BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL LAZARD

Quelques calculs concernant la formule de Hausdorff

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 435-451

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__435_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 435 à 451.

QUELQUES CALCULS CONCERNANT LA FORMULE DE HAUSDORFF ;

PAR

MICHEL LAZARD

(Poitiers).

Introduction. — Les propriétés arithmétiques de la série de Hausdorff :

$$\Phi(x, y) = \mathrm{Log}(e^x e^y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots$$

peuvent être étudiées pour leur intérêt propre ou pour les applications (groupes d'exposant p premier, construction de groupes analytiques sur un corps p-adique).

Cet article aboutit au calcul des *termes dominants* de $\Phi(x, y)$ et du « commutateur » $\Psi(x, y) = \mathrm{Log}(e^{-x}e^{-y}e^x e^y)$. L'expression « terme dominant » se rapporte à un « gradué associé » dont la définition est assez compliquée. Voici, énoncés directement, les résultats concernant la série Φ.

La somme des termes de bidegré (r, s) en (x, y) dans le développement de Φ peut s'écrire sous la forme $p^{-\varphi(r,s)} f_{r,s}(x, y)$, où $f_{r,s}$ est un *polynôme de Lie à coefficients p-entiers* qu'on suppose non divisible par p, et $\varphi(r, s)$ un nombre entier. Si l'on évite les dénominateurs parasites, on a toujours la relation $\varphi(r, s) \leqq (p-1)^{-1}(r + s - 1)$. Du point de vue de la convergence p-adique, cela signifie que la série de Hausdorff converge comme la série exponentielle e^x. De plus, on n'a

$$\varphi(r, s) = (p-1)^{-1}(r + s - 1)$$

que si r et s sont respectivement sommes de a et de b puissances de p, avec $a + b = p$ (exception faite des termes linéaires $x + y$); pour ces

couples (r, s), on peut écrire d'une manière relativement explicite les polynômes $f_{r,s}$ *réduits modulo p*. Ces informations sont contenues dans la formule (28). Pour la série Ψ on obtient des résultats analogues, mais plus simples (33).

Les calculs peuvent être effectués directement à partir de la définition des séries Φ et Ψ. Ils sont alors assez pénibles. J'utilise une méthode indirecte qui, moyennant quelques préliminaires (qu'on peut estimer non moins pénibles), réduit à presque rien les calculs proprement dits (§ IV). J'aurais pu abréger considérablement ces préliminaires si j'avais renvoyé à un article antérieur (Lois de groupes et analyseurs, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 72, 1955, p. 299-400), mais des remarques amicales m'ont fait comprendre que ce n'était pas souhaitable. Le passage du cas particulier des polynômes associatifs au cas général (analyseurs valués sur un corps valué et analyseurs résiduels) n'offre aucune difficulté.

Il est évidemment impossible de se passer des polynômes non commutatifs. Cependant le lecteur pourra supposer, dans les paragraphes II et III, qu'il s'agit de polynômes ordinaires (associatifs et commutatifs). La réduction modulo p des polynômes à coefficients entiers est une opération bien connue. Il n'est pas difficile de l'axiomatiser en définissant les valuations des polynômes. L'intérêt de cette axiomatique est que, sans sortir du corps des nombres rationnels, on met en évidence des propriétés qui se rattachent très naturellement à des *extensions ramifiées* du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$.

I. — Algèbres libres.

(1.1) **Algèbres associatives.** — Rappelons la construction d'une algèbre associative libre par rapport à n générateurs donnés $x_1, \ldots, x_n$. Nous formons d'abord le monoïde libre M engendré par les lettres $x_1, \ldots, x_n$. Un élément de M est un *monôme associatif* (ou mot) qui s'écrit univoquement $x_{i_1} \ldots x_{i_r}$; l'entier r est un élément quelconque de $\mathbf{N}$ (pour $r = 0$ on obtient le monôme vide, noté 1); les indices $i_1, \ldots, i_r$ varient sans restriction de 1 à n. Si α_j est le nombre d'indices égaux à j parmi les $i_1, \ldots, i_r$, le monôme $x_{i_1} \ldots x_{i_r}$ est dit de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$; son degré total est $|\alpha| = \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j = r$. Pour chaque $\alpha \in \mathbf{N}^n$ nous obtenons ainsi $\dfrac{|\alpha|!}{\prod_j \alpha_j!}$ monômes distincts de multidegré α.

Si Ω est un anneau (associatif, commutatif, unitaire), nous construisons l'algèbre $\Omega[M]$ du monoïde M; c'est le Ω-module libre de base M, muni de la multiplication qui prolonge par linéarité celle de M. Les éléments de $\Omega[M]$ seront appelés *polynômes associatifs en les* x_i

(à coefficients dans Ω). Les éléments de M de multidegré α engendrent dans $\Omega[M]$ un sous-module (la composante homogène de degré α) que nous noterons $\Omega[M]_\alpha$. L'algèbre $\Omega[M]$ est somme directe des $\Omega[M]_\alpha$, ce que nous écrivons $\Omega[M] = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \Omega[M]_\alpha$; le *projecteur* de $\Omega[M]$ sur $\Omega[M]_\alpha$ sera noté P_α.

Si Ω' est un sous-anneau (resp. un anneau quotient) de Ω, l'algèbre $\Omega'[M]$ s'identifie à un sous-anneau (resp. un anneau quotient) de $\Omega[M]$.

