BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE SAMUEL

# Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 92 (1964), p. 237-249
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__237_0>

*Bull. Soc. math. France*,
92, 1964, p. 237 à 249.

# ANNEAUX GRADUÉS FACTORIELS ET MODULES RÉFLEXIFS ;

PAR

PIERRE SAMUEL

(Paris).

Étant donnés un anneau factoriel $A$ et un $A$-module $M$, on peut se demander à quelles conditions l'algèbre symétrique $S(M)$ est un anneau factoriel. C'est classiquement vrai lorsque $M$ est libre, et déjà connu lorsque $M$ est projectif [4]. Nous nous proposons de montrer que, pour que $S(M)$ soit factoriel, il faut et il suffit que $M$ et toutes ses puissances symétriques $S^n(M)$ soient des modules réflexifs; en particulier nous retrouvons le résultat de [4] disant que, pour que l'algèbre symétrique d'un idéal $\mathfrak{a}$ soit factorielle, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ soit principal. Nous donnons aussi l'exemple d'un module réflexif $M$ sur un anneau factoriel tel que $S^2(M)$ ne soit pas réflexif, de sorte que $S(M)$ n'est pas factorielle; par contre, nous exhibons une classe de modules réflexifs non projectifs dont l'algèbre symétrique est factorielle. Pour arriver à ces résultats, nous démontrerons en chemin divers résultats sur les modules réflexifs et les anneaux gradués factoriels.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux sont unitaires, commutatifs et *nœthériens*, tous les modules sont unitaires et *de type fini*. Les définitions et résultats classiques d'algèbre commutative qu'on trouve dans [3] et dans [6] sont utilisés sans avertissement.

## 1. Quelques propriétés des modules réflexifs.

Soit $M$ un module sur un anneau $A$. Rappelons ([2], § 2, n° 7) que $M$ est dit *réflexif* si l'homomorphisme canonique de $M$ dans son bidual $M^{**}$ est bijectif. Cette notion est conservée par somme directe finie, passage à un facteur direct, changement d'anneau et localisation. Les idéaux $\mathfrak{a}$

réflexifs sont les idéaux « divisoriels », c'est-à-dire tels que $A : (A : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, ou encore les intersections d'idéaux (fractionnaires) principaux; si $A$ est factoriel, ce sont donc les idéaux principaux. Les modules réflexifs sur les anneaux intégralement clos sont étudiés dans [3], chap. VII (en préparation). Pour la commodité du lecteur nous commencerons par le résultat classique suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient $A$ un anneau intégralement clos, $P(A)$ l'ensemble de ses idéaux premiers de hauteur* 1, *et $M$ un $A$-module sans torsion. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a. $M$ est réflexif;*

*b. on a $M = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P(A)} M_{\mathfrak{p}}$ ($M$ et les $M_{\mathfrak{p}}$ étant considérés comme plongés dans l'espace vectoriel $K \otimes_A M$ sur le corps des fractions $K$ de $A$);*

*c. toute $A$-suite $(a, b)$ à deux éléments est une $M$-suite.*

Plongeons en effet $M$ dans l'espace vectoriel $V = K \otimes_A M$. Alors le dual $M^\star$ s'identifie à l'ensemble des formes $K$-linéaires $f$ sur $V$ telles que $f(M) \subset A$. D'autre part, $(M_{\mathfrak{p}})^\star$ s'identifie à $(M^\star)_{\mathfrak{p}}$, de sorte que nous pouvons employer la notation $M^\star_{\mathfrak{p}}$.

Comme $A$ est l'intersection des $A_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}\in P(A)$, on a

$$M^\star = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P(A)} M^\star_{\mathfrak{p}}$$

car $f(M_{\mathfrak{p}}) \subset A_{\mathfrak{p}}$, pour tout $\mathfrak{p}\in P(A)$, entraîne $f(M)\subset A$. En particulier $M^{\star\star}$ est l'intersection des $M^{\star\star}_{\mathfrak{p}}$; comme $A_{\mathfrak{p}}$ est principal, $M_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$, donc égal à son bidual, de sorte que $M^{\star\star}$ est aussi l'intersection des $M_{\mathfrak{p}}$. Ceci démontre l'équivalence de ($a$) et ($b$).

Supposons ($b$) vraie, et soit $(a, b)$ une $A$-suite, et $x, y$ des éléments de $M$ tels que $ax + by = 0$. Comme, pour $\mathfrak{p}\in P(A)$, $a$ et $b$ sont étrangers dans $A_{\mathfrak{p}}$ et que $M_{\mathfrak{p}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{p}}$, on a $y \in aM_{\mathfrak{p}}$. Or, par homothétie, on déduit de ($b$) que l'intersection des $aM_{\mathfrak{p}}$ est $aM$, d'où $y\in aM$. Ceci montre que $(a, b)$ est une $M$-suite.

