BULLETIN DE LA S. M. F.

ALDO ANDREOTTI

Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 1-38

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 1 à 38.

THÉORÈMES DE DÉPENDANCE ALGÉBRIQUE SUR LES ESPACES COMPLEXES PSEUDO-CONCAVES ;

PAR

ALDO ANDREOTTI (*)

(Pise).

On sait que sur un espace complexe X irréductible, compact et de dimension n, le corps $\mathcal{K}(X)$ des fonctions méromorphes est isomorphe au corps des fonctions rationnelles sur une variété projective de dimension $\leq n$. Ce théorème a été démontré sous cette forme générale par R. REMMERT [9]. Ce résultat était déjà connu dans le cas où le degré de transcendance de $\mathcal{K}(X)$ était maximal : son histoire se trouve résumée dans un article de SIEGEL [14], où une démonstration très simple en est donnée, celle-ci peut d'ailleurs s'étendre au cas général sans grande difficulté. C'est justement une analyse de la démonstration de SIEGEL qui nous a amené à envisager une généralisation de ce théorème qui fait l'objet de cet article.

La démonstration de SIEGEL consiste à prouver d'abord :

(A) Si un certain nombre de fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_k$ sur X sont analytiquement dépendantes (i. e. $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = 0$) alors elles sont algébriquement dépendantes [i. e. il existe un polynôme à k indéterminés $P(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0$ tel que $P(f_1, \ldots, f_k) = 0$].

Ensuite on démontre :

(B) Si l'on fixe $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{K}(X)$ algébriquement indépendantes, tout $f \in \mathcal{K}(X)$ qui soit algébriquement liée aux $f_1, \ldots, f_k$ satisfait à une équation de degré borné à coefficients polynômes dans les $f_1, \ldots, f_k$.

(*) L'auteur a bénéficié, pendant la préparation de ce travail, du Grant n. A. F.-E. O. A. R. 62-35 de l'U. S. Air Force

La généralisation dont il est question consiste d'une part à faire découler les théorèmes précédents de théorèmes du même genre sur la dépendance algébrique et analytique des sections d'un faisceau cohérent sans torsion sur X, et d'autre part à affaiblir la condition de compacité pour l'espace X lui-même.

Bornons-nous à exposer ces faits dans le cas particulier où X est une variété connexe et où il n'est question que d'un seul faisceau cohérent localement libre de rang 1 (i. e. le faisceau des germes de sections holomorphes dans un fibré holomorphe en droites).

On voit facilement que sur une variété X (compacte ou non) toute fonction méromorphe f peut s'écrire comme quotient $f = \frac{s_1}{s_0}$, $s_0 \not\equiv 0$, s_1 et s_0 désignant deux sections d'un fibré holomorphe en droites F (1).

Donc, étant données k fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_k$ sur X, on peut trouver un fibré F et $k+1$ sections $s_0, s_1, \ldots, s_k$ avec $s_0 \not\equiv 0$, telles que $f_\alpha = \frac{s_\alpha}{s_0}$. Le théorème (A) découle alors d'un théorème du type suivant :

(A′) Si $s_0, \ldots, s_k$ sont $k+1$ sections holomorphes d'un fibré holomorphe F en droites sur une variété compacte X et si elles sont « analytiquement dépendantes » [i. e. $\sum (-1)^i s_i\, ds_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{ds_i} \wedge \ldots \wedge ds_k = 0$, égalité qu'on obtient en faisant disparaître les dénominateurs de $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = 0$] alors elles sont aussi « algébriquement dépendantes » [i. e. il existe un polynôme homogène $P(x_0, \ldots, x_k) \not\equiv 0$ tel que $P(s_0, \ldots, s_k) = 0$].

Le théorème (B) est remplacé par le théorème :

(B′) Si les sections du fibré F, $s_0, \ldots, s_k$ sont algébriquement indépendantes et si la section s dépend algébriquement de $s_0, \ldots, s_k$, alors s satisfait à une équation de degré borné.

On se ramène au théorème (B) par une astuce due à SIEGEL qui permet de montrer que si f dépend algébriquement des $f_1, \ldots, f_k$ et les f_i sont données comme quotients de sections d'un fibré F, alors f peut aussi s'écrire comme quotient de sections du fibré F^h, pour h convenable.

La démonstration se fait en calquant celle de SIEGEL; elle est fondée sur le lemme de Schwarz et prouve essentiellement la finitude du groupe

---

(1) En effet, pour un recouvrement $\mathfrak{U} = \{ U_i \}$ suffisamment fin, on peut écrire $f|_{U_i} = \frac{p_i}{q_i}$ avec p_i, q_i holomorphes sur U_i et premiers entre eux en *tout* point de U_i. On a alors sur $U_i \cap U_j$: $p_i = g_{ij}\, p_j$ et $q_i = g_{ij}\, q_j$ avec g_{ij} holomorphes et partout $\not\equiv 0$. Les fonctions g_{ij} sont bien les fonctions de transition d'un fibré F pour lequel $\{ p_i \}$, $\{ q_i \}$ sont les représentations locales de deux sections s_1, s_0.

$H^0(X, F)$ et donne également de bonnes majorations polynomiales pour $H^0(X, F^h)$ c'est-à-dire pour la « fonction de Hilbert » de l'anneau $\mathfrak{A}(F) = \bigcup_h \mathrm{H}^0(X, F^h)$. En particulier, un raisonnement analogue à celui de SIEGEL démontre que $\mathfrak{L}(F)$, corps des quotients de $\mathfrak{A}(F)$ est algébriquement clos dans le corps $\mathfrak{K}(X)$.

Tout ceci dans le cas où X est une variété compacte. Or dans l'étude des espaces pseudo-concaves (*cf.* [2]), on voit que les espaces fortement pseudo-concaves ont la propriété que $H^0(X, \mathfrak{F})$ est de dimension finie pour tout faisceau cohérent localement libre $\mathfrak{F}$ sur X. Il est donc naturel de se demander si ce genre de théorèmes valables pour les espaces compacts sont valables pour les espaces pseudo-concaves. La réponse est affirmative et c'est en ceci que consiste l'affaiblissement de l'hypothèse de compacité. D'ailleurs il suffit d'avoir une notion plus faible que la forte pseudo-concavité pour l'espace X. C'est la notion de pseudo-concavité telle qu'elle sera définie dans cet article. Pour une variété connexe X, cette notion affirme *grosso modo* qu'il existe un ouvert Y relativement compact dans X tel que $\overline{Y}$ possède dans X des recouvrements finis arbitrairement fins par des ouverts $\{U_i\}$ de X dont la frontière de Šilov est contenue dans Y.

