1 du,$$

$$(147) \quad D' = \bar{\xi}_1 D.$$

Nous adoptons, par raison de simplicité, l'intégrale suivante :

$$(148) \quad \mathcal{L}_{D, F}(\bar{\xi}) = \xi_0 \int_D F(-\xi_1, u) \cdot e^{-\xi_0 u} \cdot du.$$

Une telle intégrale converge absolument dans l'ouvert $\Omega_{\xi_0, D}$, défini par la relation

$$\Lambda(-\xi_1, u) < \operatorname{Re}(\xi_0 \cdot u) \quad \text{où } u \neq 0 \text{ appartient à } D.$$

Mais, $\bigcup_D \Omega_{\xi_0, D} = \oint^* \Gamma$; tout point de $\oint^* \Gamma$ est un point de convergence absolue d'une des intégrales (148). On a le lemme suivant :

LEMME 18. — $\oint^* \Gamma$ est l'intérieur de l'ensemble des points de convergence absolue d'une des intégrales (148).

Démonstration. — En effet, supposons que cette intégrale converge absolument pour (D, ξ_1, ξ_0) , et supposons $\xi_0 \neq 0$, alors par le changement de variable inverse de (145), et le changement de demi-droite d'intégration inverse de (147), il en résulte que l'intégrale $\int_{\xi_1, D} F(\zeta) \cdot e^{\zeta \cdot \xi_0 / \xi_1} \cdot d\zeta$ converge absolument, donc que le point ξ_0 / ξ_1 appartient à $\oint^* \Gamma$. Réciproquement, tout point de $\oint^* \Gamma$ se transforme par (145) et (147) en un point de convergence absolue d'une intégrale (148). Si $\xi_0 = 0$, l'intégrale est identiquement nulle, mais le point à l'infini est toujours intérieur dans $\oint^* \Gamma$.

C. Q. F. D.

En vertu de ce lemme, nous disons que $\oint^* \Gamma$ est le *domaine naturel de convergence* d'une intégrale du type (148), et nous écrivons

$$(149) \quad \mathcal{L}_F(\bar{\xi}) = \xi_0 S_0^\infty F(-\xi_1, u) \cdot e^{-\xi_0 u} \cdot du$$

pour tout point (ξ_0, ξ_1) du domaine de convergence; le symbole S_0^∞ introduit rappelle qu'on intègre sur une chaîne arbitraire de

bord $\{\infty\} - \{0\}$ (mais l'égalité n'a lieu que pour un choix convenable de la chaîne). La fonction \mathcal{L}_F est dite transformée de Laplace projective de F .

La formule (149) s'étend immédiatement comme suit à un nombre fini quelconque de variables complexes (et même infini). Soit $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi)$ un point de l'espace projectif $P(V')$. L'application $(u' \mapsto F(u'))$ étant une fonction entière de type exponentiel, nous considérons l'intégrale prise au sens (149) dans le plan complexe des t :

$$(150) \quad \mathcal{L}_F(\bar{\xi}) = \xi_0 S_0^\infty F(-\xi_1, t) \cdot e^{-\xi_0 t} \cdot dt.$$

Nous appelons *domaine naturel de convergence dans $P(V')$* pour cette intégrale l'intérieur dans $P(V')$ de l'ensemble des points de convergence naturelle des intégrales

$$\xi_0 \int_D F(-\xi_1, t) \cdot e^{-\xi_0 t} \cdot dt.$$

Si Γ est un convexe compact de V , espace vectoriel complexe de dimension finie n , on pose $h_\Gamma(u) = \sup_{z \in \Gamma} \operatorname{Re} \langle z, u \rangle$. La fonction $(u \mapsto h_\Gamma(u))$ est positivement homogène convexe, et caractérise Γ , c'est-à-dire que l'ensemble des $z \in \Gamma$, tels que $\operatorname{Re} \langle z, u \rangle \leq h_\Gamma(u)$ quel que soit u , est juste Γ .

LEMME 19. — Soit F entière définie sur V' et telle que, pour tout ε , $\varepsilon > 0$,

$$|F(u)| \leq K(\varepsilon) \cdot \exp(h_\Gamma(u) + \varepsilon \|u\|),$$

où $\|u\|$ est une norme arbitraire sur V' . Le domaine naturel de convergence de son intégrale de Laplace projective (150) contient $\bigcup^* \Gamma$.