Réciproquement, supposons ($c$) vraie, et soit $z$ un élément de l'intersection des $M_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}\in P(A)$). Écrivons $z = y/a$ avec $y\in M$ et $a\in A$, et aussi $z = x(\mathfrak{p})/s(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p}\in P(A)$, avec $x(\mathfrak{p})\in M$ et $s(\mathfrak{p})\in A - \mathfrak{p}$. Soit $(\mathfrak{p}_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ la famille des idéaux premiers associés à $Aa$; on a $\mathfrak{p}_i \in P(A)$. L'idéal engendré par les $s(\mathfrak{p}_i)$ n'étant contenu dans aucun $\mathfrak{p}_i$, il contient un élément $b = \sum_{c=1}^{n} c_i s(\mathfrak{p}_i)$ qui n'est contenu dans aucun $\mathfrak{p}_i$ (lemme d'évitement des idéaux premiers); alors $(a, b)$ est une $A$-suite. Or on a

$$by = a \sum_{i=1}^{n} c_i x(\mathfrak{p}_i)$$

par construction; comme $(a, b)$ est une $M$-suite, on en déduit que $y \in aM$; d'où $z \in M$, de sorte que $(b)$ est vraie.

*Remarque.* — Un module réflexif est nécessairement sans torsion (car c'est un dual). Lorsque $A$ est de dimension 1 (i. e. un anneau de Dedekind), $(b)$ est automatiquement vrai par le théorème de globalisation, et $(c)$ est trivialement vrai faute de $A$-suites à deux termes; dans ce cas, tout module sans torsion (de type fini rappelons-le) est projectif, donc réflexif.

PROPOSITION 2. — *Sur un anneau local régulier de dimension 2, tout module réflexif $M$ est libre.*

En effet, si $M$ est un module sur un anneau local régulier $A$, on a $\operatorname{prof}(M) + \operatorname{dh}(M) = \dim(A)$, où $\operatorname{prof}(M)$ désigne la profondeur de $M$, c'est-à-dire la longueur des $M$-suites maximales, et $\operatorname{dh}(M)$ sa dimension homologique (*cf.* [1]). Ici, on a $\dim(A) = 2$ et $\operatorname{prof}(M) = 2$ d'après la proposition 1$(c)$; d'où $\operatorname{dh}(M) = 0$, ce qui montre que $M$ est libre.
Par localisation on voit donc que, sur un anneau local régulier de dimension $n$, tout module réflexif $M$ est « libre en codimension 2 »; d'autre part, on voit que $\operatorname{dh}(M) \leq n - 2$. La réciproque est vraie en dimension 3.

PROPOSITION 3. — *Soit $A$ un anneau local régulier de dimension 3. Pour qu'un $A$-module $M$ soit réflexif, il faut et il suffit qu'on ait* $\operatorname{dh}(M) \leq 1$, *et que $M_\mathfrak{p}$ soit libre sur $A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ distinct de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$.*

On vient de voir la nécessité. Démontrons la suffisance. Montrons d'abord que $M$ est sans torsion; soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à $M$; on a $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, sinon $\operatorname{prof}(M) = 0$, et $\operatorname{dh}(M) = 3$; alors, $M_\mathfrak{p}$ est libre sur $A_\mathfrak{p}$ de sorte que, comme $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ est associé à $M_\mathfrak{p}$, on a $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = 0$, d'où $\mathfrak{p} = 0$, et $M$ est sans torsion. Plongeons alors $M$ dans $K \otimes_A M$ ($K$ : corps des fractions de $A$), et soit $z$ un élément de l'intersection des $M_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \in P(A)$. Comme $M_\mathfrak{q}$ est libre, donc réflexif, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$, on a $z \in M_\mathfrak{q}$ pour tout tel idéal $\mathfrak{q}$. Donc, si $z \notin M$, l'idéal $M : Az$ est primaire pour $\mathfrak{m}$; or $M$ et $z$ sont contenus dans un sous-$A$-module libre $L$ de $K \otimes M$ (« dénominateur commun »), de sorte que, si $z \notin M$, $L/M$ contient un élément dont l'annulateur est primaire pour $\mathfrak{m}$; on a alors

$$\operatorname{prof}(L/M) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{dh}(L/M) = 3.$$

Or la suite exacte $0 \to M \to L \to L/M \to 0$ et les relations $\mathrm{dh}(M) \leqq 1$, $\mathrm{dh}(L) = 0$ montrent qu'on a $\mathrm{dh}(L/M) \leqq 2$ ([6], chap. VII, § 13, formule (7)). Cette contradiction montre qu'on a $z \in M$, de sorte que $M$ est réflexif par la proposition 1 ($b$). C. Q. F. D.