Grâce à cette propriété le raisonnement de SIEGEL, basé essentiellement sur le principe du maximum, s'étend sans peine.

Pour justifier cette notion, signalons par exemple que l'espace quotient du demi-plan généralisé de Siegel par le groupe modulaire, quoique non compact, est pseudo-concave en dimension > 1 (*cf.* [1]).

Dans un premier paragraphe, nous avons exposé certaines notions qu'on utilise souvent dans la suite de l'article et aussi dans [2], notamment les notions d'espace tangent de Zariski, de fonction q-pseudo-convexe sur les espaces analytiques, la généralisation du lemme de Schwarz aux ensembles analytiques, la notion de faisceau de torsion d'un faisceau cohérent et les définitions de dépendance algébrique et analytique pour les systèmes de sections prises dans un ensemble fini de faisceaux sans torsion.

Le paragraphe 2 est consacré à l'introduction de la notion d'espace pseudo-concave, au théorème de finitude pour le $H^0(X, \mathfrak{F})$, ($\mathfrak{F}$ étant un faisceau cohérent sans torsion sur X), ainsi qu'au calcul de la croissance avec h de $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathfrak{F}^h)$ ($\mathfrak{F}^h$ étant la puissance tensorielle h-ième de $\mathfrak{F}$ privé de la torsion éventuelle).

Les théorèmes de dépendance algébrique sont donnés au paragraphe 3. Au paragraphe 4 nous avons étudié le corps des fonctions méromorphes sur un espace pseudo-concave irréductible.

Nous nous sommes borné à considérer seulement des espaces analytiques localement irréductibles, cette condition n'apporte pas de restric-

tions pour le genre de théorèmes envisagés car on peut toujours passer de l'espace donné à son modèle normal.

Je tiens à remercier de manière particulière H. GRAUERT auquel je suis débiteur de nombreuses idées, ce qui m'a permis de donner à ce travail une portée plus générale que celle que j'avais conçue au départ. On verra que toutes les idées fondamentales de ce papier se trouvent déjà dans notre article écrit en commun [1].

A l'origine de cet article, il y a eu un certain nombre d'utiles discussions sur le sujet avec A. WEIL.

§ 1. PRÉLIMINAIRES.

1. L'espace tangent de Zariski.

a. Soit $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ l'anneau des séries à n variables $z_1, \ldots, z_n$ convergentes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$.

Tout élément $f \in \mathcal{O}$ peut s'écrire d'une seule manière comme une série de polynômes homogènes

$$f = f_k + f_{k+1} + \ldots,$$

où les f_l sont des polynômes homogènes de degré l et $f_k \not\equiv 0$ si $f \not\equiv 0$. On appelle f_k la *partie principale* de f si $f \not\equiv 0$; si $f \equiv 0$, on prend pour partie principale zéro.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{O}$. Les parties principales des éléments de $\mathfrak{a}$ forment un idéal $\tilde{\mathfrak{a}}$ de polynômes homogènes qu'on appelle l'*idéal tangent* de $\mathfrak{a}$.

Soit V un ensemble analytique contenant $O \in \mathbf{C}^n$ et défini dans un voisinage de O dans $\mathbf{C}^n$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal des $f \in \mathcal{O}$ s'annulant sur V au voisinage de O.

L'espace linéaire défini par l'annulation des formes linéaires de $\tilde{\mathfrak{a}}$ s'appelle l'*espace tangent de Zariski* à V au point O.

L'ensemble des zéros dans $\mathbf{C}^n$ de l'idéal $\tilde{\mathfrak{a}}$ s'appelle le *cône tangent* à V au point O.

PROPOSITION 1. — *Il existe un isomorphisme d'un voisinage de O dans V sur un ensemble analytique d'un voisinage de O dans l'espace tangent de Zariski.*

Preuve. — Supposons l'espace tangent de Zariski défini par les équations $z_{d+1} = \ldots = z_n = 0$. Par hypothèse il existe dans $\mathfrak{a}$ des séries du type $f_{d+1} = z_{d+1} + \ldots, \ldots, f_n = z_n + \ldots$. Le jacobien $\partial(f_{d+1}, \ldots, f_n)/(z_{d+1}, \ldots, z_n)$ valant 1 à l'origine, l'ensemble $Y = \{f_{d+1} = \ldots = f_n = 0\}$ est donc une sous-variété non singulière de dimension d dans un voisinage de O dans $\mathbf{C}^n$. Dans ce voisinage $V \subset Y$.

Il suffit alors de remarquer que la projection $(z_1 \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_l)$ applique isomorphiquement un voisinage de O dans Y sur un voisinage O dans l'espace tangent de Zariski. En effet les équations $f_{d+1} = 0, \ldots, f_n = 0$ peuvent se résoudre par des fonctions $z_{l+k} = g_{d+k}(z_1, \ldots, z_l)$, $k = 1, 2, \ldots, n - d$, holomorphes au voisinage de l'origine.

b. Soit $\mathcal{O}(V)_O$ l'anneau local des germes de fonctions holomorphes sur V en O. Soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Soit

$$G(\mathfrak{m}) = \bigcup_0^\infty \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} = \mathbf{C} \cup \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cup \ldots$$

l'anneau gradué associé. Cet anneau est engendré par les images d'un ensemble de fonctions de $\mathfrak{m}$ linéairement indépendantes mod $\mathfrak{m}^2$. Ceci démontre que :

α. $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 =$ dimension de l'espace tangent de Zariski au point O, donc la dimension de l'espace tangent de Zariski est égale au plus petit entier ν tel qu'il y ait un isomorphisme d'un voisinage de O dans V sur un ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbf{C}^\nu$.

β. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont les images de $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, le noyau de l'homomorphisme d'anneaux gradués $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n] \to G(\mathfrak{m})$ qui envoie z_i dans X_i s'identifie à l'idéal tangent $\tilde{\mathfrak{a}}$ défini par V en O.

En particulier si V est plongé dans son espace tangent de Zariski, l'idéal tangent a un caractère intrinsèque.

c. Nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soit $\varphi : V \to \mathbf{C}^\nu$ un isomorphisme de V sur un ensemble analytique $\varphi(V)$ d'un ouvert $U \subset \mathbf{C}^\nu$. Supposons V plongé dans son espace tangent de Zariski $\mathfrak{T}_0$ au point O.*

Alors φ s'étend en un isomorphisme d'un voisinage de O dans $\mathfrak{T}_0$ sur une variété (non singulière) d'un voisinage de $\varphi(O)$ dans U.