(1.2) **Algèbres de Lie.** — Le crochet de Lie $[f, g]$ de deux éléments f, $g \in \Omega[M]$ est défini par $[f, g] = fg - gf$. La structure de Ω-module et le crochet font de $\Omega[M]$ une Ω-algèbre de Lie. Considérons la *sous-algèbre de Lie* L de $\Omega[M]$ engendrée par les $x_1, \ldots, x_n$. Cette algèbre de Lie est *libre* pour ses générateurs $x_1, \ldots, x_n$. En effet, une algèbre de Lie libre vérifie le théorème de Poincaré-Birkoff-Witt, c'est-à-dire se plonge dans son algèbre enveloppante, qui ne peut être qu'une algèbre associative libre pour les mêmes générateurs. L'algèbre de Lie L est stable pour les projecteurs P_α, c'est-à-dire que L est multigraduée comme $\Omega[M]$; nous écrivons $L = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} L_\alpha$, où $L_\alpha = P_\alpha(L)$. Le sous-module L est facteur direct de $\Omega[M]$. Il est possible de décrire explicitement une base de L au moyen de certains « monômes de Lie », mais nous n'en aurons pas besoin.

(1.3) **L'identité de Jacobson; notations** Λ, R, R_1. — Supposons $n = 2$, et prenons pour Ω le corps premier $\mathbf{F}_p$. Une identité de Jacobson affirme que le polynôme associatif $(x_1 + x_2)^p - x_1^p - x_2^p$ appartient à l'algèbre de Lie L engendrée par x_1 et x_2, c'est-à-dire se calcule au moyen de sommes et de crochets. Nous « remontons » cette identité dans $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire que nous écrivons, pour $\Omega = \mathbf{Z}$:

$$(1) \qquad (x_1 + x_2)^p = x_1^p + x_2^p + \Lambda(x_1, x_2) + pR(x_1, x_2).$$

Dans cette relation, $\Lambda(x_1, x_2)$ est un élément de l'algèbre de Lie libre L à coefficients dans $\mathbf{Z}$; nous devons le *choisir*, car il est seulement défini modulo p; $R(x_1, x_2)$ est un polynôme associatif en x_1 et x_2; Λ et R sont tous deux de degré total p en x_1 et x_2.

Exemples :

$p = 2$:

$$\Lambda(x_1, x_2) = [x_1, x_2]; \qquad R(x_1, x_2) = x_2 x_1;$$

$p = 3$:

$$\Lambda(x_1, x_2) = [[x_1, x_2], x_2] + [[x_2, x_1], x_1]; \qquad R(x_1, x_2) = x_1 x_2 x_1 + x_2 x_1 x_2.$$

Rappelons aussi l'identité

$$[x_1^p, x_2] = (\mathrm{ad}\, x_1)^p . x_2 + pR_1(x_1, x_2), \tag{2}$$

où $\mathrm{ad}\, x_1$ est l'opérateur défini par $(\mathrm{ad}\, x_1).f = [x_1, f]$, et $R_1(x_1, x_2)$ un polynôme associatif à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de bidegré $(p, 1)$.

(1.4) **Passage aux séries formelles.** — Reprenons l'algèbre associative libre à n générateurs $\Omega[M] = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \Omega[M]_\alpha$. Nous la plongeons dans le produit direct $\prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \Omega[M]_\alpha$ que nous notons $\Omega[[M]]$. Les éléments de $\Omega[[M]]$ sont les *séries formelles associatives* en les générateurs $x_1, \ldots, x_n$. Nous aurions pu définir $\Omega[[M]]$ comme l'algèbre « large » du monoïde M. Le module $\Omega[[M]]$ possède donc une structure de Ω-algèbre associative prolongeant celle de $\Omega[M]$. Comme dans le cas des séries formelles associatives et commutatives, nous pouvons aussi définir $\Omega[[M]]$ comme le complété de $\Omega[M]$ pour une certaine topologie : la topologie des séries formelles, définie à partir de l'ordre (degré total minimal des composantes homogènes non nulles). Dans l'algèbre complétée $\Omega[[M]]$ nous prenons l'adhérence $\hat{L}$ de l'algèbre de Lie libre L (1.2); $\hat{L}$ s'identifie au produit direct $\prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} L_\alpha$; les éléments de L sont des « séries formelles de Lie ».

Exemple. — Pour $\Omega = \mathbf{Q}$ et $n = 1$, nous aurons besoin des séries suivantes (nous écrivons x au lieu de x_1) :

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-1} x^n. \tag{3}$$

$$e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} x^n, \tag{4}$$

Ce sont les séries classiques $\mathrm{Log}(1 + x)$ et $(\exp x) - 1$.

(1.5) **Composition des polynômes.** — Revenons aux algèbres associatives libres. Si f est un polynôme associatif en n lettres $x_1, \ldots, x_n$ et si $g_1, \ldots, g_n$ sont des polynômes en d'autres lettres $y_1, \ldots, y_m$, nous définissons le polynôme composé $f(g_1, \ldots, g_n)$. L'assertion « $\Omega[M]$ est une algèbre associative libre pour les générateurs $x_1, \ldots, x_n$ » signifie en effet que, pour toute Ω-algèbre associative A et toute famille $g_1, \ldots, g_n$ d'éléments de A, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\varphi : \Omega[M] \to A$ tel que $\varphi(x_i) = g_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Le polynôme composé

$f(g_1, \ldots, g_n)$ s'obtient sous la forme $\varphi(f)$, les g_i appartenant à une algèbre associative libre $\Omega[M']$ de générateurs $y_1, \ldots, y_m$. La multiplication peut être considérée comme un cas particulier de la composition : un produit $g_1 g_2$ s'écrit $f(g_1, g_2)$, en posant $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

(1.6) **Les notations $x_{n,i}$, A^n, L^n; existence d'une « formule de Taylor ».** — Nous voulons disposer, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, d'une algèbre de polynômes associatifs en n lettres. Ces n « lettres » seront, en principe, appelées $x_{n,i}$, l'indice i variant de 1 à n (en fait, pour $n = 1$ ou 2, nous prendrons les lettres x et y). L'algèbre des polynômes associatifs en $x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$ à coefficients dans l'anneau de base Ω sera notée $A^n(\Omega)$, ou simplement A^n quand Ω sera connu sans ambiguïté. Pour $n = 0$, l'ensemble des générateurs est vide, et nous posons $A^0(\Omega) = \Omega$; pour $n = 1$, $A^1(\Omega)$ est l'algèbre de polynômes usuelle $\Omega[x_{1,1}]$ qui est commutative. L'algèbre de Lie libre (1.2) engendrée par les $x_{n,i}$ dans A^n sera notée L^n. La composante homogène de multidegré $\alpha \in \mathbf{N}^n$ de A^n (resp. L^n) sera notée A^n_α (resp. L^n_α).

