BULLETIN DE LA S. M. F.

L. SZPIRO

Fonctions d'ordre et valuations

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 301-311
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__301_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 301 à 311.

FONCTIONS D'ORDRE ET VALUATIONS

PAR

Lucien SZPIRO.

Les deux résultats principaux de ce travail sont :

1° Le théorème de représentation (théorème 1) qui donne une caractérisation des fonctions d'ordre homogènes discrètes sur un anneau commutatif (Cohn [2] avait déjà obtenu ce résultat dans le cas des corps).

2° Le théorème 4 qui étudie le passage de la propriété, pour un anneau préadique noethérien, d'être de pas fini, à un suranneau, notamment à un suranneau entier.

1. Quelques propriétés des fonctions d'ordre.

Définition 1. — Soit A un anneau commutatif, unitaire; on appelle fonction d'ordre sur A toute application $V : A \to \overline{\mathbf{R}}$ telle que :

(o) $V(0) = \infty$;

(i) $V(1) = 0$;

(ii) $V(x+y) \geqq \inf(V(x), V(y))$ pour tout x et y dans A;

(iii) $V(xy) \geqq V(x) + V(y)$ pour tout x et y dans A.

Exemple. — Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. La fonction $V : A \to \overline{\mathbf{R}}$, définie par $V(x) = \sup(n \in \overline{\mathbf{N}} \mid x \in \mathfrak{a}^n)$, est une fonction d'ordre sur A, que nous appellerons *la fonction d'ordre associée à l'idéal* $\mathfrak{a}$, et que nous noterons $V_{\mathfrak{a}}$.

Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$, nous noterons

$$ {}_{\alpha}V = (x \in A \mid V(x) \geqq \alpha), \qquad {}_{\bar{\alpha}}V = (x \in A \mid V(x) > \alpha), \qquad \mathrm{gr}_{\alpha} = {}_{\alpha}V/{}_{\bar{\alpha}}V. $$

Définition 2. — Soit A un anneau, et soit V une fonction d'ordre sur A. On appelle *anneau gradué associé à* V, et l'on note gr^V, le groupe $\sum_{\alpha \in \mathbf{R}} {}_{\alpha}V/{}_{\bar{\alpha}}V$ muni de la multiplication suivante : soit $x \in A$ tel que $V(x) \geqq \alpha$, on notera $\mathrm{gr}^V_\alpha(x)$ la classe de x dans ${}_\alpha V/_{\bar{\alpha}}V$, la multiplication sera définie par linéarité à partir de la formule

$$\mathrm{gr}^V_\alpha(x) \times \mathrm{gr}^V_\beta(y) = \mathrm{gr}^V_{\alpha+\beta}(xy).$$

Une fonction d'ordre sera dite *homogène* (resp. une *valuation*) si son anneau gradué associé est réduit (resp. intègre).

DÉFINITION 3. — Une fonction d'ordre V, sur un anneau A, sera dite *discrète* si $V(A - {}_\infty V)$ engendre dans $\mathbf{R}$ un sous-groupe discret; *séparée* si ${}_\infty V = (0)$.

PROPOSITION 1 (SAMUEL [5]). — *Soit V une fonction d'ordre sur un anneau A; alors il existe une fonction d'ordre homogène $\overline{V}$ sur A, qui est la plus petite fonction d'ordre homogène sur A qui soit plus grande que V; de plus, pour tout x dans A, on a*

$$\overline{V}(x) = \lim (V(x^n)/n).$$

PROPOSITION 2 (REES [4]). — *Soit V une fonction d'ordre positive sur un anneau A, soit A' un anneau entier sur A, soit V' la fonction d'ordre sur A' définie par ${}_\alpha V' = {}_\alpha VA'$; alors, pour tout x dans A, on a*

$$\overline{V}(x) = \overline{V}'(x).$$

En fait, ces propositions ont été démontrées par leurs auteurs dans le cas où V est une fonction d'ordre définie par les puissances d'un idéal de A, mais les démonstrations ne font appel qu'aux propriétés de la définition 1.