Démonstration. — Si $\bar{\xi} = \infty$, l'intégrale converge. Soit maintenant $\bar{\xi} \in \bigcup^* \Gamma$, mais $\bar{\xi} \neq \infty$. On peut prendre comme équation pour $\bar{\xi}$ l'équation

$$\bar{\xi} = \{z \mid \langle z, u \rangle - 1 = 0\}.$$

On considère l'application de V' dans \mathbf{C} définie par $z \mapsto \langle z, u \rangle$. L'image de Γ est un compact G de \mathbf{C} , et l'image de $\bar{\xi}$ est le point 1.

Soit D_0 une demi-droite telle que, pour tout v de D_0 , on ait $h_G(v) < \operatorname{Re}(v)$. Cette demi-droite existe puisque $1 \notin G$. L'intégrale

$$(151) \quad \int_{D_0} F(u, t) \cdot e^{-t} \cdot dt$$

est absolument convergente, car

$$(152) \quad |F(u, t)| \leq K(\varepsilon) \cdot \exp(h_\Gamma(u, t) + \varepsilon \|u\|)$$

et $h_{\Gamma}(u, t) = h_G(t)$. On voit donc que

$$(153) \quad |F(u, t) \cdot e^{-t} \cdot dt| \leq \exp(-\eta |t|),$$

où $0 < \eta |t| < (\operatorname{Re} t - h_G(t))$ si $t \in D_0$. Donc $\bar{\xi}$ est un point de convergence absolue. L'ensemble ouvert $\bigcup^* \Gamma$ est donc formé de points de convergence absolue.

C. Q. F. D.

LEMME 20. — *Des coordonnées étant choisies, pour chaque j , $\frac{\partial F}{\partial u_j}$ satisfait à des majorations, pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$(154) \quad \left| \frac{\partial F}{\partial u_j} \right| \leq K(\varepsilon) \cdot A \cdot \exp(h_{\Gamma}(u) + \varepsilon \|u\|),$$

où $\log A = \sup_{\|u_j\| \leq 1} |h_{\Gamma}(u)| + \varepsilon \left(\sup_{\|u_j\| \leq 1} \|u\| \right)$.

Démonstration. — Par l'intégrale de Cauchy, on a

$$(155) \quad \frac{\partial F}{\partial u_j} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\{\|\zeta_j\| < 1\}} \frac{F(u + \zeta_j)}{\zeta_j} d\zeta_j,$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial u_j} \right| &\leq \sup_{\|\zeta_j\|=1} |F(u_1, \dots, u_j + \zeta_j, u_{j+1}, \dots, u_n)| \\ &\leq K(\varepsilon) \cdot \left(\exp \left(\sup_{\|\zeta_j\|=1} h_{\Gamma}(\zeta) \right) \right) \cdot \left(\exp \left(\varepsilon \sup_{\|\zeta_j\|=1} \|\zeta\| \right) \right) \\ &\quad \times \exp(h_{\Gamma}(u) + \varepsilon \|u\|). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

LEMME 21. — *Dans le domaine naturel de convergence de l'intégrale (150), la fonction \mathcal{E}_F est holomorphe et, au voisinage de l'infini, coïncide avec l'indicatrice projective d'un élément T de $(E_0^z(V))'$ admettant $F = \mathcal{F}T$ comme transformée de Fourier-Borel.*

Démonstration. — Je ne démontrerai pas la première partie de ce lemme, me contentant de faire remarquer que les théorèmes usuels sur l'intégration terme à terme d'une série, sur la dérivation sous le signe somme, s'étendent aux notions d'intégrales introduites en (149), (150). Mais je n'ai pas l'intention de développer cette question. Il me suffit pour la suite de constater que l'inégalité (154) montre trivialement la convergence de chacune des intégrales

$$\int_D \frac{\partial F}{\partial u_j} (-u, t) \cdot e^{-t} \cdot dt$$

quand $\int_D F(-u, t) \cdot e^{-t} \cdot dt$ converge et que $u \in \overset{*}{\bigcap} \Gamma$. Donc il est au moins sûr que \mathcal{E}_F est holomorphe dans $\overset{*}{\bigcap} \Gamma$.

Maintenant, des coordonnées étant choisies, si $F(u) = \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}}{\alpha!} \cdot u^{\alpha}$

$$(156) \quad F(-u, t) = \sum_n \left(\sum_{|\alpha|=n} \frac{a_{\alpha}}{\alpha!} \cdot u^{\alpha} \right) (-1)^n \cdot t^n.$$

Ceci donne, si u est assez petit en sorte que $|F(-u, t)| \leq K \cdot \exp A |t|$ où $A < 1$,

$$(157) \quad \mathcal{E}_F(u) = \int_0^{+\infty} \sum_n \left(\sum_{|\alpha|=n} \frac{a_{\alpha}}{\alpha!} \cdot u^{\alpha} \right) (-1)^n \cdot t^n \cdot e^{-t} \cdot dt.$$

$$= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} u^{\alpha}$$

et, après homogénéisation

$$(158) \quad \mathcal{E}_F(\tilde{z}) = \tilde{z}_0 \cdot \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\frac{\tilde{z}}{\tilde{z}_0} \right)^{\alpha}.$$