Si $f \in A^n_\alpha$, si $g_1, \ldots, g_n \in A^m$ et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Omega$, nous avons la relation d'homogénéité

$$f(\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_n g_n) = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} f(g_1, \ldots, g_n) \in A^m, \tag{5}$$

avec la convention que $0^0 = 1$ [ce qui signifie que $f(g_1, \ldots, g_n)$ ne dépend pas de g_i si $\alpha_i = 0$].

De plus, si $g_i \in A^m_{\beta_i}$, où $\beta_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,m})$ pour $1 \leq i \leq n$, alors $f(g_1, \ldots, g_n) \in A^m_\gamma$ avec

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \qquad \text{et} \qquad \gamma_j = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \beta_{i,j}. \tag{6}$$

Nous venons de calculer les composantes homogènes de $f(g_1, \ldots, g_n)$ dans le cas où f et les g_i sont tous homogènes (plus précisément : multihomogènes). Dans le cas général, nous procédons comme suit. Chacun des g_i est la somme de ses composantes homogènes non nulles qui sont en nombre fini, soit r_i. Nous appelons $g_{i,j}$ ces composantes homogènes, le second indice j variant de 1 à r_i. Nous avons donc $g_i = \sum_{1 \leq j \leq r_i} g_{i,j}$. Posons $r = \sum_{1 \leq i \leq n} r_i$. Dans l'algèbre A^r de générateurs $x_{r,1}, \ldots, x_{r,r}$ prenons le polynôme composé

$$f' = f(x_{r,1} + \ldots + x_{r,r_1}, \ldots, x_{r,r_1+\ldots+r_{n-1}+1} + \ldots + x_{r,r}).$$

Nous avons remplacé, dans le polynôme $f = f(x_{n,1}, \ldots, x_{n,n})$, chacune des lettres $x_{n,i}$ par la somme de r_i lettres parmi les $x_{r,j}$ de telle sorte que chaque générateur $x_{r,j}$ ne soit utilisé qu'une seule fois.

Nous avons, d'après l'associativité de la composition qui est ici évidente,

$$f(g_1, \ldots, g_n) = f'(g_{1,1}, \ldots, g_{1,r_1}, \ldots, g_{n,1}, \ldots, g_{n,r_n}).$$

Déterminons les composantes homogènes f'_β de f' en lui appliquant les projecteurs P_β (pour $\beta \in \mathbf{N}^r$). Nous avons $f' = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^r} f'_\beta$, et nous sommes ramenés à la composition de fonctions homogènes.

L'écriture plus ou moins explicite de cette suite de calculs constitue ce que nous appelons la « formule de Taylor ». Si le polynôme f appartient à L^n, alors f' appartient à L^r; autrement dit, la formule de Taylor vaut aussi bien pour les algèbres de Lie libres que pour les algèbres associatives libres.

Indiquons une dernière propriété. Supposons, avec les notations précédentes, que $f \in A^n_\alpha$ pour un $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Alors les composantes homogènes f'_β de f' sont nulles, sauf pour les $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ qui vérifient

$$\sum_{r_1+\ldots+r_{i-1}<j\leq r_1+\ldots r_i} \beta_j = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

(1.7) **Composition des séries formelles; formule de Hausdorff.** — Conservons les notations de (1.6). Plongeons chaque algèbre de polynômes A^n dans l'algèbre de séries formelles que nous noterons $\hat{A}^n$. La composition des séries formelles se définit en prolongeant par continuité celle des polynômes. Plus précisément, nous savons calculer la série formelle composée $f(g_1, \ldots, g_n)$ dans les deux cas suivants : f est un polynôme ou les g_i ont leurs termes constants nuls.

En particulier, nous pouvons composer les séries L et e définies en (3) et (4); elles sont réciproques l'une de l'autre :

$$L(e(x)) = e(L(x)) = x. \tag{7}$$

Nous obtenons la série e à partir de la série L par le procédé classique des approximations successives. Posons

$$u(x) = x - L(x). \tag{8}$$

Nous avons alors

$$e(x) = \lim_{n \to \infty} e_n(x), \tag{9}$$

où

$$e_1(x) = x, \qquad e_{n+1}(x) = x + u(e_n(x)). \tag{9 bis}$$

Le passage à la limite dans (9) peut être précisé : les séries $e(x)$ et $e_n(x)$ ont mêmes composantes homogènes jusqu'au degré n inclus. En effet,

comme $u(x)$ commence par un terme de degré 2, il suffit de connaître $e(x)$ jusqu'au degré n pour calculer $u(e(x))$ jusqu'au degré $n+1$.

La formule de Hausdorff s'obtient en calculant $\mathrm{Log}((\exp x)(\exp y))$. Pour ne pas introduire de termes constants, nous utilisons les séries e et L, en posant

$$\Phi(x, y) = L(e(x) + e(y) + e(x)\,e(y)). \tag{10}$$

La série Φ appartient à l'algèbre de séries formelles associatives $\hat{A}^2(\mathbf{Q})$, où nous écrivons x, y au lieu de $x_{2,1}$, $x_{2,2}$. En fait, la série appartient à l'adhérence $\hat{L}^2(\mathbf{Q})$ de l'algèbre de Lie libre $L^2(\mathbf{Q})$. Cela signifie que la série $\Phi(x, y)$ s'écrit au moyen de crochets de Lie :

$$\Phi(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots.$$

II. — Valuations.

(2.1) **La valuation banale.** — Nous reprenons les notations de (1.6). L'anneau de base Ω est le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Nous choisissons une fois pour toutes un nombre premier p, et nous munissons $\mathbf{Q}$ de sa valuation p-adique v, définie par $v(0) = +\infty$ et $v(p^h ab^{-1}) = h$ si a, b sont deux entiers non nuls premiers à p. Nous notons $\mathbf{Z}_{(p)}$ l'anneau des rationnels p-entiers, c'est-à-dire vérifiant $v(\lambda) \geqq 0$. Nous écrivons simplement A^n au lieu de $A^n(\mathbf{Q})$; nous identifions chaque $A^n(\mathbf{Z}_{(p)})$ à un sous-anneau de A^n. Enfin nous notons $\mathbf{A}$ [resp. $\mathbf{A}(\mathbf{Z}_{(p)})$] la réunion des A^n [resp. $A^n(\mathbf{Z}_{(p)})$], pour $n \in \mathbf{N}$.