2. Le théorème de représentation.

THÉORÈME 1. — *Soit V une fonction d'ordre homogène, discrète sur un anneau A, alors il existe une famille $(V_i)_{i \in I}$ de valuations discrètes sur A telle que, pour tout x dans A, on ait*

$$V(x) = \inf_{i \in I} (V_i(x)).$$

Notons que, réciproquement, pour toute famille $(V_i)_{i \in I}$ de valuations discrètes sur A prenant leurs valeurs dans un même sous-groupe discret de $\mathbf{R}$, $\inf_{i \in I}(V_i)$ est une fonction d'ordre homogène discrète sur A.

Pour faire la démonstration du théorème 1, il nous suffit de considérer le cas où V est séparée et où elle prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}$.

DÉFINITION 4. — Une partie S de A sera dite *V-compatible* si c'est une partie multiplicativement stable de A ne rencontrant pas (0), et si de plus, pour tout x et y dans S, on a

$$V(xy) = V(x) + V(y).$$

LEMME 1. — *Toute partie V-compatible de A est contenue dans une partie V-compatible maximale de A pour la relation d'inclusion.*

En effet, la propriété de V-compatibilité est une propriété à caractère fini. Soit $(S_i)_{i\in I}$ la famille des parties V-compatibles maximales de A.

LEMME 2. — *Pour tout $i\in I$, et pour tout x non nul dans A les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x appartient à S_i;*

(ii) *$V(xu) = V(x) + V(u)$ pour tout u dans S_i.*

En effet, il est clair que (i) implique (ii); réciproquement, soit S la partie multiplicativement stable de A engendrée par S_i et x; nous allons montrer qu'elle est V-compatible. L'élément générique de S est de la forme $x^n u$, où n est un entier et u est dans S_i; alors $V(x^n u) = V(u) + n\,V(x)$, car

$$V(x^n u^n) = n(V(x) + V(u)) = V(u) + V(u^{n-1}) + V(x^n) \geqq V(x^n u) + V(u^{n-1}),$$

donc

$$V(x^n u) \leqq V(x^n) + V(u),$$

d'où l'égalité. Maintenant il est facile de voir que V satisfait à l'égalité voulue sur S, et que $S\cap(0) = \emptyset$ (V a été supposée séparée).

COROLLAIRE 1. — *Soient $z\in S_i$ et $x\in A$; alors, si $V(x) > V(z)$, $(x+z)\in S_i$.*

En effet, si $u\in S_i$,

$$V((z+x)u) = V(zu+xu) = V(zu) = V(z) + V(u) = V(z+x) + V(u).$$

LEMME 3. — *Posons $T_i = \{x \ \ xS_i\cap S_i \neq \emptyset\}$, alors on a*

(i) *« x est dans T_i » est équivalent à « $-x$ est dans T_i »;*

(ii) *T_i est multiplicativement stable;*

(iii) *si y n'est pas dans T_i et si x est dans T_i, alors xy n'est pas dans T_i.*

(i) est évident.

(ii) Soit x dans T_i on a $xu = v$, où u et v sont dans S_i. De même, soient y dans T_i, t et w dans S_i, avec $yt = w$; alors $xy(ut) = vw$, ce qui prouve que xy est dans T_i, car S_i est multiplicativement stable.

(iii) x est dans T_i; donc il existe u et v dans S_i tels que $xu = v$; de même, si xy est dans T_i, il existe y et w dans S_i avec $xyt = w$; donc $y\,(xu)\,t = y(vt) = uw$; donc y est dans T_i, car S_i est multiplicativement stable, ce qui est impossible.