Preuve. — Soit $W = \varphi(V)$. Dans la démonstration de la proposition 1 nous avons construit une variété Y contenant un voisinage de $\varphi(O)$ dans W [dans un voisinage de $\varphi(O)$ dans U] qui s'appliquait biholomorphiquement sur un voisinage de $\varphi(O)$ dans l'espace tangent de Zariski en $\varphi(O)$.

On est donc amené à démontrer le cas particulier suivant :

PROPOSITION 2′ — *Soient (V, x_0), (W, y_0) deux ensembles analytiques pointés plongés respectivement dans leurs espaces tangents de Zariski $\mathfrak{T}_{x_0}$, $\mathfrak{T}_{y_0}$ aux points x_0, y_0.*

Tout isomorphisme $\varphi : V \to W$ s'étend en un isomorphisme d'un voisinage de x_0 dans $\mathfrak{T}_{x_0}$ sur un voisinage de y_0 dans $\mathfrak{T}_{y_0}$.

Preuve. — Soient $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, des systèmes de coordonnées dans $\mathfrak{O}_{x_0}$, $\mathfrak{O}_{y_0}$ respectivement, les points x_0, y_0 étant supposés pris comme origine. Soient $y_\alpha = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ les équations de φ, les f_α étant des fonctions holomorphes des x au voisinage de O.

Les fonctions $y_\alpha|_W$ forment un système de générateurs de l'idéal maximal de $\mathcal{O}(W)_{y_0}$. L'application φ les transforme dans un système $f_\alpha|_V = \varphi^* y_\alpha|_W$ de générateurs pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}(V)_{x_0}$. Donc les fonctions f_α ont pour parties principales n formes linéaires linéairement indépendantes, i. e. $\{\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(y_1 \ldots y_n)\}_{y_0} \not\equiv 0$.

2. **Le cône tangent.** — Soit (x_0, V) un ensemble analytique pointé dans un ouvert $U \subset \mathbf{C}^n$. D'un théorème de Krull [8] on déduit que la dimension de V au point x_0 est égale à la dimension du cône tangent.

Nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 3. — *Soit $\mathfrak{m}_{x_0}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{x_0}$ de V au point x_0 et soit*

$$\chi(h) = 1 + \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2 + \ldots + \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{m}_{x_0}^{h-1}/\mathfrak{m}_{x_0}^h.$$

On a

$$\chi(h) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^h$$

et pour h assez grand, $h > h(x_0)$, la fonction $\chi(h)$ est un polynôme en h dont le degré est égal à $\dim_{x_0} V$.

Preuve. — Envisageons la suite d'homomorphismes surjectifs

$$\mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^h \to \mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^{h-1} \to \ldots \to \mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2 \to \mathbf{C} \to 0.$$

Les noyaux respectifs sont $\mathfrak{m}_{x_0}^{h-1}/\mathfrak{m}_{x_0}^h$, $\ldots$, $\mathfrak{m}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^2$, $\mathbf{C}$. Donc

$$\chi(h) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0}^h.$$

Il en résulte que $\chi(h)$ n'est autre que la fonction de Hilbert (2) de l'idéal engendré par l'idéal tangent $\tilde{\mathfrak{a}}$ dans l'anneau des polynômes en les variables $z_1, \ldots z_n$, défini par V en x_0. Comme cet idéal est de dimension $d = \dim_{x_0} V$ la proposition en résulte.

---

(2) Étant donné un idéal $\mathfrak{b}$ dans l'anneau $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes en $x_1, \ldots x_n$ on appelle fonction de Hilbert $\chi_{\mathfrak{b}}(h)$ de l'idéal $\mathfrak{b}$ la fonction qui associe à chaque entier $h \geq 0$ la dimension de l'espace vectoriel des images des polynômes de degré $\leq h$ dans l'anneau $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{b}$. Pour h assez grand $\chi_{\mathfrak{b}}(h)$ est un polynôme en h de degré égal à la dimension de $\mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{b}$ est nul $\chi_{(0)}(h) = \binom{n+h}{h}$. Dans le cas où x_0 est un point non singulier de V, la proposition 3 est donc banale.

Nous dirons qu'une foncion holomorphe f sur V *s'annule à un ordre* $\geqq h$ en x_0 si $f \in \mathfrak{m}_{x_0}^h$. L'entier $\chi(h)$ représente la dimension de l'espace vectoriel des germes de fonctions en x_0 modulo celles qui s'annulent en x_0 à un ordre $\geqq h$.

3. **Le lemme de Schwarz.**

a. Soit

$$P = \left\{ z \in \mathbf{C}^n \;\middle|\; |z_\alpha| \leqq r,\ 1 \leqq \alpha \leqq n \right\}$$

un polycylindre fermé de $\mathbf{C}^n$. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de P s'annulant à l'origine à un ordre $\geqq h$. Le lemme de Schwarz classique nous dit qu'on a pour tout $z \in P$ l'inégalité

$$|f(z)| \leqq \frac{\|z\|^h}{r^h} \sup |f(P)| \quad (^3).$$

Nous aurons besoin d'une extension de ce lemme aux ensembles analytiques.

L'idée est due à BOCHNER et MARTIN [3].

b. Soient X, Y deux espaces analytiques et $\pi : X \to Y$ une application holomorphe ouverte, propre et surjective de X sur Y, (lorsque X et Y sont irréductibles de même dimension et si les fibres de π sont discrètes alors π propre et surjective entraîne que π est ouverte [5]). Nous dirons que (X, π, Y) est un *revêtement analytique ramifié* de Y si :

(i) pour tout point $y \in Y$, $\pi^{-1}(y)$ contient au plus ν points;

(ii) il existe un sous-ensemble analytique $D \subset Y$ de codimension $\geqq 1$ tel que $\pi^{-1}(D)$ est un sous-ensemble analytique de codimension $\geqq 1$ en tout point de X et tel que $X - \pi^{-1}(D)$ soit un revêtement non ramifié à ν feuillets de $Y - D$;

(iii) l'espace Y est normal.

Soit (V, x_0) un ensemble analytique pointé irréductible au point x_0. On sait qu'il existe un voisinage W de x_0 dans V et une application holomorphe $\pi : W \to \mathbf{C}^n$, où $n = \dim_{x_0} V$, telle que $\pi(W)$ soit ouvert dans $\mathbf{C}^n$ et $(W, \pi, \pi(W))$ un revêtement ramifié de $\pi(W)$.

c. Soit (X, π, U) un revêtement ramifié d'un voisinage U du polycylindre $P = \left\{ z \in \mathbf{C}^n \;\middle|\; |z_\alpha| \leqq r,\ 1 \leqq \alpha \leqq n \right\}$, ramifié sur un ensemble analytique D. En chaque point $a \in \pi^{-1}(0)$ envisageons l'idéal $\mathfrak{m}_\pi$ engendré dans $\mathcal{O}_a(X)$ par les fonctions $z_\alpha \circ \pi$, $1 \leqq \alpha \leqq n$.