La *valuation banale* est une application $w_0 : \mathbf{A} \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$, définie comme suit.

(11) *Pour tout $f \in \mathbf{A}$, $w_0(f)$ est la borne supérieure des $h \in \mathbf{Z}$ tels que $p^{-h} f \in \mathbf{A}(\mathbf{Z}_{(p)})$.*

Si $f \neq 0$, $w_0(f)$ est le plus grand entier h tel que $f = p^h f_0$, f_0 étant un polynôme à coefficients p-entiers, et la relation $w_0(f) \geqq 0$ équivaut à $f \in \mathbf{A}(\mathbf{Z}_{(p)})$.

(2.2) **Axiomes d'une valuation.** — Nous appellerons plus généralement *valuation de* $\mathbf{A}$ une application

$$w : \mathbf{A} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

(où $\mathbf{R}$ est le corps des nombres réels) qui vérifie les six axiomes suivants :

(V 1) $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ \forall f \in A^n,\quad f = 0 \iff w(f) = +\infty$;

(V 2) $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ \forall f, g \in A^n,\quad w(f+g) \geqq \min(w(f), w(g))$;

(V 3) $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ \forall \lambda \in \mathbf{Q},\ \forall f \in \mathbf{A}^n,\quad w(\lambda f) = v(\lambda) + w(f)$;

(V 4) $\quad \forall n \in \mathbf{N},\ \forall f \in A^n,\quad w(f) = \inf_{\alpha \in \mathbf{N}^n} w(\mathrm{P}_\alpha f)$;

(V 5) $\forall m, n \in \mathbf{N}$, $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $\forall f \in A_\alpha^n$, $\forall g_1, \ldots, g_n \in A^m$,

$$w(f(g_1, \ldots, g_n)) \geqq w(f) + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i w(g_i);$$

(V 6) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall i$ (avec $1 \leqq i \leqq n$), $w(x_{n,i}) = 0$.

La valuation banale satisfait à ces axiomes. Le seul, dont la vérification ne soit pas immédiate, est (V 5) qui résulte de la relation d'homogénéité (5), car la composition des polynômes est définie dans $\mathbf{A}(\mathbf{Z}_{(p)})$.

(2.3) **Transformée d'une valuation par une homothétie.** — Soit a un nombre rationnel non nul. Associons à tout polynôme $f \in \mathrm{A}^n$ le polynôme $\tilde{f} \in A^n$ défini par

$$\tilde{f}(x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}) = a^{-1} f(a x_{n,1}, \ldots, a x_{n,n}). \tag{12}$$

La correspondance $f \rightsquigarrow \tilde{f}$ est évidemment linéaire. Elle est compatible avec la composition : si $h = f(g_1, \ldots, g_n)$ est défini, nous avons $\tilde{h} = \tilde{f}(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n)$. Enfin, si f est homogène, $\tilde{f}$ est homogène (de même multidegré). Étant donnée une valuation w de $\mathbf{A}$, nous pouvons donc définir une nouvelle valuation $\tilde{w}$ en posant $\tilde{w}(f) = w(\tilde{f})$ pour tout $f \in \mathbf{A}$.

Les formules (5), (12) et l'axiome (V 3) nous permettent de calculer $\tilde{w}(f)$ pour un $f \in A_\alpha^n$ sous la forme

$$\tilde{w}(f) = w(f) + (|\alpha| - 1)\, v(a);$$

(rappelons que $|\alpha| = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i$ est le degré total de f). Appliquant ensuite l'axiome (V 4), nous voyons qu'il suffit de connaître $v(a)$ pour calculer les $\tilde{w}(f)$.

(2.4) **Les valuations w_π.** — Nous allons montrer qu'il est encore possible de définir une valuation $\tilde{w}$ lorsque $v(a)$ est remplacé par un nombre réel π quelconque. Dans le cas intéressant où $\pi \notin \mathbf{Z}$, l'élément a n'existe plus. Nous pourrions encore le définir en introduisant une *extension valuée ramifiée* de $\mathbf{Q}$, mais ce procédé serait artificiel, et il vaut mieux que l'élément a reste à l'état de fantôme.

Proposition 1. — *Soient w une valuation de $\mathbf{A}$ et π un nombre réel. Il existe une valuation, et une seule, de $\mathbf{A}$, notée $\tilde{w}$, qui vérifie la propriété suivante :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \quad \forall f \in A_\alpha^n, \qquad \tilde{w}(f) = w(f) + (|\alpha| - 1)\pi. \tag{13}$$

Preuve. — L'unicité est évidente d'après (V 4). Pour établir l'existence de $\tilde{w}$, nous définissons $\tilde{w}(f)$ pour tout f en appliquant (13) et

l'axiome (V 4); ce dernier est donc vérifié, ainsi que (V 6). Les axiomes (V 1), (V 2), (V 3) s'établissent sans aucune difficulté. Il reste à prouver (V 5).