LEMME 4. — *Pour tout i dans I, il existe une fonction $V_i : A \to \mathbf{Z}$ telle que $V_i(x) = \infty$ si x n'est pas dans T_i, et $V_i(x) = V(v) - V(u)$ si x est dans T_i, u et v dans S_i et $xu = v$.*

Pour cela il suffit de montrer que $xu = v$, $xt = w$ (où x est dans T_i et u, v, t, w dans S_i) entraîne $V(v) - V(u) = V(w) - V(t)$. Or $vt = xut = wu$, donc $V(vt) = V(wu)$, et comme u, t, v, w sont dans S_i, le lemme est démontré.

On a $V_i(x) = V(x)$ pour tout x dans S_i et, d'autre part, $V_i(x) \geqq V(x)$ pour tout x dans A, car $xu = v$ entraîne $V(v) \geqq V(x) + V(u)$. Donc $V(x) = \inf_{i \in I} V_i(x)$ pour tout x de A car tout x non nul de A est dans un S_i pour au moins un i dans I. Il nous reste à montrer que les V_i sont des valuations.

Lemme 5. — *Si y n'est pas dans T_i et si x est dans S_i, alors il existe z dans S_i tel que $V(yz) > V(xz)$.*

Nous raisonnerons par récurrence sur $n = V(x) - V(y)$. Si n est négatif, il suffit de prendre $z = 1$, qui appartient à S_i pour tout i. Supposons donc le lemme démontré pour tout $k < n = V(x) - V(y)$. Par le lemme 2, il existe u appartenant à S_i tel que $V(yu) > V(y) + V(u)$.

Donc $V(xu) - V(yu) < V(xu) - V(y) - V(u)$, comme x et u sont dans S_i, on a

$$V(xu) = V(x) + V(u).$$

Donc

$$V(xu) - V(yu) < V(x) - V(y) = n.$$

Le lemme 3-(iii) entraîne « yu n'est pas dans T_i », comme xu est dans S_i, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc v dans S_i tel que $V(yuv) > V(xuv)$, ce qui donne le résultat en posant $z = uv$.

Lemme 6. — *Si y n'est pas dans T_i et si x est dans T_i, alors $x + y$ est dans T_i.*

Ramenons-nous au cas où x est dans S_i.

Soient x dans T_i, u dans S_i, x' dans S_i, avec $xu = x'$; $yu = y'$ n'est pas dans T_i; alors $x' + y' = (x + y)u$, et « $(x' + y')$ est dans T_i » est équivalent à « $(x + y)$ est dans T_i ».

Ramenons-nous au cas où $V(y) > V(x)$.

Soit, en vertu du lemme 5, u dans S_i avec $V(yu) > V(xu)$, alors « $[(x + y)u]$ appartient à T_i » est équivalent à « $(x + y)$ appartient à T_i ».

Si $V(y) > V(x)$: $V(x + y) = V(x)$.

Soit z appartenant à S_i; alors $V((x + y)z) = V(zx + yz)$.

Or,

$$V(xz) = V(x) + V(z), \qquad V(y) + V(z) \leqq V(yz).$$

Donc,

$$V((x + y)z) = V(xz) = V(x) + V(z) = V(x + y) + V(z),$$

d'où le résultat d'après le lemme 2.

COROLLAIRE 2. — *Posons* $\mathfrak{P}_i = A - T_i$. *Alors* $\mathfrak{P}_i$ *est un idéal premier de* A.

Soient $x \in \mathfrak{P}_i$ et $y \in \mathfrak{P}_i$, alors $-y \in \mathfrak{P}_i$, soit $z = x - y$; si z appartient à $T_i, x = z + y \in T_i$ d'après le lemme 6, ce qui est absurde. Donc $x - y \in \mathfrak{P}_i$.

Si $x \in \mathfrak{P}_i$ et $y \in \mathfrak{P}_i$, alors $xy \in \mathfrak{P}_i$; en effet, $x(1 + y) \in \mathfrak{P}_i$ car $1 \in T_i$ entraîne $(1 + y) \in T_i$, mais $xy = x(1 + y) - x$, donc $xy \in \mathfrak{P}_i$.