Nous allons maintenant donner un exemple de modules réflexifs, non projectifs en général :

PROPOSITION 4. — *Soient $A$ un anneau, $q$ un entier $\geqq 1$ et $P_q(A)$ l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $A$ pour lesquels il existe une $A$-suite $(b_1, \ldots, b_{q'})$ avec $q' \leqq q$, telle que $\mathfrak{p}$ soit associé à l'idéal $\sum_{i=1}^{q'} A b_i$. D'autre part, soient $M$ le $A$-module défini par les générateurs $(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ et la relation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ $(a_i \in A)$, et $\mathfrak{a}$ l'idéal $\sum_{i=1}^{n} A a_i$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

*a. toute $A$-suite $(b_1, \ldots, b_{q'})$ avec $q' \leqq q$ est une $M$-suite;*

*b. l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est contenu dans aucun élément de $P_q(A)$.*

Procédons par récurrence sur $q$, et traitons d'abord le cas $q = 1$. La négation de ($a$) veut dire qu'il existe un élément $b$ de $A$, non inversible et non diviseur de 0, et un élément $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \neq 0$ de $M$ tels que $bx = 0$. Ceci veut dire que les $bc_i$ sont des équimultiples des $a_i$, ou encore qu'il existe $d \in A$ tel qu'on ait $d/b \notin A$ et $d a_i \in A$ pour tout $i$ (les quotients étant pris dans l'anneau total de fractions de $A$). En d'autres termes, il existe $b$ et $d$ tels que $d \notin Ab$ et $d \in Ab : \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $b$ est tel que $Ab \neq Ab : \mathfrak{a}$. Ceci se traduit en disant que $\mathfrak{a}$ est formé de diviseurs de 0 modulo $Ab$, ou encore que $\mathfrak{a}$ est contenu dans un idéal premier associé à $Ab$, c'est-à-dire dans un élément de $P_1(A)$. Ainsi, pour $q = 1$, la négation de ($a$) est équivalente à la négation de ($b$), donc ($a$) équivaut à ($b$).

Ceci étant, montrons, par récurrence sur $q$, que ($b$) implique ($a$). Soit $(b_1, \ldots, b_{q'})$ une $A$-suite avec $q' \leqq q$. Si $q' < q$, c'est une $M$-suite d'après l'hypothèse de récurrence. Supposons donc $q' = q$. Alors $(b_1, \ldots, b_{q-1})$ est une $M$-suite d'après l'hypothèse de récurrence. Posons $A^0 = A/(b_1, \ldots, b_{q-1})$ et $M^0 = A^0 \otimes_A M$. Il s'agit de montrer que la classe $b_q^0$ de $b_q$ dans $A^0$ n'est pas un diviseur de zéro dans $M^0$. Or ceci résulte du cas $q = 1$ appliqué à $A^0$ et $M^0$, en tenant compte du fait que les images réciproques dans $A$ des éléments de $P_1(A^0)$ sont des éléments de $P_q(A)$.

Réciproquement montrons que ($a$) implique ($b$). Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathfrak{a}$ soit contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à l'idéal $\mathfrak{b}$ engendré par une $A$-suite $(b_1, \ldots, b_q)$. Soient $A^0$, $M^0$ et $b_q^0$ comme ci-dessus. L'image $\mathfrak{a}^0$ de $\mathfrak{a}$ dans $A^0$ est alors contenue dans l'image $\mathfrak{p}^0$ de $\mathfrak{p}$, qui est un idéal premier associé à $A^0 b_q^0$. Le cas $q = 1$ appliqué à $A^0$ et $M^0$ montre que $b_q^0$ est un diviseur de zéro dans $M^0$; donc $(b_1, \ldots, b_q)$ n'est pas une $M$-suite. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition* 4, *supposons $A$ intègre. Pour que $M$ soit sans torsion, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ ne soit contenu dans aucun idéal premier associé d'un idéal principal (c'est-à-dire dans aucun idéal premier de hauteur* 1 *lorsque $A$ est intégralement clos ou de Macaulay).*

C'est en effet un cas particulier du cas $q = 1$.

COROLLAIRE 2. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition* 4, *supposons $A$ intégralement clos et de Macaulay. Pour que $M$ soit réflexif, il faut et il suffit que l'idéal $\mathfrak{a}$ ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur* 2.