Donnous-nous m, $n \in \mathbf{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $f \in A_\alpha^n$ et $g_1, \ldots, g_n \in A^m$. Il s'agit d'établir la relation

$$\tilde{w}(h) \geqq \tilde{w}(f) + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i \tilde{w}(g_i), \qquad \text{où} \quad h = f(g_1, \ldots, g_n).$$

Supposons d'abord tous les g_i homogènes : $g_i \in A_{\beta_i}^m$, où

$$\beta_i = (\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,m}) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Alors $h \in A_\gamma^m$, où $\gamma \in \mathbf{N}^m$ est donné par la formule (6) de (1.6). D'après cette formule, nous avons

$$\begin{aligned} |\gamma| - 1 &= \left(\sum_{1 \leqq j \leqq m} \gamma_j \right) - 1 \\ &= \left(\sum_{1 \leqq j \leqq m} \left(\sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i \beta_{i,j} \right) \right) - 1 \\ &= \left(\sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i \right) - 1 + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i \left(\left(\sum_{1 \leqq j \leqq m} \beta_{i,j} \right) - 1 \right) \\ &= |\alpha| - 1 + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i (|\beta_i| - 1). \end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans la relation cherchée $\tilde{w}(h)$, $\tilde{w}(f)$, $\tilde{w}(g_i)$ par leurs valeurs déduites de (13), le calcul précédent montre qu'elle équivaut à $w(h) \geqq w(f) + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \alpha_i w(g_i)$; or w vérifie l'axiome (V 5).

Traitons maintenant le cas général, en gardant les notations de (1.6). Chaque g_i est la somme de ses composantes homogènes non nulles :

$$g_i = \sum_{1 \leqq j \leqq r_i} g_{i,j},$$

et l'axiome (V 4) nous donne les relations

$$w(g_{i,j}) \geqq w(g_i).$$

Les axiomes (V 6) et (V 2) montrent que

$$w\left(\sum_{r_1 + \ldots + r_{i-1} < j \leqq r_1 + \ldots + r_i} x_{r,j} \right) \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

D'après (V 5) nous voyons que l'élément

$$f' = f(x_{r,1} + \ldots + x_{r,r_1},\ \ldots,\ x_{r,r_1+\ldots+r_{n-1}+1} + \ldots + x_{r,r})$$

introduit en (1.6) vérifie la relation $w(f') \geqq w(f)$; d'après (V 4) nous avons $w(f'_\beta) \geqq w(f')$ pour chaque composante homogène $f'_\beta = P_\beta f'$ de f', où $\beta \in \mathbf{N}^r$. Posons

$$f'_\beta(g_{1,1},\ \ldots,\ g_{1,r_1},\ \ldots,\ g_{n,1},\ \ldots,\ g_{n,r_n}) = k_\beta\,;$$

ces éléments k_β sont homogènes : leurs multidegrés se calculent en appliquant la formule (6). Nous avons

$$h = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^r} k_\beta \qquad \text{et} \qquad \tilde{w}(h) \geqq \inf_{\beta \in \mathbf{N}^r} \tilde{w}(k_\beta)$$

d'après l'axiome (V 2) vérifié par $\tilde{w}$.

Le cas particulier de l'axiome (V 5) déjà établi pour $\tilde{w}$ permet de minorer les $\tilde{w}(k_\beta)$. Nous obtenons, compte tenu des relations $\tilde{w}(g_{i,j}) \geqq \tilde{w}(g_i)$:

$$\tilde{w}(k_\beta) \geqq \tilde{w}(f'_\beta) + \sum_{1 \leqq i \leqq n} \tilde{w}(g_i) \left(\sum_{r_1+\ldots+r_{i-1} < j \leqq r_1+\ldots+r_i} \beta_j \right)$$

Les relations $w(f'_\beta) \geqq w(f)$ et la remarque finale de (1.6) achèvent de prouver l'axiome (V 5) pour la valuation $\tilde{w}$.

Définition 1. — *Pour tout nombre réel π, nous noterons w_π la valuation $\tilde{w}$ déduite de la valuation banale $w = w_0$ par le procédé de la proposition* 1.

III. — Structures résiduelles.

(3.1) **Définition de $_0\mathbf{A}$, $_{0+}\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.** — Nous utiliserons seulement la valuation w_π pour $\pi = (p - 1)^{-1}$; les valeurs $w_\pi(f)$ seront alors des multiples entiers de π. Nous donnerons cependant des définitions pour une valuation quelconque w de $\mathbf{A}$. Les structures $_0\mathbf{A}$, $_{0+}\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, que nous allons introduire, rappellent respectivement l'anneau de valuation, l'idéal de valuation et le corps résiduel d'un corps valué.

(14) *Étant donnée une valuation w de $\mathbf{A}$, nous notons $_0\mathbf{A}$ (resp. $_{0+}\mathbf{A}$) l'ensemble des $f \in \mathbf{A}$ qui vérifient $w(f) \geqq 0$ [resp. $w(f) > 0$]. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{N}^n$, nous notons respectivement $_0A^n$, $_0A^n_\alpha$, $_{0+}A^n$, $_{0+}A^n_\alpha$ les ensembles $_0\mathbf{A} \cap A^n$, $_0\mathbf{A} \cap A^n_\alpha$, $_{0+}\mathbf{A} \cap A^n$, $_{0+}\mathbf{A} \cap A^n_\alpha$.*

Il résulte des axiomes (V 2) et (V 3) que $_0A^n$ et $_{0+}A^n$ sont des $\mathbf{Z}_{(p)}$-modules; l'inclusion $_0A^n \supset {}_{0+}A^n$ est une conséquence évidente de (14).

DÉFINITION 2. — *Pour une valuation w de* **A**, *nous notons B^n chaque module quotient ${}_0A^n/{}_{0+}A^n$ et* **B** *la réunion des B^n ($n \in \mathbf{N}$). Nous notons ρ l'épimorphisme canonique de ${}_0\mathbf{A}$ sur* **B**; *pour chaque $n \in \mathbf{N}$, la suite*

$$0 \to {}_{0+}A^n \to {}_0A^n \xrightarrow{\rho} B^n \to 0$$

est exacte.