Le lemme 3-(iii) dit exactement que $x \in \mathfrak{P}_i$ et $y \in T_i$ entraîne $xy \in \mathfrak{P}_i$; donc, quel que soit $x \in \mathfrak{P}_i$ et quel que soit $y \in A$, on a $xy \in \mathfrak{P}_i$.

Nous venons de montrer que $\mathfrak{P}_i$ est un idéal; c'est un idéal premier, car T_i, son complémentaire, est multiplicativement stable [lemme 3-(ii)].

Montrons maintenant que V_i est une valuation. On a trivialement

$$V_i(0) = \infty, \qquad V_i(1) = 0.$$

Montrons que

$$V_i(xy) = V_i(x) + V_i(y), \quad \forall\, x, y \in A.$$

Il y a trois cas à considérer :

1° $x \in T_i$, $y \in T_i$, $u, v, t, w, \in S_i$, avec $xu = v$, $yt = w$; alors $xyut = vw$, d'où

$$V_i(xy) = V(vw) - V(ut) = V_i(x) + V_i(y).$$

2° $x \in T_i$, $y \in \mathfrak{P}_i$; alors

$$V_i(xy) = V_i(x) + V_i(y) = \infty.$$

3° $x \in \mathfrak{P}_i$, $y \in \mathfrak{H}_i$; alors

$$V_i(xy) = V_i(x) + V_i(y) = \infty,$$

car $\mathfrak{P}_i$ est un idéal.

Montrons que $V_i(x + y) \geqq \inf(V_i(x), V_i(y))$. Il y a encore trois cas :

1° $x \in T_i$, $y \in T_i$, $u, v, w, \in S_i$, avec $xu = v$, $yu = w$, ce qu'on peut toujours supposer car S_i est multiplicativement stable.

— Si $(x + y) \in \mathfrak{P}_i$, c'est démontré;

— Si $(x + y) \in T_i$, on peut toujours supposer, pour la même raison que précédemment, que $(x + y)u = t$, avec $t \in S_i$; alors

$$(x + y)\,u = t = v + w \qquad \text{et} \qquad V(t) \geqq \inf(V(v), V(w)),$$

donc

$$V(t) - V(u) \geqq \inf(V(v) - V(u), V(w) - V(u)).$$

C. Q. F. D.

2° $x \in T_i$, $y \in \mathfrak{P}_i$, alors il existe $z \in S_i$ tel que $V(xz) < V(yz)$. Donc, si l'on prend z tel que, de plus, $xz \in S_i$,

$$V(yz + xz) = V_i(xz) = V(xz) = V_i(yz + xz),$$

i. e. $V_i(x + y) = V_i(x) = \inf(V_i(x), V_i(y))$.

3° $x \in \mathfrak{P}_i$, $y \in \mathfrak{P}_i$, alors $(x+y) \in \mathfrak{P}_i$, donc $V_i(x+y) = \infty$. Le théorème est donc démontré.

Soit V une fonction d'ordre sur un anneau A, nous noterons g l'application de A dans gr^V, définie de la façon suivante : si $x \in A$ et $V(x) = \alpha$, $g(x)$ sera la classe de x dans gr^V_α. Nous noterons f la restriction de g à l'ensemble des complémentaires des idéaux premiers minimaux de gr^V.

PROPOSITION 3. — *L'application f définie ci-dessus est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers minimaux de* gr^V *sur l'ensemble des parties V-compatibles maximales de A.*

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de gr^V, soit $\mathfrak{R}$ son complémentaire; il est bien évident que $f(\mathfrak{P})$ est une partie V-compatible de A. Soit S une partie V-compatible de A contenant $f(\mathfrak{P})$, alors $g(S)$ est une partie multiplicativement stable de gr^V qui ne rencontre pas (0), donc qui ne rencontre pas, au moins, un idéal premier minimal $\mathfrak{P}'$. Supposons que $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}'$, comme ces deux idéaux sont gradués ([1], chap. 3, n° 1, prop. 1), il existe $x \in A$ tel que $g(x) \in \mathfrak{P}'$ et $g(x) \in \mathfrak{R}$, donc il existe $x \in A$ tel que $x \in f(\mathfrak{P})$ et $x \notin S$, ce qui n'est pas possible. Donc $f(\mathfrak{P})$ est une partie V-compatible maximale de A, nous avons même montré que f était injective.