C'est un cas particulier du cas $q = 2$, compte tenu de la proposition 1 (*c*),

REMARQUES :

1° Supposons $A$ intègre et, ou bien intégralement clos, ou bien de Macaulay. Disons que deux éléments $(a_i)$, $(a'_i)$ de $A^n$ sont proportionnels s'il existe un élément $x$ du corps des fractions de $A$ tels que $a'_i = xa_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Le corollaire 1 peut se traduire comme suit : si l'idéal engendré par les $a_i$ n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1, alors tout élément de $A^n$ proportionnel à $(a_i)$ en est un multiple.

2° Soit $M$ un module défini par $n$ générateurs $x_i$ et une relation $\sum_i a_i x_i = 0$. La proposition 4 et ses corollaires montrent que certaines propriétés de $M$ ne dépendent que de l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par les $a_i$, et non du choix des générateurs $a_i$. Ceci s'explique de la façon suivante. Soit $(a'_j)$ $(j = 1, \ldots, n')$ un autre système de générateurs de $\mathfrak{a}$, et soit $M'$ le module défini par $n'$ générateurs $x'_j$ et la relation $\sum_j a'_j x'_j = 0$. *Alors il existe des modules libres $L$ et $L'$ tels que les modules $M \oplus L$ et $M' \oplus L'$ soient isomorphes* (i. e. $M$ et $M'$ sont « librement équivalents »).

En effet, par comparaison avec le système $(a_i, a'_j)$, on se ramène au cas où $(a'_j)$ se déduit de $(a_i)$ en lui ajoutant un élément $b = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Alors $M'$ est défini par les générateurs $(y_1, \ldots, y_n, y)$ et la relation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + by = 0.$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(y_i + c_i y) = 0,$$

il existe un homomorphisme $u$ de $M$ dans $M'$ tel que $u(x_i) = y_i + c_i y$ pour tout $i$. On voit aisément que $u$ est injectif, et que $M'$ est somme directe de $u(M)$ et de $Ay$. D'où notre assertion.

Lorsque $A$ est *local*, il y a, parmi les modules correspondant comme ci-dessus aux systèmes de générateurs de $\mathfrak{a}$, ceux qui correspondent aux systèmes *minimaux* de générateurs. Comme on passe d'un système minimal de générateurs $(a_i)$ de $\mathfrak{a}$ à un autre $(a'_i)$ par des formules

$$a'_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_j$$

où $\det(b_{ij})$ est inversible, les formules

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} x'_j$$

définissent un isomorphisme du module défini par les générateurs $x_i$ et la relation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

sur le module défini par les générateurs $(x'_i)$ et la relation

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i = 0.$$

Donc les modules correspondant aux systèmes minimaux de générateurs de $\mathfrak{a}$ sont *tous isomorphes*; soit $M_0$ l'un de ceux-ci. Alors tout module correspondant à un système quelconque de générateurs de $\mathfrak{a}$ est isomorphe à $M_0 \oplus L$, où $L$ est libre.

## 2. Factorialité des algèbres symétriques.

THÉORÈME 1. — *Soit* $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ *un anneau gradué factoriel à degrés positifs. Alors* $A_0$ *est factoriel, et les* $A_n$ *sont des modules réflexifs sur* $A_0$.

Soient $a, b \in A_0$; alors $Aa \cap Ab$ est un idéal principal et homogène, donc engendré par un générateur homogène $c$, nécessairement de degré $0$;

on a donc $A_0 a \cap A_0 b = A_0 c$, de sorte que $A_0$ est factoriel. Comme $A$ est intègre, les $A_n$ sont des $A_0$-modules sans torsion. Pour montrer leur réflexivité, utilisons la proposition 1 (*c*) : si $(a, b)$ est une $A_0$-suite, les éléments $a$, $b$ sont étrangers dans $A_0$, donc aussi dans $A$, car un diviseur commun de $a$ et $b$ est nécessairement de degré 0; donc $(a, b)$ est une $A$-suite, et, *a fortiori*, une $A_n$-suite pour tout $n$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Soient $B$ un anneau factoriel et $P$ un $B$-module projectif. Alors l'algèbre symétrique $S(P)$ est factorielle.*

Soit $P'$ un $B$-module tel que $P \oplus P'$ soit un module libre $L$. Graduons $T = S(L) = S(P) \otimes S(P')$ par les $T_n = S(P) \otimes S^n(P')$. Comme $T$ est factoriel (GAUSS), le théorème 1 montre que $T_0 = S(P)$ est factoriel.