Or, si T est un élément de $(E_0^z(V))'$ dont la transformée de Fourier-Borel est F , et si c_{α} est le α -ième moment de T , d'après la formule (58),

$$\mathcal{F} T = \sum \frac{c_{\alpha} \cdot u^{\alpha}}{\alpha!}, \text{ donc (157) et (130) coïncident.}$$

C. Q. F. D.

11. Théorème de l'indicatrice de croissance.

La conjonction du théorème 5 et des lemmes 19 à 21 permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 6 (*de l'indicatrice de croissance, ou du diagramme conjugué*) ([2], [16]). — Si F , définie sur V' , satisfait à une majoration

$$|F(u)| \leq K(\varepsilon) \cdot \exp(h_{\Gamma}(u) + \varepsilon \|u\|) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

où Γ est un convexe compact de V , elle est la transformée de Fourier-Borel d'un élément T du dual de $H(\Gamma)$.

On a la représentation de Pólya : $\mathcal{E}_F(\tilde{z})$ étant donnée par (150) dans $\overset{*}{\bigcap} \Gamma$, on a [15] :

$$(159) \quad F(u) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma^{(n)}} \exp \langle z, u \rangle \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial z_0^{n-1}} (\mathcal{E}_F(\tilde{z})/\tilde{z}_0) \right) \cdot \varpi(z, \tilde{z}),$$

où ϖ est un voisinage strictement convexe arbitraire à frontière régulière de Γ .

LEMME 22 [16]. — Si F est la transformée de Fourier-Borel de T élément de $H'(\Gamma)$ et si G est entière de type exponentiel zéro divisant F , F/G est aussi la transformée de Fourier-Borel d'un élément de $H'(\Gamma)$.

Démonstration. — Il serait possible de se ramener au corollaire 1 du théorème 2. Mais il est agréable de constater que le lemme 15 fournit directement le résultat. D'abord on peut toujours, grâce à une translation, supposer que $F/G(o) \neq 0$ si F/G n'est pas identiquement nulle, cas trivial. Ensuite :

$$(160) \quad \begin{aligned} |F(u)| &\leq K(\varepsilon') \cdot \exp(h_\Gamma(u) + \varepsilon' \|u\|), \\ |G(u)| &\leq \exp \varepsilon'' \|u\| \quad \text{pour } \|u\| \text{ assez grand} \end{aligned}$$

entraîne

$$(161) \quad \begin{aligned} \log |F(u)| &\leq L(\varepsilon') + h_\Gamma(u) + \varepsilon' \|u\|, \\ \log |G(u)| &\leq \varepsilon'' \cdot \|u\| \quad \text{pour } \|u\| \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

On reprend les calculs du théorème 2, et l'on obtient

$$(162) \quad \log |(F/G)(u)| \leq M(\log |F|; z, \lambda |z|) - M(\log |G|; z, \lambda |z|),$$

soit, en tenant compte de

$$(163) \quad \begin{aligned} h_\Gamma(z + \lambda u) &\leq h_\Gamma(z) + \lambda \sup_{|u| = \|z\|} |h_\Gamma(u)| \leq h_\Gamma(z) + \lambda \cdot M \cdot \|z\|, \\ \|z + \lambda z\| &\leq (1 + \lambda) \|z\| \end{aligned}$$

et du lemme 15 :

$$(164) \quad \begin{aligned} \log |F/G(u)| &\leq L(\varepsilon) + h_\Gamma(u) + \lambda \cdot M \|u\| + \varepsilon' (1 + \lambda) \cdot \|u\| \\ &\quad + \left(\left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) (1 + \lambda) \cdot \varepsilon'' \cdot \|u\| \\ &\quad - \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 \cdot \log |G(o)|. \end{aligned}$$

Soit ε donné, on prend $\varepsilon' < \varepsilon/4$, puis on peut choisir λ en sorte que

$$(165) \quad \lambda \cdot M + \varepsilon' (1 + \lambda) < \varepsilon/4.$$

Ensuite, on prend ε'' en sorte que $\left(\left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 - 1 \right) (1 + \lambda) \cdot \varepsilon'' < \varepsilon/4$, d'où

$$(166) \quad \log |F/G(u)| \leq N(\varepsilon) + h_\Gamma(u) + \varepsilon \|u\| \quad \text{pour } \|u\| \text{ assez grand.}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 6.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 7. — Soient Ω un ouvert de V (resp. un compact convexe de V), et D un opérateur différentiel d'ordre infini (relativement à l'ordre ∞),

c'est-à-dire tel que $\mathcal{F}D$ soit de type exponentiel zéro.