(^{3}) On pose dans $\mathbf{C}^n$, $\|z\| = \sup_\alpha |z_\alpha|$.

LEMME 1. — *Soit f une fonction holomorphe sur $\pi^{-1}(P)$. Si en tout point $a \in \pi^{-1}(O)$ on a $f \in \mathfrak{m}_\pi^h$, alors pour tout point $x \in \pi^{-1}(P)$ on a une inégalité*

$$|f(x)| \leq \frac{\|\pi(x)\|^h}{r^h} \sup |f(\pi^{-1}(P))|.$$

Preuve.

α. Posons $z = \pi(x)$, on démontre d'abord que $f(x)$ satisfait à une équation algébrique de degré ν de la forme

$$w^\nu + \alpha_1(z)\, w^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu(z) = 0, \tag{1}$$

où les $\alpha_i(z)$ sont holomorphes sur un voisinage de P et s'annulent à l'origine à un ordre $\geq hi$.

Soit pour tout $z \in P - P \cap D$, $\pi^{-1}(z) = Q_1 \cup \ldots \cup Q_\nu$. Considérons les fonctions symétriques :

$$-\alpha_1(z) = f(Q_1) + \ldots + f(Q_\nu), \qquad \ldots, \qquad (-1)^\nu \alpha_\nu(z) = f(Q_1) \ldots f(Q_\nu)$$

Ce sont des fonctions holomorphes bornées sur $P - P \cap D$, donc elles définissent des fonctions holomorphes sur tout un voisinage de P et pour tout point $x \in \pi^{-1}(P - P \cap D)$, $f(x)$ satisfait à l'équation (1); par continuité elle satisfait à cette équation pour tout $x \in \pi^{-1}(P)$.

Pour tout point $a \in \pi^{-1}(O)$ et pour tout $f \in \mathfrak{m}_\pi^h$ au voisinage de a, on a une inégalité du type $|f(x)| \leq c\, \|\pi(x)\|^h$. En dehors de D et sur un petit voisinage de l'origine on aura donc des inégalités $|\alpha_i(z)| \leq k\, \|z\|^{hi}$. Par continuité, ces inégalités restent valables dans tout un voisinage de l'origine, donc les $\alpha_i(z)$ s'annulent à l'origine à un ordre $\geq hi$.

β. Envisageons les fonctions symétriques

$$s_k(z) = f^k(Q_1) + \ldots + f^k(Q_\nu).$$

Comme elles s'expriment par des polynômes en les $\alpha_i(z)$, elles sont holomorphes sur un voisinage de P et s'annulent à l'origine à un ordre $\geq hk$. Ainsi on a sur P les inégalités

$$\sup |s_k(P)| \leq \nu \sup |f(\pi^{-1}(P))|^k.$$

Par le lemme de Schwarz on a donc dans P :

$$|s_k(z)| \leq \frac{\|z\|^{hk}}{r^{hk}}\, \nu \sup |f(\pi^{-1}(P))|^k$$

et d'un lemme connu d'analyse (4) on déduit alors :

$$|f(x)| \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} |s_k(\pi(x))|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{\|\pi(x)\|^h}{r^h} \sup |f(\pi^{-1}(P))|.$$

d. Soit X un espace analytique; en un point $x \in X$ envisageons l'anneau local $\mathcal{O}_x$ et son idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $n = \dim_x X$, nous dirons que n fonctions $Y_1, \ldots, Y_n$ de $\mathcal{O}_x$ donnent un *système de paramètres locaux* au point x (*cf.* CHEVALLEY [4]) si :

(i) $Y_i \in \mathfrak{m}$, $Y_i \notin \mathfrak{m}^2$, $1 \leq i \leq n$;

(ii) les images des Y_i dans $G(\mathfrak{m}) = \bigcup_0^\infty \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ donnent n formes linéaires engendrant un idéal trivial, (i. e. n'ayant que le zéro banal).

LEMME 2. — *Soit V un ensemble analytique défini dans un voisinage du polycyclindre $\|z\| \leq 1$ dans $\mathbf{C}^m$ et passant par l'origine.*

Soit $n = \dim_O V$ et supposons que $x = (z_1, \ldots, z_n)$ soit un système de paramètres locaux sur V à l'origine.

Posons $y = (z_{n+1}, \ldots, z_m)$. On peut trouver deux constantes positives c et $r < 1$ telles que pour tout point de V appartenant au polycylindre $\|z\| < r$ on ait $\|y\| \leq c\|x\|$.

Preuve. — Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ une base homogène de l'idéal tangent $\mathfrak{a}_O(V)$ défini par V à l origine. Par hypothèse, les équations $\varphi_\alpha(o, y) = o$, $1 \leq \alpha \leq s$, ont la seule solution $y = o$. Le théorème des zéros de Hilbert nous dit que pour un ρ convenable on a

$$y_\alpha^\rho = \sum A_\alpha^\beta(y)\, \varphi_\beta(o, y),$$

où les A_α^β sont des polynômes homogènes en y de degré $= \rho$ — degré de $\varphi_\beta(o, y)$.

---

(4) Si $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{C}$ et $s_k = a_1^k + \ldots + a_p^k$ alors $|a_i| \leq \overline{\lim} |s_k|^{\frac{1}{k}}$. Démonstration : on peut supposer $|a_1| \leq \ldots \leq |a_p|$ de sorte que

$$|s_k| = |a_p|^k \left|1 + \alpha_1^k + \ldots + \alpha_{p-1}^k\right| \qquad \text{avec} \quad |\alpha_i| \leq 1.$$

Supposons $\alpha_{m+\nu} = e^{2\pi i \theta_{m+\nu}}$ pour $1 \leq \nu \leq p - 1 - m = \rho$ et les autres $|\alpha_i| < 1$. Pour chaque entier $q > o$ on divise le cube unité I_ρ de $\mathbf{R}^\rho$ en cubes de côté $\frac{1}{q^2}$. Parmi les points de I_ρ de coordonnées $\theta_\alpha h \bmod 1$ pour h entier $> o$ il y en a au moins deux dans un même cube de la division. Donc il existe un h_q entier $> o$ tel que $|\theta_\alpha h_q \bmod 1| < \frac{1}{q^2}$. Posons $k_q = qh_q$. Pour $q \to +\infty$, $\left|1 + \alpha_1^{k_q} + \ldots + \alpha_{p-1}^{k_q}\right| \to \rho + 1$. D'où la conclusion.

