

BULLETIN DE LA S. M. F.

F. BRIOSCHI

Sur les équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 105-108

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__105_0

© Bulletin de la S. M. F., 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une Lettre de M. BRIOSCHI à M. LAGUERRE.)

(Séance du 11 avril 1879.)

.... Les Communications que vous avez faites récemment à l'Académie des Sciences, *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires*, ont eu pour moi un grand intérêt, ayant dû autrefois m'occuper de questions analogues. Malheureusement je ne peux pas en ce moment revenir sur ce sujet; mais je désire vous faire connaître la méthode que j'avais suivie, laquelle me paraît conduire facilement à vos résultats et peut-être les compléter.

Soient les deux équations différentielles linéaires du troisième ordre

$$y''' + 3ly' + my = 0, \quad \frac{d^3 u}{dz^3} + 3\lambda \frac{du}{dz} + \mu u = 0,$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots$$

Je pose

$$y = vu,$$

v étant fonction de x .

On a

$$y' = v \frac{du}{dz} z' + v' u,$$

$$y'' = v \left(\frac{d^2 u}{dz^2} z'^2 + \frac{du}{dz} z'' \right) + 2v' \frac{du}{dz} z' + v'' u, \quad \dots$$

En substituant les y' , y'' , y''' dans la première équation différentielle, on doit obtenir la seconde, et, par conséquent, on arrive aux trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} vz'' + v'z' = 0, \\ vz''' + 3v'z'' + 3v''z' + 3lvz' = 3\lambda vz'^3, \\ v''' + 3lv' + mv = \mu vz'^3. \end{cases}$$

Or, en posant $\frac{z''}{z'} = Z$, la première donne

$$v' = -Zv,$$

et, par suite,

$$v'' = -(Z' - Z^2)v, \quad v''' = -(Z'' - 3ZZ' + Z^3) \cdot v.$$

D'autre part,

$$\frac{z'''}{z'} = Z' + Z^2;$$

la seconde des équations (1) se transforme donc ainsi qu'il suit :

$$(2) \quad 2Z' = Z^2 + 3(l - \lambda z'^2),$$

et la troisième devient

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + 3lZ - (m - \mu z'^3) = 0.$$

Enfin, en remplaçant dans celles-ci Z' et Z'' par leurs valeurs déduites de l'équation (2), on trouve votre relation

$$\left(3 \frac{d\lambda}{dz} - 2\mu\right) z'^3 = 3l' - 2m.$$

Je pose

$$(3) \quad 3 \frac{d\lambda}{dz} - 2\mu = \alpha \quad \text{et} \quad 3l' - 2m = a,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha z'^3 = a.$$

On a

$$3Z = \frac{d \log a}{dx} - \frac{d \log \alpha}{dz} z'.$$

Cette valeur de Z , substituée dans l'équation (2), conduit très-facilement à la relation suivante :

$$\beta z'^2 = b,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$6 \frac{d^2 \log \alpha}{dz^2} - \left(\frac{d \log \alpha}{dz} \right)^2 - 27\lambda = \beta$$

et

$$6 \frac{d^2 \log a}{dx^2} - \left(\frac{d \log a}{dx} \right)^2 - 27l = b.$$

On aura enfin, par conséquent,

$$\frac{\beta^3}{\alpha^2} = \frac{b^3}{a^2},$$

relation *invariante* entre les seuls coefficients des deux équations différentielles et leurs dérivées.

Il est très-important de noter que ces formes invariantes restent les mêmes pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

Par exemple, pour les équations différentielles du quatrième ordre

$$y^{iv} + 6ly'' + 4my' + ny = 0$$

et

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 6\lambda \frac{d^3 u}{dz^3} + 4\mu \frac{du}{dz} + \nu u = 0,$$

on trouve

$$y' = -\frac{3}{2}Zy, \quad 2Z' = Z^2 + \frac{12}{5}(l - \lambda z'^2),$$

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + \frac{12}{5}lZ - \frac{4}{5}(m - \mu z'^3) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha z'^3 = a,$$

α et a étant définis par les équations (3).

En posant

$$6 \frac{d^2 \log \alpha}{dz^2} - \left(\frac{d \log \alpha}{dz} \right)^2 - \frac{108}{5} \lambda = \beta,$$

$$6 \frac{d^2 \log a}{dz^2} - \left(\frac{d \log a}{dz} \right)^2 - \frac{108}{5} l = b,$$

on en déduit

$$\beta z'^2 = b \quad \text{et} \quad \frac{\beta^3}{\alpha^2} = \frac{b^3}{a^3}.$$

Enfin la dernière équation donne

$$\gamma z'^4 = c,$$

ou

$$\gamma = 30 \frac{d^2 \lambda}{dz^2} - 50 \frac{d\mu}{dz} - 81 \lambda^2 + 25 \nu$$

et

$$c = 30l'' - 50\mu' - 81l^2 + 25n.$$

J'ajoute une dernière remarque. Si, pour les équations différentielles du troisième ordre, l'invariant a est nul, l'équation se réduit à la suivante, du second ordre,

$$z'' + \frac{3}{4}lz = 0,$$

où

$$y = \xi^2.$$

Si, pour l'équation du quatrième ordre, les invariants a et c sont nuls, on a

$$\xi'' + \frac{3}{5} l \xi = 0,$$

équation où j'ai posé

$$y = \xi^3.$$

Si vous croyez que ces résultats peuvent avoir quelque intérêt pour nos collègues de la Société mathématique, vous pouvez les leur communiquer....