COROLLAIRE 2. — *Soient $B$ un anneau et $\mathfrak{b}$ un idéal de $B$. Pour que $S(\mathfrak{b})$ soit factorielle, il faut et il suffit que $B$ soit factoriel et $\mathfrak{b}$ principal.*

La suffisance est évidente par GAUSS. La nécessité résulte du théorème 1, puisqu'un idéal réflexif d'un anneau factoriel est principal.

La réciproque du théorème 1 est fausse, comme on le voit en prenant pour $A_0$ un corps. Cependant :

THÉORÈME 2. — *Soient $A$ un anneau et $M$ un $A$-module. Pour que l'algèbre symétrique $S(M)$ soit factorielle, il faut et il suffit que $A$ soit factoriel et que les $S^n(M)$ soient tous des $A$-modules réflexifs.*

La nécessité résulte du théorème 1. Démontrons la suffisance. Alors $S(M)$ est un $A$-module sans torsion, donc un anneau intègre : en effet, en notant $T$ l'ensemble des éléments non nuls de $A$, $S(M)$ s'injecte alors dans $T^{-1} S(M) = S_{T^{-1}A}(T^{-1} M)$ qui est un anneau de polynômes sur le corps $T^{-1}A$, donc un anneau intègre. Montrons maintenant que tout élément premier $p$ de $A$ est premier dans $S(M)$; il suffit de montrer que, si $x$, $y$ sont des éléments homogènes de $S(M)$ tels que $p$ divise $xy$, alors $p$ divise l'un d'eux; posons $\mathfrak{p} = Ap$; l'anneau $S(M)_\mathfrak{p} = S_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ est factoriel, car $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète et $M_\mathfrak{p}$ est un module libre sur $A_\mathfrak{p}$; donc $p$ divise par exemple $x$ dans cet anneau, de sorte qu'on a, en notant $n$ le degré de $x$, $x/p \in S^n(M)_\mathfrak{p}$; d'autre part, on a évidemment $x/p \in S^n(M)_\mathfrak{q}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $A$; comme $S^n(M)$ est réflexif, on a donc $x/p \in S^n(M)$, de sorte que $p$ divise $x$. Ceci étant, l'ensemble $T$ des éléments non nuls de $A$ est engendré par des éléments premiers de $S(M)$; comme $T^{-1} S(M)$ est factoriel en tant qu'anneau de polynômes sur un corps, $S(M)$ est factoriel par le théorème de Nagata ([5], § 1, corollaire de la proposition 2).

C. Q. F. D.

Remarque. — Soient $A$ un anneau intègre et $M$ un $A$-module. On a montré en cours de route que, pour que $S(M)$ soit intègre, il faut et il suffit que ce soit un $A$-module sans torsion.

Étant donnés un anneau factoriel $A$ et un $A$-module réflexif $M$, le problème se pose donc de savoir si tous les $S^n(M)$ sont des modules réflexifs [c'est-à-dire si $S(M)$ est factoriel]. Nous verrons plus loin que c'est faux. Il y a cependant un cas non trivial où c'est vrai (« non trivial » en ce sens que $M$ n'est pas projectif) :

Proposition 5. — *Soient $A$ un anneau de Macaulay factoriel $(a_1, \ldots, a_n)$ un système d'éléments de $A$, $\mathfrak{a}$ l'idéal qu'ils engendrent, $M$ le $A$-module défini par les générateurs $(x_i)$ et la relation*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0,$$

*et $S(M) = A[X_1, \ldots, X_n]/\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)$ son algèbre symétrique. Si $\mathfrak{a}$ n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 2 (d'où $n \geqq 3$), alors $S(M)$ est factorielle et les $S^n(M)$ sont des $A$-modules réflexifs.*

Nous aurons besoin de deux lemmes :

Lemme 1. — *Soient $A$ un anneau intègre, et $(a, b)$ une $A$-suite. Alors l'idéal $(aX + b)$ de $A[X]$ est premier.*

On montre en effet sans difficultés que le $A$-homomorphisme $f$ de $A[X]$ dans le corps des fractions de $A$ défini par $f(X) = -b/a$ admet $(aX + b)$ pour noyau (*cf.* [5], § 3, proposition 8).