Ceci nous donne des identités du type

$$\sum A_\alpha^\beta(y)\,\varphi_\beta(x,y) = y_\alpha^\rho + \sum x_i\,B_\alpha^i(x,y),$$

où les B_α^i sont des polynômes homogènes de degré $\rho - 1$.

Il existe donc des fonctions f_α holomorphes dans un voisinage de l'origine, nulles sur V, et ayant pour parties principales

$$y_\alpha^\rho + \sum x_i\,B_\alpha^i(x,y); \qquad f_\alpha = y_\alpha^\rho + \sum x_i\,B_\alpha^i(x,y) + G_\alpha(x,y).$$

Soit $r_1 < 1$ tel que les f_α soient holomorphes sur $\| z \| < r_1$ et choisissons les constantes C_1, D_1 de sorte que, pour $\| z \| < r_1$ on ait :

$$| B_\alpha^i(z) | \leq C_1 \| z \|^{\rho-1},$$
$$| G_\alpha(z) | \leq D_1 \| z \|^{\rho+1}.$$

Prenons

$$r < \min\left\{ r_1, \tfrac{1}{2} D_1^{-1} \right\} \qquad \text{et} \qquad c > \max\{ 1, 2\,C_1 n \}.$$

Supposons qu'il existe un point $z \in V$ avec $\| z \| < r$, pour lequel $\| y \| > c \| x \|$.

En ce point,

$$| B_\alpha^i(z) | \leq C_1 \| y \|^{\rho-1}, \qquad | G_\alpha(z) | \leq D_1 \| y \|^{\rho+1}.$$

Donc

$$| y_\alpha |^\rho \leq C_1 \| y \|^{\rho-1} \sum | x_i | + D_1 \| y \|^{\rho+1} \quad \text{pour tout } \alpha.$$

Comme $\sum | x_i | \leq n \| x \|$, on a $\| y \| \leq C_1 n \| x \| + D_1 \| y \|^2$. Mais $1 - D_1 \| y \| > \frac{1}{2}$, donc $\| y \| < 2\,C_1 n \| x \|$, ce qui contredit l'hypothèse $\| y \| > c \| x \|$.

e. Nous énonçons le lemme de Schwarz sous la forme suivante :

LEMME DE SCHWARZ. — *Avec les mêmes notations qu'au lemme* 1 *si les fonctions* $z_\alpha \circ \pi$ *donnent des paramètres locaux aux points de* $\pi^{-1}(O)$ *et si* f *s'annule à un ordre* $\geq h$ *en chacun de ces points alors pour tout* $x \in \pi^{-1}(P)$ *on a*

$$| f(x) | \leq \frac{\| \pi(x) \|^h}{r^h} \sup | f(\pi^{-1}(P)) |.$$

Preuve. — On raisonne comme au lemme 1. Il suffit de démontrer que sous les hypothèses envisagées, au voisinage de chaque point de $\pi^{-1}(O)$ on a une inégalité du type

$$| f(x) | < C \| \pi(x) \|^h.$$

Pour ceci imaginons un plongement ψ d'un voisinage de $a \in \pi^{-1}(O)$ dans l'espace tangent de Zariski en a, dans lequel les fonctions $z_\alpha \circ \pi$ soient les n premières coordonnées.

Comme f s'annule en a d'ordre $\geqq h$ on aura une inégalité du type $|f(x)| \leqq C_1 \|\psi(x)\|^h$. Le lemme 2 permet d'écrire l'inégalité cherchée.

4. **Fonctions q-pseudo-convexes.**

a. Soit φ une fonction à valeurs réelles C^∞, et définie sur un ouvert $U \subset \mathbf{C}^n$. En tout point $z_0 \subset U$ envisageons la forme hermitienne

$$\mathcal{L}(\varphi) = \sum \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) u^\alpha \bar{u}^\beta$$

dite forme de E. E. Levi. Un changement du choix des coordonnées holomorphes locales au point z_0 opère sur $\mathcal{L}(\varphi)$ comme une substitution linéaire non dégénérée sur les variables u.

Nous dirons que φ est une fonction *pluriharmonique* si $\mathcal{L}(\varphi)$ est identiquement nulle en tout point de U. La partie réelle d'une fonction holomorphe sur U est une fonction pluriharmonique. Réciproquement si $H_1(U, \mathbf{R}) = 0$ toute fonction pluriharmonique sur U est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U.

Nous dirons que φ est une fonction *fortement pseudo-convexe* si $\mathcal{L}(\varphi)$ est définie positive en tout point de U. Plus généralement nous dirons que φ est *fortement q-pseudo-convexe* ($1 \leqq q \leqq n$) si $\mathcal{L}(\varphi)$ a au moins en chaque point de U $n - q + 1$ valeurs propres strictement positives ($q = 1, 2, \ldots, n$). Une fonction fortement pseudo-convexe est donc une fonction fortement 1-pseudo-convexe. Pour que φ soit fortement q-pseudo-convexe il est nécessaire et suffisant que pour chaque point $z_0 \in U$ on puisse trouver une application biholomorphe $\tau : D_{n-q+1} \to U$ du disque $D_{n-q+1} = \left\{ t \in \mathbf{C}^{n-q+1} \,\middle|\, \sum t_\alpha \bar{t}_\alpha < 1 \right\}$ dans U telle que $\tau(0) = z_0$ et que $\varphi \circ \tau$ soit fortement pseudo-convexe dans D_{n-q+1}.

Une fonction fortement q-pseudo-convexe n'admet aucun maximum relatif dans U, en effet en vertu de la remarque précédente on se ramène au cas d'une fonction fortement pseudo-convexe sur D_1 et dans ce cas ce fait est immédiat.

b. PROPOSITION 4. — *Soit φ une fonction fortement pseudo-convexe dans U alors φ satisfait aux propriétés suivantes :*

(i) *pour tout compact $K \subset U$ il existe un $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tel que pour toute fonction α, C^∞, vérifiant les conditions*

$$\text{Support } (\alpha) \subset K, \qquad \operatorname*{Sup}_U \sum_{\rho,\mu} \left| \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z_\rho \partial \bar{z}_\mu} \right| < \varepsilon(K),$$

la fonction $\varphi + \alpha$ est aussi fortement pseudo-convexe;

(ii) *pour tout point $z_0 \in U$ il existe une fonction g_{z_0} pluriharmonique dans $\mathbf{C}^n$ et un voisinage V de z_0 tels que*

$$\varphi(z) > g_{z_0}(z) \qquad pour \quad z \in V - z_0,$$
$$\varphi(z_0) = g_{z_0}(z_0).$$

Preuve. — La première propriété découle de la continuité de la forme de Levi de φ par rapport au point z_0 variable dans U.