Or f est surjective car, si S est une partie V-compatible maximale de A, alors, en prenant pour $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de gr^V ne rencontrant pas $g(S)$, on a $S = f(\mathfrak{P})$.

COROLLAIRE 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la famille de valuations du théorème* 1 *soit finie est que* gr^V *n'ait qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux.*

3. Anneaux préadiques de pas fini.

Nous noterons, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de l'anneau A, $V_\mathfrak{a}$ la fonction d'ordre sur A définie par les puissances de l'idéal $\mathfrak{a}$.

THÉORÈME 2 (REES [3]). — *Soit A un anneau noethérien et soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Alors il existe une famille finie $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ de valuations sur A telle que*

$$\overline{V}_\mathfrak{a}(x) = \inf(V_i(x)), \quad \forall x \in A;$$

de plus, pour tout $i = 1, \ldots, n$, ${}_\infty V_i$ est un idéal premier minimal de A.

THÉORÈME 3 (REES [4]). — *Soit A un anneau noethérien intègre, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, il existe une constante $k(\mathfrak{a}) < \infty$ telle que*

$$0 \leq \overline{V}_\mathfrak{a}(x) - V_\mathfrak{a}(x) \leq k(\mathfrak{a}), \quad \forall x \in A;$$

(ii) *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{P}$ de A, la complétion de A pour la topologie $\mathfrak{P}$ préadique est réduite.*

DÉFINITION 5. — Soient A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A; on dira que l'anneau $\mathfrak{a}$-préadique A (ou plus simplement, si aucune confusion n'est à craindre, que l'anneau A) est de *pas fini*, s'il existe une constante k telle que

$$\text{(i)} \qquad 0 \leq V_\mathfrak{a}(xy) \leq V_\mathfrak{a}(x) + V_\mathfrak{a}(y) + k, \quad \forall\, x, y \in A;$$

la plus petite de ces constantes sera appelée le *pas de l'anneau $\mathfrak{a}$-préadique A*, et notée $p_\mathfrak{a}(A)$ [ou plus simplement $p(A)$ si aucune confusion n'est à craindre].

LEMME 7. — *Si l'anneau $\mathfrak{a}$-préadique A est séparé et de pas fini, alors il est intègre.*

Supposons que $xy = 0$; alors $V_\mathfrak{a}(xy) = \infty$, donc $V_\mathfrak{a}(x)$ ou $V_\mathfrak{a}(y)$ est infini en vertu de (i), et donc x ou y est égal à zéro puisque A est séparé.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 4. — *Soient A un anneau noethérien $\mathfrak{a}$-préadique séparé intègre, K son corps de fraction, $\hat{A}$ son complété, A' sa fermeture intégrale, $\mathfrak{a}\hat{A} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}A'$, B un sur-anneau de A tel que B soit entier sur A, et intègre, L le corps des fractions de B, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}B$. Considérons les propositions suivantes :*

(i) *A est de pas fini;*

(ii) *$\overline{V}_\mathfrak{a}$ est une valuation;*

(iii) *le nilradical de* $\mathrm{gr}^\mathfrak{a}$ *est un idéal premier;*

(iv) *$\hat{A}$ est de pas fini;*

(v) *$\overline{V}_\mathfrak{a}$ est une valuation;*

(vi) *$\overline{V}_\mathfrak{b}$ est une valuation;*

(vii) *$\overline{V}_\mathfrak{a}$ est une valuation sur A dont l'unique prolongement à K n'a qu'une seule extension à L.*

Alors

$$\begin{array}{ccccc}
\text{(i)} & \Rightarrow & \text{(ii)} & \Leftarrow & \text{(vii)} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\text{(iv)} & \Rightarrow & \text{(v)} & \Leftarrow & \text{(vi)} \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & \text{(iii)} & &
\end{array}$$

De plus, si A est analytiquement réduit, (i) *est équivalent à* (ii).