(3.2) **Propriétés de B.**

PROPOSITION 2 :

(i) *Chaque module B^n est annulé par p, c'est-à-dire est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{F}_p$.*

(ii) *Les projecteurs P_α passent au quotient par ρ : pour chaque $n \in \mathbf{N}$,* $B^n = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} B^n_\alpha$, *avec* $B^n_\alpha = \rho({}_0A^n_\alpha)$.

(iii) *Si f, $g_1, \ldots, g_n$ sont des éléments de ${}_0\mathbf{A}$ tels que $h = f(g_1, \ldots, g_n)$ soit défini, alors $h \in {}_0\mathbf{A}$. De plus, ρh ne dépend que de ρf et des ρg_i, ce qui nous permet d'écrire*

$$\rho h = \rho f(\rho g_1, \ldots, \rho g_n); \tag{15}$$

cette formule définit la composition dans **B**.

Preuve. — La propriété (i) résulte de (V 3). D'après (V 4) les sous-$\mathbf{Z}_{(p)}$-modules ${}_0A^n$ et ${}_{0+}A^n$ de A^n sont homogènes, ce qui prouve (ii). Si nous écrivons f comme somme de ses composantes homogènes, les axiomes (V 4) et (V 5) montrent que $h \in {}_0A$ pourvu que $f, g_1, \ldots, g_n \in {}_0A$; les mêmes axiomes montrent que ρh ne dépend de f que par l'intermédiaire de ρf. Remplaçons l'un des g_i, soit g_1, par $g^* + g_1$ où $g^* \in {}_{0+}\mathbf{A}$. Nous voulons montrer que $f(g^* + g_1, \ldots, g_n)$ et $f(g_1, \ldots, g_n)$ ont même image dans **B**. Pour cela nous introduisons le polynôme $f' \in {}_0A$ défini par

$$f'(x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,n+1}) = f(x_{n+1,1} + x_{n+1,2}, \ldots, x_{n+1,n+1}),$$

et nous prenons ses composantes homogènes $f'_\beta = P_\beta f'$, pour $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$. Nous obtenons, d'après (5),

$$f(g^* + g_1, \ldots, g_n) - f(g_1, \ldots, g_n) = \sum_\beta f'_\beta(g^*, g_1, \ldots, g_n),$$

où le signe $\sum_\beta$ indique une sommation étendue aux $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ qui vérifient $\beta_1 > 0$. Une nouvelle application de l'axiome (V 5) achève la démonstration.

Nous venons d'établir que les B^n sont des $\mathbf{F}_p$-espaces vectoriels où sont définis, par passage au quotient, les projecteurs P_α et la compo-

sition. Si w est la valuation banale, les B^n sont tout simplement des $\mathbf{F}_p$-algèbres associatives libres. Nous verrons au paragraphe IV des B^n qui ne ressemblent pas à des algèbres associatives.

Dans le cas général, les B^n peuvent être considérés comme des *structures libres d'une certaine espèce* (*par rapport aux générateurs* $\rho x_{n,i}$) : « la liberté passe au quotient ». Nous ne définissons pas ici l'*espèce* (ou *catégorie*) de structures algébriques correspondant à **B**, renvoyant le lecteur à l'article cité dans l'Introduction.

(3.3) **Définition de C.** — Conformément aux notations de (1.6), nous appelons L^n la **Q**-algèbre de Lie (libre) engendrée par les $x_{n,i}$ dans A^n. Nous notons **L** la réunion des L^n et ${}_0L^n$, etc. l'intersection de **L** avec ${}_0A^n$, etc. (pour une valuation w donnée).

Nous appelons C^n l'image de ${}_0L^n$ par ρ et **C** la réunion des C^n. Comme les L^n sont des sous-modules homogènes des A^n et que la composition est définie dans **L**, la proposition 2 reste valable si nous remplaçons **A** par **L** et **B** par **C**.

Pour la valuation banale, les C^n sont des $\mathbf{F}_p$-algèbres de Lie libres. Dans le cas général, ce sont des structures libres d'une certaine espèce.

(3.4) **Passage aux séries formelles.** — Nous noterons $\hat{B}^n$ (resp. $\hat{C}^n$) le complété formel de B^n (resp. C^n), c'est-à-dire le produit direct des B^n_α (resp. C^n_α), et $\hat{\mathbf{B}}$ (resp. $\hat{\mathbf{C}}$) la réunion des $\hat{B}^n$ (resp. $\hat{C}^n$).

Nous appellerons ${}_0\hat{A}^n$ le complété formel de ${}_0A^n$, qui est aussi l'adhérence de ${}_0A^n$ dans l'algèbre $\hat{A}^n$ des séries formelles. Les ensembles ${}_0\hat{L}^n$, ${}_0\hat{\mathbf{A}}$ et ${}_0\hat{\mathbf{L}}$ seront définis de même. Nous noterons encore ρ l'épimorphisme canonique de ${}_0\hat{\mathbf{A}}$ sur $\hat{\mathbf{B}}$. La proposition 2 reste valable, pourvu que les éléments f, g_1, ..., g_n soient composables dans $\hat{\mathbf{A}}$. La composition est définie sans restriction dans $\hat{\mathbf{C}}$ (où les termes constants sont nuls), ainsi que dans $\hat{\mathbf{B}}$ si $B^0 = 0$ (c'est le cas pour les valuations w_π, $\pi \notin \mathbf{Z}$).

Remarquons qu'une valuation w ne possède pas de prolongement naturel à $\hat{\mathbf{A}}$ tout entier, en raison de l'axiome (V 4).