Quant à la deuxième propriété, il suffit de développer φ en série de Taylor jusqu'aux termes du troisième ordre :

$$\begin{aligned}\varphi(z) = \varphi(z_0) &+ \sum \partial_\nu \varphi(z_0) z_\nu + \sum \partial_{\bar\nu} \varphi(z_0) \bar z_\nu \\ &+ \sum \partial_{\nu\mu} \varphi(z_0) z_\nu z_\mu + \sum \partial_{\bar\nu\bar\mu} \varphi(z_0) \bar z_\nu \bar z_\mu \\ &+ \sum \partial_{\nu\bar\mu} \varphi(z_0) z_\nu \bar z_\mu + [3] \\ = g_{z_0}(z) &+ \sum \partial_{\nu\bar\mu} \varphi(z_0) z_\nu \bar z_\mu + [3].\end{aligned}$$

Ici [3] désigne un infiniment petit du troisième ordre par rapport à $\| z - z_0 \|$ et la fonction $g_{z_0}(z)$ est la partie réelle d'un polynôme du second degré en z. Donc $g_{z_0}(z)$ est pluriharmonique.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Soit $U_c = \{ z \in U \mid \varphi(z) < c \}$ non vide, et φ fortement pseudo-convexe dans U. Pour tout point $z_0 \in U \cap \partial U_c$ il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbf{C}_n$ et un voisinage V de z_0 tels que*

$$(\bar U_c \cap V) \cap \{ f = 0 \} = \{ z_0 \}.$$

Preuve. — Si $g_{z_0}(z) - g_{z_0}(z) \equiv 0$ ce fait est banal. Autrement il suffit d'écrire $g_{z_0}(z) - g_{z_0}(z_0)$ comme partie réelle $\mathcal{R}(f)$ d'une fonction holomorphe f sur $\mathbf{C}^n$ qui s'annule en z_0.

On remarquera que si en z_0, $d\varphi \neq 0$, l'hypersurface $f = 0$ construite tout à l'heure n'est pas singulière.

c. Soit (V, x_0) un ensemble analytique pointé, plongé (comme il est toujours permis de le supposer) dans son espace tangent de Zariski $\mathfrak{T}_{x_0}$ au point x_0.

Nous dirons qu'une fonction $\varphi : V \to R$ définit en x_0 un germe de *fonction de classe C^∞* s'il existe une fonction $\hat\varphi \in C^\infty$ dans un voisinage de x_0 dans $\mathfrak{T}_{x_0}$ telle que, au voisinage de x_0, $\hat\varphi_{| V} = \varphi$.

Cette définition a un caractère intrinsèque, i. e. elle ne dépend pas du plongement de (V, x_0) dans l'espace tangent $\mathfrak{T}_{x_0}$. En effet au lieu d'utiliser le plongement de (V, x_0) dans son espace tangent de Zariski

on peut aussi bien utiliser n'importe quel isomorphisme d'un voisinage de x_0 dans V sur un ensemble analytique d'un ouvert d'un espace $\mathbf{C}^N$ quelconque.

Une fonction sur un espace analytique dont tous les germes sont C^∞ est dite de classe C^∞.

De la même manière, on dira que φ définit en x_0 un germe de *fonction fortement q-pseudo-convexe* si l'on peut choisir $\hat{\varphi}$ fortement q-pseudo-convexe. On voit encore, en vertu de la proposition 2, que n'importe quel plongement local de (V, x_0) donne lieu à la même définition. En effet, étant donné une sous-variété non singulière $V \ni O$, d'un voisinage de O dans $\mathbf{C}^n$, toute fonction fortement q-pseudo-convexe dans un voisinage de O dans V est la trace sur V au voisinage de O d'une fonction fortement q-pseudo-convexe au voisinage de O dans $\mathbf{C}^n$.

Aussi on définit de manière évidente les fonctions fortement q-pseudo-convexes sur un espace analytique.

5. **Faisceau de torsion d'un faisceau cohérent** (*cf.* [6] et [12]) ([5]).

a. Soient X un espace analytique complexe localement irréductible, $\mathcal{O}$ son faisceau d'anneaux locaux et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X.

Soit $\mathcal{M}$ le faisceau des germes des fonctions méromorphes sur X. Désignons par $\mathcal{G}$ le faisceau $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$. Pour tout point $x \in X$ la fibre $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{G}$ en x est un espace vectoriel sur $\mathcal{M}_x$. On définit le *rang du faisceau* $\mathcal{F}$ *au point* x par la relation

$$\operatorname{rang}_x(\mathcal{F}) = \dim_{\mathcal{M}_x} \mathcal{G}_x.$$

PROPOSITION 5. — *Si X est irréductible au point x_0, alors il existe un voisinage U de x_0 et un entier $n > 0$ tels que*

$$\mathcal{G}_{|U} \approx \mathcal{M}^n_{|U}$$

Preuve. — Soit U un ouvert de X, désignons $S(U)$ l'ensemble des points non simples de U.

Comme X est irréductible au point x_0 il existe un système fondamental de voisinages $\{U_i\}_{i \in I}$ de x_0 tel que pour tout $i \in I$, $U_i - S(U_i)$ soit une variété connexe.

Choisissons $U = U_i$ si petit qu'on ait sur U une suite exacte

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^q \to \mathcal{F} \to 0.$$

([5]) Les résultats de ce numéro sont connus. Ils sont rassemblés ici pour la commodité du lecteur.

Par produit tensoriel avec $\mathfrak{M}$ on obtient la suite exacte de faisceaux d'espaces vectoriels :

$$\mathfrak{M}^p \to \mathfrak{M}^q \to \mathcal{G} \to 0.$$

Soient $s_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, s_p = (0, \ldots, 0, 1)$ les p sections de $\mathcal{O}^p$ qui engendrent $\mathcal{O}^p$ sur U. Posons $\alpha(s_i) = (f_{i1}, \ldots, f_{iq})$.

Comme $U - S(U)$ est connexe, la matrice (f_{ij}) a un rang ρ constant sur $\mathfrak{M}_y$ pour tout $y \in U$. Supposons que $\alpha(s_1), \ldots, \alpha(s_\rho)$ soient linéairement indépendents sur $\mathfrak{M}_y$ pour tout $y \in U$, on peut alors choisir un système de q générateurs de $\mathfrak{M}^q$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ tels que $\sigma_i = \alpha(s_i)$ pour $1 \leq i \leq \rho$.