— (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$$0 \leq \frac{V_\mathfrak{a}(x^n y^n)}{n} - \frac{V_\mathfrak{a}(x^n)}{n} - \frac{V_\mathfrak{a}(y^n)}{n} \leq \frac{k}{n}, \quad \forall\, x, y \in A$$

et $\forall n \in \mathbf{N}$, donc

$$\overline{V}_{\mathfrak{a}}(xy) = \overline{V}_{\mathfrak{a}}(x) + \overline{V}_{\mathfrak{a}}(y).$$

— (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Considérons l'anneau gradué $\mathrm{gr}^{\overline{V}_{\mathfrak{a}}} = \overline{\mathrm{gr}}^{\mathfrak{a}}$. Il est intègre; de plus, si $\mathfrak{N}$ est le nilradical de $\mathrm{gr}^{\mathfrak{a}}$, alors $\mathrm{gr}^{\mathfrak{a}}(A)/\mathfrak{N}$ s'injecte dans $\overline{\mathrm{gr}}^{\mathfrak{a}}(A)$, donc est intègre.

C. Q. F. D.

Remarquons que jusqu'ici nous ne nous sommes pas servis du fait que A est noethérien.

— (i) $\Rightarrow$ (iv) : C'est évident, car si A est noethérien, $\hat{\mathfrak{a}}^n \cap A = \mathfrak{a}^n$ pour tout n entier, et l'application $V_{\mathfrak{a}} : A \to \mathbf{N}$ est continue;

— (v) $\Rightarrow$ (ii) : C'est évident par la proposition 2;

— (ii) $\Rightarrow$ (v) : Si $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$ est une valuation, alors $A - (0) = S$ est $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$-compatible. Pour démontrer (v), il suffit, posant V égale au prolongement de $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$ à K, de démontrer que

$$\overline{V}_{\mathfrak{a}'}(x) = V(x), \quad \forall x \in A'.$$

Si x est dans A, c'est déjà vrai. Soit $x \in A'$, $x \notin A$, $A_1 = A[x]$, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}A_1$; on a

$$\overline{V}_{\mathfrak{a}_1}(y) = \overline{V}_{\mathfrak{a}'}(y), \quad \forall y \in A,$$

toujours en vertu de la proposition 2. A_1 est un A-module de type fini, donc son conducteur, $\mathfrak{f}$ dans A est non nul. A étant noethérien, A_1 l'est aussi, et donc, pour toute partie $\overline{V}_{\mathfrak{a}_1}$-compatible maximale S, on a $T(S) = A_1 - (0)$. Soit $u \in \mathfrak{f}$, $u \neq 0$, il existe $a \in S$ tel que $au \in S$, donc

$$t = au \in S \cap \mathfrak{f} \subset A.$$

D'autre part, il existe b et $c \in S$ tels que $bx = c$, donc $x(bt) = ct$, en posant

$$bt = b' \in A \cap S\, ct = c' \in A \cap S \qquad \text{et} \qquad bx = c'.$$

Soit W la valuation de A_1 déduite de S, alors

$$W(x) = W(c') - W(b'),$$

mais b' et c' appartiennent à $A \cap S$, donc

$$W(b') = \overline{V}_{\mathfrak{a}}(b') = V(b') \qquad \text{et} \qquad W(c') = \overline{V}_{\mathfrak{a}}(c') = V(c'),$$

et donc $V(x) = W(x)$ pour toute valuation W appartenant à la représentation de $\overline{V}_{\mathfrak{a}_1}$ et donc $\overline{V}_{\mathfrak{a}_1}(x) = V(x)$.