Lemme 2. — *Soient $A$ un anneau de Macaulay intègre, $(a_1, \ldots, a_n)$ un système d'éléments de $A$ tel que l'idéal qu'ils engendrent ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1 (d'où $n \geqq 2$). Alors l'idéal $(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n)$ de $A[X_1, \ldots, X_n]$ est premier.*

On peut supposer $a_n \neq 0$. Posons

$$B = A[X_1, \ldots, X_{n-1}] \qquad \text{et} \qquad b = a_1 X_1 + \ldots + a_{n-1} X_{n-1}.$$

En vertu du lemme 1 (appliqué à $B$) il suffit de démontrer que $(b, a_n)$ est une $B$-suite, c'est-à-dire (comme $B$ est de Macaulay) que $b$ et $a_n$ ne sont tous deux contenus dans aucun idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 de $B$. Or, si $\mathfrak{P}$ était un tel idéal, on aurait $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A \neq (0)$ (car $a_n \in \mathfrak{P}$), d'où $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}B$ [car $h(\mathfrak{P}) = 1$], ce qui impliquerait que $a_1, \ldots, a_{n-1}$ soient dans $\mathfrak{p}$; comme $a_n \in \mathfrak{p}$, on obtiendrait une contradiction.

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant la proposition 5. Le lemme 2 montre que $S = S(M)$ est intègre. Soit $p$ un élément premier de $A$. On a $S/pS = (A/Ap)[X_1, \ldots, X_n]/\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^0 X_i\right)$, où les $a_i^0$ désignent les images canoniques des $a_i$ dans $A/Ap$. Les $a_i^0$ ne sont contenus dans aucun idéal premier de hauteur 1 de $A/Ap$, car, sinon, les $a_i$ seraient contenus dans un idéal premier de hauteur 2 de $A$. Le lemme 2, appliqué à $A/Ap$, montre que $S/pS$ est intègre, donc que $p$ est premier dans $S$. Comme au théorème 2, le théorème de Nagata montre que $S = S(M)$ est factoriel. La réflexivité des $S^n(M)$ résulte alors du théorème 2.

C. Q. F. D.

UN EXEMPLE. — Nous dirons qu'une variété (affine ou projective) est *factorielle* si son anneau de coordonnées est factoriel. Alors, si $H$ est une hypersurface affine non singulière en codimension 2 et factorielle, son *fibré tangent est une variété factorielle.* En effet, si $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ est l'anneau de $H$, et si $F(x) = 0$ est son équation, l'anneau du fibré tangent est $A[U_1, \ldots, U_n]/\left(\sum_{i=1}^{n} F'_i(x)\, U_i\right)$; or l'idéal engendré par les dérivées partielles $F'_i(x)$ définit le lieu singulier de $H$, et l'on conclut par la proposition 5. D'après un théorème de Grothendieck-Severi, l'hypothèse (et la conclusion donc) sont vraies lorsque $\dim(H) \geq 3$, et que $H$ est une hypersurface non singulière en codimension 3.

REMARQUE. — Les modules $M$ décrits dans la proposition 5 ne sont pas projectifs en général [prendre $A$ local régulier de dimension $\geq 3$, et pour $(a_i)$ un système de paramètres]. Une hypothèse sur les puissances symétriques est donc nettement moins forte que l'hypothèse analogue sur les puissances tensorielles. Ainsi le théorème d'Auslander disant que, si $M \otimes M$ est sans torsion, alors $M$ est projectif, n'a pas d'analogue ici.

UN CONTRE-EXEMPLE. — Nous allons construire un module réflexif $M$ tel que $S^2(M)$ ne soit pas réflexif; alors $S(M)$ n'est pas factoriel par le théorème 2. Prenons pour $A$ un anneau local régulier de dimension 3, et notons $(a, b, c)$ un système de générateurs de son idéal maximal $\mathfrak{m}$. Prenons pour $M$ le quotient de $A^5$ par le sous-module $P$ engendré par les vecteurs

$$u = (a_i) = (a, b, 0, c, 0),$$
$$v = (b_i) = (0, a, b, 0, c).$$

Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, $P$ est libre, et l'on a donc $\mathrm{dh}(M) \leq 1$. D'autre part, $a^2$, $b^2$, $c^2$ figurent parmi les mineurs d'ordre 2 de la matrice ci-dessus; comme ils ne sont contenus dans aucun idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 2 de $A$, on voit que, pour un tel $\mathfrak{p}$, deux des vecteurs de la base canonique de $A^5$ sont combinaisons $(A_{\mathfrak{p}})$-linéaires des trois autres, de $u$ et de $v$. Ainsi $M$ est libre en codimension 2, de sorte qu'il est réflexif par la proposition 3 du paragraphe 1.