On a

(a) $\check{D}H(\Omega) = H(\Omega)$;

(b) toute solution de $\check{D}f = 0$ dans Ω est limite des solutions exponentielles polynômes de l'équation [17].

Démonstration. — Grâce au lemme 22, on peut appliquer les raisonnements du théorème 4.

C. Q. F. D.

Remarquons en fin de compte que ces transformations permettent de caractériser les régularisées semi-continues supérieurement des indicatrices de croissance des fonctions entières de type exponentiel. Je reviendrai ailleurs sur cette question à l'aide d'une autre méthode utilisant la cohomologie à croissance.

Remarque. — Ceci vient d'être publié simultanément par M. KISELMAN et moi-même (cf. [24] et [19]).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] AVANISSIAN (V.). — Fonctions plurisousharmoniques, différences de deux fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 252, 1961, p. 499-500.
- [2] BOAS (R. P.). — *Entire functions*. — New York, Academic Press, 1954.
- [3] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 3-5, 2^e éd. — Paris, Hermann, 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1229; *Bourbaki*, 18).
- [4] CARTAN (H.). — Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 29-64.
- [5] EHRENPREIS (L.). — A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, *Proceedings of the International symposium on linear spaces* [1960, Jérusalem], p. 161-174. — Jérusalem, Academic Press; Oxford, Pergamon Press, 1961.
- [6] EHRENPREIS (L.). — Mean periodic functions; Varieties whose annihilator ideals are principal, *Amer. J. Math.*, t. 77, 1955, p. 293-328.
- [7] GROTHENDIECK (A.). — Sur les espaces (\mathcal{F}) et $(\omega\mathcal{F})$, *Summa Brasil. Mat.*, t. 3, 1954, p. 57-123.
- [8] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16).
- [9] HÖRMANDER (L.). — L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator, *Acta Math.*, Uppsala, t. 113, 1965, p. 89-152.
- [10] LELONG (P.). — Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n , *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 12, 1964, p. 365-407.
- [11] LELONG (P.). — Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une seule équation, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 67, 1950, p. 393-419.
- [12] LERAY (J.). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 87, 1959, p. 81-180.

- [13] LERAY (J.). — Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire (Problème de Cauchy IV), *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 90, 1962, p. 39-156.
- [14] MALGRANGE (B.). — Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-355 (Thèse Sc. math., Paris, 1955).
- [15] MARTINEAU (A.). — Indicatrices des fonctionnelles analytiques et inversion de la transformation de Fourier-Borel par la transformation de Laplace, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 255, 1962, p. 2888-2890.
- [16] MARTINEAU (A.). — Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math., Paris, 1963).
- [17] MARTINEAU (A.). — Équations différentielles d'ordre infini, *Colloque sur l'analyse fonctionnelle* [2. 1964. Liège], p. 37-47. — Paris, Gauthier-Villars, Louvain, Librairie universitaire, 1964 (Centre belge de Recherches mathématiques).
- [18] MARTINEAU (A.). — Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes, *Math. Annalen*, t. 163, 1966, p. 62-88.
- [19] MARTINEAU (A.). — Indicatrices de croissance des fonctions entières de N -variables, *Inventiones Math.*, t. 2, 1966, p. 81-86.
- [20] PÔLYA (G.). — Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Z.*, t. 29, 1929, p. 549-640.
- [21] SCHWARTZ (L.). — Théorie générale des fonctions moyennes-périodiques, *Annals of Math.*, Series 2, t. 48, 1947, p. 857-929.
- [22] SCHWARTZ (L.). — Séminaire Schwartz, 1^{re} année, 1953-1954 : *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1958.
- [23] SCHWARTZ (L.). — Théorie des distributions à valeurs vectorielles, II., *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 8, 1958, p. 1-209.
- [24] KISELMAN (C. O.). — On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, *Acta Math.*, Uppsala, t. 117, 1967, p. 1-35.
- [25] VALIRON (G.). — Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 46, 1929, p. 25-53.
- [26] L. A. AIZENBERG. — The general form of a linear continuous functional in spaces of functions that are holomorphic in convex domains in \mathbf{C}^n , *Soviet Math.*, t. 7, 1966, p. 198-202; *Translation of Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, t. 166, 1966, p. 1015-1018.

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1967.)

André MARTINEAU,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose, 06-Nice.