C. Q. F. D.

(vii) $\Rightarrow$ (ii) : C'est bien évident.

(vii) $\Rightarrow$ (vi) : Si B est contenu dans K, c'est déjà démontré.

On peut donc supposer que B contient A' en vertu de la proposition 2. Notons V l'unique extension de $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$ à B. Nous allons démontrer que si

$$x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s = 0 \tag{1}$$

est l'équation minimale de $x \in B$ sur K, alors,

$$V(x) = \inf_{i=1,\ldots,s} \frac{(\overline{V}_{\mathfrak{a}'}(a_i))}{i} = \overline{V}_{\mathfrak{b}}(x).$$

Posons K_1 égale à la plus petite extension semi-galoisienne de K contenant x. Soient $x_1 = x$, x_2, ..., x_s les conjugués de x sur K, i. e. les racines du polynôme minimal de x sur K. Soit V_1 un prolongement, de V restreinte à $K[x]$, à K_1. Soit σ_i l'automorphisme de K_1 sur K tel que $\sigma_i(x) = x_i$. Posons, pour tout $y \in K[x]$,

$$V_i(y) = V_1(\sigma_i(y));$$

les V_i sont des valuations de $K[x]$ qui prolongent $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$, donc elles sont toutes égales par hypothèse, donc $V_1(x_i) = V(x)$ pour tout $i = 1, \ldots, s$. Dans l'équation minimale de x, dont tous les coefficients a_i sont dans A', les a_i sont des polynômes homogènes symétriques de degré i en les x_j, donc

$$V(a_i) \geq i V(x), \quad \forall\, i = 1, \ldots, s.$$

D'autre part, il existe i_0 tel que $V(a_{i_0} x^{s-i_0}) = \inf_{i=1,\ldots,s} (V(a_i x^{s-i}))$, donc

$$s V(x) = V(x^s) \geq V(a_{i_0} x^{s-i_0}) = V(a_{i_0}) + V(x) \times (s - i_0),$$

donc

$$V(x) = \inf_{i=1,\ldots,s} \frac{(V(a_i))}{i} = \frac{V(a_{i_0})}{i_0}.$$

Soient A_1 la fermeture intégrale de A dans K_1, $\mathfrak{b}_1$ l'idéal $\mathfrak{a}A_1$; on a

$$\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(y) = \overline{V}_{\mathfrak{a}}(y), \quad \forall\, y \in A'.$$

D'autre part, pour tout i, $\sigma_i(\mathfrak{a}'^n) = \mathfrak{a}'^n$ et $\sigma_i(A_1) = A_1$; donc $(\mathfrak{b}_1^n) = \mathfrak{b}_1^n$, donc

$$V_{\mathfrak{b}_1}(\sigma_i(y)) = V_{\mathfrak{b}_1}(y), \quad \forall\, y \in A_1,$$

donc

$$\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(\sigma_i(y)) = \overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(y), \quad \forall\, y \in A_1,$$

donc, dans l'équation (1), $\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(a_i) \geq i V(x)$, $\forall\, i = 1, \ldots, s$; de même que précédemment, il existe j_0 tel que

$$\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(x) = \frac{\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(a_{j_0})}{j_0},$$

donc

$$\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(x) = \inf_{i=1,\ldots,s} \frac{\overline{V}_{\mathfrak{b}_1}(a_i)}{i} = \inf_{i=1,\ldots,s} \frac{V(a_i)}{i} = V(x).$$