D'autre part, $S^2(M)$ est le quotient de $S^2(A^5) = A^{15}$ par le sous-module $E$ engendré par les $ue_i$ et les $ve_i$ [où $(e_i)$ désigne la base canonique de $A^5$]. Comme $M$ est de rang 3, $S^2(M)$ est de rang 6, donc $E$ est de rang $15 - 6 = 9$. Or il est engendré par les 10 générateurs $ue_i$, $ve_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$, liés par l'évidente relation

$$\sum_{i=1}^{5} b_i(ue_i) - \sum_{i=1}^{5} a_i(ve_i) = 0$$

(traduction de $vu - uv = 0$). Mais le module défini par 10 générateurs $x_i$, $y_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ et une relation

$$\sum_{i=1}^{5} b_i x_i - \sum_{i=1}^{5} a_i y_i = 0$$

est sans torsion d'après le corollaire 1 de la proposition 4 (§ 1) et de rang 9; il est donc isomorphe à $E$. Comme les coefficients $b_i$, $a_i$ de l'unique relation liant les générateurs de $E$ sont tous dans $\mathfrak{m}$, on a $[E/\mathfrak{m}E : A/\mathfrak{m}] = 10$; donc $E$ n'est *pas libre* puisqu'il est de rang 9. Par conséquent, on a $\mathrm{dh}(E) = 1$, d'où $\mathrm{dh}(S^2(M)) = 2$; la proposition 3 du paragraphe 1 montre alors que $S^2(M)$ n'est pas réflexif.

## 3. **Généralisations.**

Nous allons généraliser certains résultats du paragraphe 1.

PROPOSITION 6. — *Soient $A$ un anneau de Macaulay, $M$ un $A$-module, et $q$ un entier $\geqq 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i)$_q$ *on a* $\mathrm{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geqq \inf(q, h(\mathfrak{p}))$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $A$;

(ii)$_q$ *toute $A$-suite de longueur $\leqq q$ est une $M$-suite.*

Montrons d'abord que (ii)$_q$ implique (i)$_q$. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier et $j$ un entier tels que $j \leqq \inf(q, h(\mathfrak{p}))$. Comme $A$ est un anneau de Macaulay, $\mathfrak{p}$ contient une $A$-suite de longueur $j$; c'est donc une $M$-suite, et son image canonique dans $A_{\mathfrak{p}}$ est ainsi une $M_{\mathfrak{p}}$-suite. Donc $\mathrm{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geqq j$.

Pour montrer que (i)$_q$ implique (ii)$_q$ nous procéderons par récurrence sur $q$. Traitons d'abord le cas $q = 1$. Soit $x$ un élément de $A$ qui n'est pas diviseur de zéro dans $A$. Il s'agit de montrer que $x$ n'est pas diviseur de zéro dans $M$, sous l'hypothèse que $\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geqq 1$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $\geqq 1$. Or $\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) \geqq 1$ implique $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}(M)$ [sinon $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{p}})$, et $\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$]. Donc les idéaux premiers associés à $M$ sont tous de hauteur 0. Comme $x$ n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 0, $x$ n'est donc pas diviseur de zéro dans $M$.

Passons au cas général. Soit $(x_1, \ldots, x_q)$ une $A$-suite. Supposons $(\mathrm{i})_q$ vraie pour $M$. On a, *a fortiori*, $(\mathrm{i})_{q-1}$, donc $(\mathrm{ii})_{q-1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, de sorte que $(x_1, \ldots, x_{q-1})$ est une $M$-suite. Posons

$$A^0 = A/(x_1, \ldots, x_{q-1}) \qquad \text{et} \qquad M^0 = A^0 \otimes_A M.$$

Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier contenant $(x_1, \ldots, x_{q-1})$, et $\mathfrak{p}^0$ son image dans $A^0$. Comme $A$ est un anneau de Macaulay, on a

$$h(\mathfrak{p}) = h(\mathfrak{p}^0) + q - 1;$$

d'autre part, comme $M^0_{\mathfrak{p}^0}$ est un quotient de $M_{\mathfrak{p}}$ par une $M_{\mathfrak{p}}$-suite de longueur $q-1$, on a

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{prof}(M^0_{\mathfrak{p}^0}) + q - 1.$$

Ainsi l'hypothèse $(\mathrm{i})_q$ faite sur $M$ donne

$$\operatorname{prof}(M^0_{\mathfrak{p}^0}) \geqq \inf(1, h(\mathfrak{p}^0)),$$

de sorte que $M^0$ vérifie $(\mathrm{i})_1$. D'après le début de la démonstration, il vérifie $(\mathrm{ii})_1$, de sorte que l'image canonique de $x_q$ dans $A^0$ n'est pas diviseur de zéro dans $M^0$. Ainsi $(x_1, \ldots, x_q)$ est une $M$-suite.

C. Q. F. D.

REMARQUE. — Lorsque $A$ est intègre, $(\mathrm{ii})_1$ veut dire que $M$ est *sans torsion*. Lorsque $A$ est intégralement clos, $(\mathrm{ii})_2$ veut dire que $M$ est *réflexif* [§ 1, proposition 1 (c)].