Il en résulte donc que $\mathcal{G}_{|U}$ est isomorphe au faisceau engendré dans U sur $\mathfrak{M}$ par les sections $\sigma_{\rho+1}, \ldots, \sigma_q$, i. e. $\mathcal{G}_{|U} \approx \mathfrak{M}^{q-\rho}_{|U}$. On prendra donc $n = q - \rho$.

Pour un espace localement irréductible et connexe, la fonction de x $\operatorname{rang}_x(\mathcal{F})$ ne dépend pas de x et on l'appelle le *rang du faisceau* $\mathcal{F}$. Si X est localement irréductible (non nécessairement connexe) on prendra pour rang $\mathcal{F}$ le maximum des rangs sur les composantes connexes de X (pourvu qu'il ait un sens).

b. En tensorisant par l'injection naturelle $\mathcal{O} \to \mathfrak{M}$ on obtient un homomorphisme $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dont le noyau $\mathfrak{T} = \operatorname{Ker} \tau$ s'appelle le *sous-faisceau de torsion de* $\mathcal{F}$.

La fibre $\mathfrak{T}_x$ de $\mathfrak{T}$ au point x est le sous-module de torsion de $\mathcal{F}_x$

$$\mathfrak{T}_x = \{ f \in f_x \mid \lambda f = 0 \text{ pour un } \lambda \in \mathcal{O}_x, \lambda \not\equiv 0 \}.$$

PROPOSITION 6. — *Le sous-faisceau de torsion* $\mathfrak{T}$ *de* $\mathcal{F}$ *est un faisceau analytique cohérent* (*cf.* [11]).

Preuve. — Il suffit de démontrer que l'image $\tau(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est un faisceau cohérent.

Comme $\mathcal{F}$ est de type fini, $\tau(\mathcal{F})$ l'est aussi. Soient $x_0 \in X$ et $\{ U_i \}$ un système fondamental de voisinages de x_0 tels que $U_i - S(U_i)$ soit connexe, et $s_1, \ldots, s_p$, p sections de $\tau(\mathcal{F})$ sur U_i. Si $n = \operatorname{rang}_{x_0}(\mathcal{F})$ et si U_i est suffisamment petit on peut mettre les s_α sous la forme

$$s_\alpha = \frac{1}{h}(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}),$$

où h est holomorphe et non identiquement nulle sur U_i et où les $f_\alpha = (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$ sont des vecteurs holomorphes sur U_i.

Le faisceau des relations $\mathcal{R}(s_1, \ldots s_p)$ sur U_i s'identifie alors au faisceau $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_p)$ qui est bien de type fini.

On dit que $\mathcal{F}$ est un *faisceau de torsion* si $\mathfrak{T} = \mathcal{F}$ (donc $\tau = 0$). On dit qu'il est *sans torsion* si $\mathfrak{T} = 0$ (donc τ est injectif).

c. PROPOSITION 7. — *Le support d'un faisceau de torsion est un sous-ensemble analytique de X de codimension ≥ 1.*

Rappelons que le support d'un faisceau est l'ensemble des points où la fibre est $\neq 0$. Pour les faisceaux cohérents on démontre le lemme suivant :

LEMME. — *Le support d'un faisceau analytique cohérent est un ensemble analytique.*

La démonstration se fait en calquant celle donnée dans [12] pour le cas algébrique.

Il reste à montrer que si $\mathcal{F}$ est de torsion, son support est de codimension ≥ 1. Pour cela, il suffit de démontrer la proposition plus générale suivante :

PROPOSITION 8. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. L'ensemble des points $x \in X$, ou le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}_x$ n'est pas libre, est un ensemble analytique de codimension ≥ 1.*

Preuve. — Soit $x_0 \in X$ un point où $\mathcal{F}_{x_0}$ est libre sur $\mathcal{O}_{x_0}$. Il existe un voisinage U de x_0 sur lequel $\mathcal{F} \approx \mathcal{O}^n$, n étant le rang de $\mathcal{F}$ en x_0.

Par hypothèse on a un isomorphisme $\alpha : \mathcal{O}^n_{x_0} \to \mathcal{F}_{x_0}$; si $s_1, \ldots, s_n$ sont les sections $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ de $\mathcal{O}^n$ sur un voisinage de x_0 et si $\alpha(s_i) = \sigma_i$, l'homomorphisme α est donné par

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \sum \alpha_i \sigma_i.$$

Comme $\mathcal{F}$ est cohérent et comme les $\sigma_i \mathcal{O}_{x_0}$ engendrent $\mathcal{F}_{x_0}$, les σ_i engendrent $\mathcal{F}$ au voisinage de x_0 et l'on aura la suite exacte

$$\mathcal{O}^m \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \to 0.$$

Si t_i sont les sections $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ de $\mathcal{O}^m$, β est donné par $\beta(t_i) = \sum f_{ij} s_j$ où $f_{ij}^{(i)}$ sont des fonctions holomorphes sur U. Mais au point x_0 le germe de $\sum f_{ij} s_j$ est nul. Donc dans un voisinage convenable U_0 de x_0, $\beta = 0$. Ceci prouve notre assertion.

Soit $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$. Identifions $\mathbf{C}$ au corps des restes $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ de sorte que $\mathbf{C}$ devient un $\mathcal{O}_x$ module. Il résulte que si $\mathcal{F}_{x_0}$ est libre sur $\mathcal{O}_{x_0}$, dans tout un voisinage U_0 de x_0, on aura

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x) = n.$$

Soit x un point quelconque de X. Sur un voisinage U de x, on aura une suite exacte :

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \to 0.$$

Si t_i, s_j sont les sections de base de $\mathcal{O}^p$, $\mathcal{O}^q$ sur U, on aura $\beta(t_i) = \sum f_{ij} s_j$ avec f_{ij} holomorphes sur U. Soit $\rho = \operatorname{rang}_{\mathfrak{M}_x}(f_{ij})$ qu'on peut supposer constant sur U. Soit A_U l'ensemble analytique

$$A_U = \{ x \in U \mid \operatorname{rang}_{\mathbf{C}_y}(f_{ij}(y)) < \rho \}.$$

En tensorisant la suite exacte précédente par $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y = \mathbf{C}_y$ on obtient une suite exacte d'espaces vectoriels

$$\mathbf{C}^p \xrightarrow{\overline{\beta}} \mathbf{C}^q \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y \to 0$$

et l'on reconnaît que $\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}_y \otimes \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y) = n = q - \rho$ si $y \in U - A_U$ et que cette dimension est $> n$ si $y \in A_U$. Donc $\mathcal{F}_y$ n'est pas libre si et seulement si $y \in A_U$. Comme $\operatorname{codim} A_U \geq 1$ on a le résultat annoncé.