(3.5) **Autres structures résiduelles.** — Pour une valuation donnée w de **A**, et pour tout nombre réel $\nu \geqq 0$, nous noterons ${}_\nu\mathbf{A}$ (resp. ${}_{\nu+}\mathbf{A}$) l'ensemble des $f \in \mathbf{A}$ vérifiant $w(f) \geqq \nu$ [resp. $w(f) > \nu$]. Nous définissons ${}_\nu A^n$, etc. comme en (3.1), où ν valait 0. Nous définissons enfin les modules quotient ${}_\nu B^n$ et les applications ρ_ν au moyen des suites exactes

$$0 \to {}_{\nu+}A^n \to {}_\nu A^n \xrightarrow[\rho_\nu]{} {}_\nu B^n \to 0. \tag{16}$$

Les ${}_\nu B^n$ sont encore des espaces vectoriels multigradués sur $\mathbf{F}_p$ [*cf.* proposition 2 (i), (ii)]. Pour $\nu = 0$, nous retrouvons ${}_0B^n = B^n$ et $\rho_0 = \rho$.

La proposition suivante généralise la proposition 2 (iii) et s'établit de même.

PROPOSITION 3. — *Soient* $m, n \in \mathbf{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $\nu, \mu_1, \ldots, \mu_n$ *des nombres réels* ≥ 0, $f \in {}_\nu A^n_\alpha$, $g_i \in {}_{\mu_i}A^m$ (*pour* $1 \leq i \leq n$). *D'après l'axiome* (V 5) :

$$h = f(g_1, \ldots, g_n) \in {}_\mu A^m,$$

où

$$\mu = \nu + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mu_i.$$

L'élément $\rho_\mu h$ *ne dépend que de* $\rho_\nu f$ *et des* $\rho_{\mu_i} g_i$, *ce qui nous permet d'écrire :*

$$\rho_\mu h = \rho_\nu f(\rho_{\mu_1} g_1, \ldots, \rho_{\mu_n} g_n). \tag{17}$$

COROLLAIRE. — *Si tous les* μ_i *sont nuls, nous pouvons supposer simplement* $f \in {}_\nu A^n$ *dans l'énoncé précédent.* Pour $\nu = 0$, nous retrouvons la proposition 2.

IV. — La valuation w_π, pour $\pi = (p-1)^{-1}$.

(4.1) **La valuation** w_π. — Nous allons appliquer les considérations du paragraphe III à la valuation w_π, où $\pi = (p-1)^{-1}$ [(2.4), définition 1]. D'après la définition de **B** (3.1), nous avons, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$:

$$B^n_\alpha \neq 0 \iff \exists f \in A^n_\alpha, \quad w_\pi(f) = 0 \iff |\alpha| \equiv 1 \quad [\mathrm{mod}(p-1)].$$

Si $p \neq 2$, nous en déduisons que $B^0 = 0$ (« les constantes sont réduites à zéro ») et $B^2_{(1,1)} = 0$ (**B** ne contient pas d'élément bilinéaire non nul). Par contre, si $p = 2$, nous sommes dans le cas étudié en (2.3).

(4.2) **Notations.** — Nous écrirons x (resp. x, y) au lieu de $x_{1,1}$ (resp. $x_{2,1}$, $x_{2,2}$). Les images par ρ [(3.1), définition 2] de x et y seront encore notées x et y (ce n'est pas plus répréhensible que de noter 0 les éléments neutres de tous les groupes additifs).

Nous posons

$$u_p(x) = -p^{-1}x^p \tag{18}$$

et

$$\Theta(x, y) = p^{-1}\Lambda(x, y), \tag{19}$$

où Λ est défini par la formule (1) de (1.3).

Nous avons $u_p \in {}_0A^1$, $\Theta \in {}_0L^2$, et (1) nous donne

$$\rho u_p(x+y) = \rho u_p(x) + \rho u_p(y) - \rho\Theta(x, y). \tag{20}$$

Si f, g appartiennent à ${}_0A^1$ (ou à ${}_0\hat{A}^1$), nous avons

$$\rho u_p(\rho f + \rho g) = \rho u_p(\rho f) + \rho u_p(\rho g). \tag{21}$$

En effet $\hat{A}^1$ est une algèbre commutative et $\Theta(f, g) = 0$. Nous appliquons ici un résultat plus élémentaire que l'identité de Jacobson, à savoir l'identité $(x+y)^{p^r} = x^{p^r} + y^{p^r}$, vérifiée dans les anneaux commutatifs de caractéristique p.

(4.3) **Réduction du logarithme.**

LEMME. — *Soit n un entier > 0. Nous avons*

$$v(n) \leq \pi(n-1), \tag{22}$$

l'égalité n'étant vérifiée que pour $n = 1$ ou p.

Preuve. — Pour tout $h \in \mathbf{N}$,

$$\pi(p^h - 1) = \sum_{0 \leq i < h} p^i \geq h,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $h = 0$ ou 1. Nous posons $n = n_0 p^h$, où $h = v(n)$, et nous obtenons

$$\pi(n-1) \geq \pi(p^h - 1) \geq h = v(n).$$

L'égalité $\pi(n-1) = v(n)$ exige $n_0 = 1$ et $h = 0$ ou 1.

PROPOSITION 4. — *La série $L(x)$ définie par la formule* (3) *de* (1.4) *vérifie les relations*

$$L(x) \in {}_0\hat{A}^1 \quad \text{et} \quad \rho L(x) = x - \rho u_p(x). \tag{23}$$

Preuve. — C'est une conséquence du lemme précédent et de la relation $(-1)^{p+1} \equiv 1 \pmod p$.

La relation (20) entraîne donc

$$\rho L(x+y) = \rho L(x) + \rho L(y) + \rho\Theta(x, y). \tag{24}$$

(4.4) **Réduction de l'exponentielle.** — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous notons $u_p^n(x)$ le $n^{\text{ième}}$ itéré de $u_p(x)$:

$$u_p^n(x) = (-1)^n p^{-\pi(p^n-1)} x^{p^n}, \tag{25}$$

et nous posons

$$e^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u''_{p}(x). \tag{26}$$

PROPOSITION 5. — *La série $e(x)$ définie par la formule* (4) *de* (1.4) *vérifie les relations*

$$e(x) \in {}_0\hat{A}^1 \quad \text{et} \quad \rho e(x) = \rho e^*(x). \tag{27}$$

Preuve. — Ces assertions équivalent aux relations suivantes :

$v(n!) < \pi(n-1)$ si n n'est pas une puissance de p;

$p^{-\pi(p^n-1)}(p^n)! \equiv (-1)^n \pmod p$.