COROLLAIRE 1. — *Soient $A$ un anneau de Macaulay, $(a_i)$ des éléments de $A$, $\mathfrak{a}$ l'idéal qu'ils engendrent, et $M$ le $A$-module défini par les générateurs $(x_i)$ et la relation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Pour que $M$ jouisse de* $(\mathrm{i})_q$ *ou* $(\mathrm{ii})_q$, *il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ ne soit contenu dans aucun idéal premier de hauteur $q$.*

Ceci résulte de la proposition 4 (§ 1), en tenant compte de ce que, pour un anneau de Macaulay $A$, l'ensemble $P_q(A)$ de la proposition 4 est celui des idéaux premiers de hauteur $\leqq q$.

COROLLAIRE 2. — *Soient $A$ un anneau local régulier, $M$ un $A$-module, et $q$ un entier $\geqq 1$. Alors les propriétés* $(\mathrm{i})_q$ *et* $(\mathrm{ii})_q$ *sont équivalentes à :*

$(\mathrm{iii})_q$ *on a* $\operatorname{dh}(M_{\mathfrak{p}}) \leqq \sup(\mathrm{h}(\mathfrak{p}) - q, 0)$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $A$.

En effet, comme $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier de dimension $h(\mathfrak{p})$, on a

$$\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}}) = h(\mathfrak{p}) - \operatorname{dh}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Ainsi $(\mathrm{i})_q$ équivaut à

$$h(\mathfrak{p}) - \operatorname{dh}(M_{\mathfrak{p}}) \geqq \inf(q, h(\mathfrak{p})),$$

relation élémentairement équivalente à $(\mathrm{iii})_q$.

Pour $q = 2$, le corollaire 2 donne le résultat suivant, qui contient la proposition 3 du paragraphe 1 :

COROLLAIRE 3. — *Soient $A$ un anneau local régulier et $M$ un $A$-module. Pour que $M$ soit réflexif, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\operatorname{dh}(M_{\mathfrak{p}}) \leqq \sup(h(\mathfrak{p}) - 2, 0)$$

*pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $A$.*

*Remarque sur les anneaux gradués intégralement clos.* — Si $A = \bigoplus_{n \geqq 0} A_n$ est un anneau gradué intégralement clos, il est exact que $A_0$ est intégralement clos (c'est l'intersection de $A$ et du corps formé par les quotients d'éléments homogènes de même degré), mais les $A_n$ ne sont pas toujours des modules réflexifs sur $A_0$ : prenons pour $A_0$ l'anneau local $(k[a, b])_{(a, b)}$ de l'origine dans le plan, et $A = A_0[X, Y]/(aX + bY)$; alors $A$ est intégralement clos (en tant que localisé de l'anneau d'une quadrique projective), mais $A_1$ n'est pas $A_0$-libre (rang 1, et 2 générateurs) donc pas $A_0$-réflexif (§ 1, proposition 2); on notera qu'il existe ici un idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 de $A$ tel que $\mathfrak{P} \cap A_0$ soit de hauteur 2, ce qui empêche de raisonner comme dans le théorème 1.

Par contre, une partie du théorème 2 se transpose : si $A$ est intégralement clos, et si $M$ est un $A$-module tel que les $S^n(M)$ soient tous réflexifs, alors l'algèbre symétrique $S = S(M)$ est intégralement close; en effet, pour tout $\mathfrak{p} \in P(A)$, $S_{\mathfrak{p}} = S(M_{\mathfrak{p}})$ est un anneau de polynômes sur un anneau de valuation discrète, donc un anneau intégralement clos; d'autre part, l'hypothèse de réflexivité montre qu'on a

$$S = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} S_{\mathfrak{p}},$$

d'où notre assertion.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D.). — Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 390-405.

[2] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*. Chapitre 2 : *Algèbre linéaire*. 3e éd. — Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236; Bourbaki, 6).

[3] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chapitres 1-2, 3-4. — Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290-1293; Bourbaki, 27-28) [Chap. 5-7, à paraître].

[4] MICALI (Artibano). — Sur les algèbres universelles, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, 1963-1964 (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[5] SAMUEL (Pierre). — Sur les anneaux factoriels, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 155-173.

[6] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*, Vol. 1 and 2. — Toronto, New York, London, ..., Van Nostrand Company, 1958-1960 (The University Series in higher Mathematics).

(Manuscrit reçu le 15 novembre 1963.)

Pierre SAMUEL,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
3, avenue du Lycée-Lakanal,
Bourg-la-Reine (Seine).