C. Q. F. D.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) : Notons V l'unique prolongement de $\overline{V}_{\mathfrak{b}}$ à L. Soit W une autre valuation de L prolongeant l'unique extension de $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$ à A. On a $V(x) \geqq V_{\mathfrak{a}}(x)$, $\forall\, x$ appartenant à A; d'autre part, l'anneau de W contenant A, il contient aussi B, et comme $\mathfrak{b}^n = \mathfrak{a}^n B$, $W(x) \geqq V_{\mathfrak{b}}(x)$, $\forall\, x \in B$, donc

$$W(x) \geqq \overline{V}_{\mathfrak{b}}(x), \quad \forall\, x \in B.$$

Supposons que W soit distinct de V, comme V et W sont de rang 1 et prolongent une même valuation, elles sont inéquivalentes. Donc il existe $x \in L$ tel que $W(x) < 0$ et $V(x) > 0$. On peut écrire $x = \frac{y}{z}$, avec $y \in B$ et $z \in A$. En effet, on peut en tous cas supposer $z \in B$; de plus, si $z^r + a_1 z^{r-1} + \ldots + a_r = 0$, avec $a_i \in A$, est l'équation de dépendance intégrale de z sur A, alors

$$z(z^{r-1} + \ldots + a_{r-1}) = -a_r \in A,$$

et, en multipliant haut et bas $\frac{y}{z}$ par $(z^{r-1} + \ldots + a_{r-1})$, x est bien de la forme voulue. On a donc $W(z) > W(y) \geqq V(y) > V(z)$, ce qui est impossible car $z \in A$, et donc $W(z) = V(z)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons maintenant A analytiquement réduit, par le théorème 2 de Rees, il existe une constante k telle que $0 \leqq \overline{V}_{\mathfrak{a}}(x) - V_{\mathfrak{a}}(x) \leqq k$, $\forall\, x \in A$, donc si $\overline{V}_{\mathfrak{a}}$ est une valuation

$$V_{\mathfrak{a}}(xy) - V_{\mathfrak{a}}(x) - V_{\mathfrak{a}}(y) \leqq \overline{V}_{\mathfrak{a}}(xy) - \overline{V}_{\mathfrak{a}}(x) - \overline{V}_{\mathfrak{a}}(y) + 2k = 2k.$$

C. Q. F. D.

Exemples :

(0) Un anneau local régulier est de pas nul.

(1) Un anneau local $(A, \mathfrak{m})$ noethérien complet intègre de hauteur 1 est de pas fini (pour sa filtration $\mathfrak{m}$-adique). En effet, sa clôture intégrale est un anneau de valuation discrète.

(2) Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local noethérien complet intègre de hauteur d équicaractéristique; alors il existe une réduction $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{m}$ (i. e. il existe r tel que $\mathfrak{m}^{r+1} = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^r$, donc $\mathfrak{m}^{r+h} = \mathfrak{q}^h \mathfrak{m}^r$, $\forall\, h$ entier) engendrée par d éléments $x_1, \ldots, x_d$ analytiquement indépendants sur $k = A/\mathfrak{m}$,

et donc $\overline{V}_{\mathfrak{m}} = \overline{V}_{\mathfrak{q}}$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que A soit de pas fini est que la valuation canonique du corps $k((x_1, \ldots, x_d))$ n'ait qu'une seule extension au corps de fractions de A.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*, chap. 3-4, 5-6. — Paris, Hermann, 1961-1964 (*Act. scient. et ind.*, 1293 et 1308; *Bourbaki*, 28 et 30).
[2] COHN (P. M.). — An invariant characterization of pseudo-valuations on a field, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 50, 1954, p. 159-177.
[3] REES (Daniel). — Valuations associated with ideals, II, *J. London math. Soc.* t. 31, 1956, p. 221-227.
[4] REES (Daniel). — Valuations associated with a local ring, II, *J. London math. Soc.*, t. 31, 1956, p. 228-235.
[5] SAMUEL (Pierre). — Some asymptotic properties of powers of ideals, *Annals of Math.*, Series 2, t. 56, 1952, p. 11-21.

(Manuscrit reçu le 10 janvier 1967.)

Lucien SZPIRO,
Assistant à la Faculté des Sciences de Paris,
43, rue Lacépède, 75-Paris, 5e.