Elles sont faciles à démontrer directement (théorème de Wilson), mais nous préférons utiliser la définition de $e(x)$ par les formules (9) de (1.7). En effet, la relation $u(x) \in {}_0\hat{A}^1$ (proposition 4) nous donne (d'après la proposition 2) $e_n(x) \in {}_0\hat{A}^1$ pour tout n, d'où $e(x) \in {}_0\hat{A}^1$. De plus, pour calculer les $\rho e_n(x)$, nous pouvons remplacer $\rho u(x)$ par $\rho u_{p^r}(x)$. Compte tenu de (21), nous obtenons

$$\rho e_n(x) = \sum_{0 \leq i \leq n} \rho u^i_{p^r}(x)$$

par un calcul classique qui achève la démonstration.

(4.5) **Réduction de la série de Hausdorff.**

THÉORÈME 1. — *La série $\Phi(x, y)$ définie par la formule* (10) *de* (1.7) *vérifie les relations*

$$\Phi(x, y) \in {}_0\hat{A}^2 \quad \textit{et} \quad \rho\Phi(x, y) = x + y + \rho\Theta(\rho e^*(x), \rho e^*(y)); \tag{28}$$

[e^* *est défini par* (25) *et* (26); Θ *par* (1) *et* (19); ρ *par la définition* 2].

Preuve. — Les propositions 2, 4 et 5 nous montrent que $\Phi(x, y) \in {}_0\hat{A}^2$. De plus, quand nous appliquons la définition (10) au calcul de $\rho\Phi$, nous pouvons remplacer

$$e(x) + e(y) + e(x)e(y)$$

par un élément ayant même image par ρ. Or l'image par ρ de $e(x)\,e(y)$ est nulle [proposition 3, appliquée à $f(x, y) = xy$]. Nous avons donc

$$\rho\Phi(x, y) = \rho L(\rho e(x) + \rho e(y)).$$

D'après (24) :

$$\rho\Phi(x, y) = x + y + \rho\Theta(\rho e(x), \rho e(y)),$$

et une dernière application des propositions 2 et 5 achève de prouver (28).

Remarques. — La formule (28) met en évidence la symétrie de $\rho\Phi$:

$$\rho\Phi(x, y) = \rho\Phi(y, x). \tag{29}$$

Nous obtenons donc dans **B** une *loi de groupe commutative.* Nous avons écrit $\Phi(x, y) \in {}_0\hat{A}^2$, alors que nous connaissons la relation plus précise $\Phi(x, y) \in {}_0\hat{L}^2$ (la série de Hausdorff est une série formelle de Lie). Avec les notations de (3.4), nous avons donc $\rho\Phi \in \hat{C}^2$. Mais cette dernière relation est mise en évidence par (28) si l'on admet les identités (1) et (2). Réciproquement, l'identité de Jacobson (1) est une conséquence de la relation $\rho\Phi \in \hat{C}^2$ (on déduit la relation $\Theta \in L^2$ de l'étude des termes de degré total p dans $\rho\Phi$).

(4.6) **Réduction du « commutateur de Hausdorff ».** — Nous définissons le « commutateur de Hausdorff » Ψ comme la série

$$\Psi(x, y) = \mathrm{Log}(\exp(-x).\exp(-y).\exp x.\exp y). \tag{30}$$

D'après (29), nous avons $\rho\Psi(x, y) = 0$ puisque la loi de groupe $\rho\Phi$ est commutative. Nous allons montrer que $w_\pi(\Psi) = \pi$, et calculer $\rho_\pi(\Psi)$ [notation définie en (3.5)]. Utilisant la série $e(x)$, nous devons d'abord calculer

$$f(x, y) = (1 + e(-x))(1 + e(-y))(1 + e(x))(1 + e(y)) - 1.$$

La proposition 3 nous montre que les termes de degré total $\geqq 3$ en $e(x), \ldots, e(-y)$ ont une valuation $\geqq 2\pi$. Développons $f(x, y)$ en négligeant ces termes; compte tenu des relations

$$e(-x) + e(x) + e(-x)e(x) = 0; \qquad e(-y) + e(y) + e(-y)e(y) = 0, \tag{31}$$

nous obtenons

$$f(x, y) \equiv e(-x)e(-y) + e(-x)e(y) + e(-y)e(x) + e(x)e(y) \pmod{{}_{2\pi}\hat{A}^2}.$$

Appliquant encore (31) et négligeant les termes de degré 3, nous obtenons

$$f(x, y) \equiv e(x)e(y) - e(y)e(x) = [e(x), e(y)] \pmod{{}_{2\pi}\hat{A}^2}. \tag{32}$$

La proposition 3 nous montre que, mod ${}_{2\pi}\hat{A}^2$, nous pouvons remplacer e par e^*; de même nous pouvons remplacer $L(x)$ par x dans le calcul de $L(f(x, y)) = \Psi(x, y)$. Nous sommes parvenus au résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *La série* $\Psi(x, y)$ *définie par la formule* (30) *vérifie les relations*

$$\Psi(x, y) \in {}_{\pi}\hat{A}^2 \quad \textit{et} \quad \rho_{\pi}\Psi(x, y) = \rho_{\pi}[\rho e^*(x), \rho e^*(y)], \tag{33}$$

ou $\rho_{\pi}[\rho e^*(x), \rho e^*(y)]$ *est défini comme cas particulier de la formule* (17).

Remarque. — La formule (33) et l'identité (2) mettent en évidence que $\rho_{\pi}\Psi$ est l'image d'une série de Lie.

(Manuscrit reçu le 26 février 1963.)

Michel LAZARD,
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers,
2, rue Boutarel,
Paris (4e).