Remarque (*cf.* [13]). — L'ensemble des points $x \in X$ où $\mathcal{F}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_x$ est l'ensemble des points où $\operatorname{Tor}_1(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x) = 0$.

Preuve. — En effet, avec les notations précédentes, si $\mathcal{R}$ désigne le noyau de α dans la suite exacte $0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \to 0$, on déduit la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Tor}_1(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x) \xrightarrow{\delta} \mathcal{R} \otimes \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \to \mathcal{O}_x^q \otimes \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \to \mathcal{F}_x \otimes \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \to 0.$$

Dire que $\mathcal{F}_x$ est libre équivaut à dire que $\delta = 0$. Donc que

$$\operatorname{Tor}_1(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x) = 0.$$

6. **Faisceaux cohérents sans torsion.**

a. Soient X un espace complexe connexe, localement irréductible, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et $\mathcal{T}$ son sous-faisceau de torsion. Comme $\mathcal{T}$ est cohérent, le faisceau quotient $\mathcal{S} = \mathcal{F}/\mathcal{T}$ est aussi cohérent et sans torsion.

Proposition 9. — *Tout faisceau sur X sans torsion et de rang n est localement isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{O}^n$.*

Preuve. — Soient $x \in X$ et U un voisinage de x sur lequel $\mathcal{F}$ est engendré par un nombre fini de sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ et tel que $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{M}_{|U}$ soit isomorphe à $\mathfrak{M}_{|U}^n$. Comme $\mathcal{F}$ est sans torsion on a une injection

$$\beta : \quad \mathcal{F}_{|U} \to \mathfrak{M}_{|U}^n.$$

Soient $s_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, s_n = (0, \ldots, 0, 1)$ les sections du $\mathcal{O}^n$ sur U qui engendrent $\mathcal{O}^n$ sur $\mathcal{O}$. Envisageons $\mathcal{O}^n$ sur U comme sous-

faisceau de $\mathfrak{M}^n$. Les mêmes sections engendrent $\mathfrak{M}^n$ sur $\mathfrak{M}$. On aura donc $\beta(\sigma_i) = \sum r_{ij} s_j$ les r_{ij} étant des fonctions méromorphes sur U. Si U est convenablement choisi on peut supposer que chaque r_{ij} est le quotient de deux fonctions holomorphes sur U et l'on peut prendre pour tous les r_{ij} le même dénominateur h. L'application $\chi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ définie par $\alpha \to h\alpha$ est injective car $\mathcal{F}$ est sans torsion.

Donc l'application $\beta \circ \chi$ est aussi une injection de $\mathcal{F}_{|U}$ dans $\mathfrak{M}^n_U$ et de plus l'image de $\mathcal{F}$ par $\beta \circ \chi$ est dans $\mathcal{O}^n$.

REMARQUE 1. — Pour tout point $x \in X$ on a construit un voisinage U de x et une injection $\alpha : \mathcal{F}_U \to \mathcal{O}^n_{|U}$. En dehors d'un ensemble analytique $A_U \subsetneq U$, α est un isomorphisme.

Preuve. — En effet, avec les notations ci-dessus, la matrice (r_{ij}) est de rang n sur $\mathfrak{M}_y$, pour tout $y \in U$. Comme $h \not\equiv 0$ dans $\mathfrak{M}_y$ la matrice $(p_{ij}) = (hr_{ij})$ est aussi de rang n sur $\mathfrak{M}_y$ et $\alpha = \beta \circ \chi$ est un isomorphisme en dehors de $A_U = \{ y \in V \mid \operatorname{rang}_{\mathbf{C}_y} (p_{ij}(y)) < n \}$.

REMARQUE 2. — La topologie d'un faisceau cohérent est séparée si et seulement s'il est sans torsion.

Preuve. — La question est locale. Si $\mathcal{F}$ est sans torsion c'est un sous-faisceau de $\mathcal{O}^n$, donc il est séparé. Si $\mathcal{F}$ a de la torsion, celle-ci est concentrée sur un ensemble analytique de codimension ≥ 1, et $\mathcal{F}$ n'est pas séparé.

b. Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques cohérents. Si $\mathcal{F}$ est sans torsion et $\mathcal{G}$ localement libre, alors $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est aussi sans torsion.

Si l'on suppose seulement que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont sans torsion; il peut arriver que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ ait de la torsion ([6]). Elle sera en tout cas concentrée sur l'ensemble analytique où ni $\mathcal{F}$ ni $\mathcal{G}$ n'est localement libre.

([6]) Par exemple, soit $X = \mathbf{C}^2$ et $\mathcal{F}$ le faisceau d'idéaux engendré par les fonctions coordonnées (z_1, z_2). On a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0,$$

où

$$\beta : (\alpha_1, \alpha_2) \to \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha : \rho \to (\rho z_2, -\rho z_1).$$

En tensorisant par $\mathcal{F}$ on a la suite exacte :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{\beta'} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to 0,$$

où

$$\beta' : (\alpha_1, \alpha_2) \to \alpha_1 \otimes z_1 + \alpha_2 \otimes z_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha' : \rho \to (\rho z_2, -\rho z_1).$$

La section $s = z_2 \otimes z_1 - z_1 \otimes z_2$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ est l'image de la section $(z_2, -z_1)$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ et celle-ci a tous ses germes dans l'image de α' sauf son germe à l'origine. Donc s est non nulle à l'origine et nulle en dehors de l'origine.

Soit $\mathfrak{T}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ le sous-faisceau de torsion de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Nous désignons par $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$ le faisceau $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})/\mathfrak{T}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, obtenu en tuant la torsion de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

7. Dépendance algébrique et analytique des sections.

a. Soient X un espace localement irréductible et connexe, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X sans torsion. Soient $s_1, \ldots, s_\nu$ des sections de $\mathcal{F}$: désignons par $\mathcal{S} = \mathcal{S}(s_1, \ldots, s_\nu)$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ engendré par les sections choisies. Ce faisceau est sans torsion en tant que sous-faisceau de $\mathcal{F}$ et son rang, $r = \text{rang } \mathcal{S}$, est certainement $\leq \nu$.

Si $\mathfrak{M}$ désigne le faisceau sur X des germes des fonctions méromorphes, alors le faisceau $\mathcal{G} = \mathcal{S} \otimes \mathfrak{M}$; est un faisceau localement isomorphe à $\mathfrak{M}^r$.

Choisissons un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X tel que $\mathcal{G}_{|U_i} \approx \mathfrak{M}^r_{|U_i}$; désignons par α_{U_i} cet isomorphisme. Sur $U_i \cap U_j$ l'isomorphisme $\alpha_{U_i} \circ \alpha^{-1}_{U_j}$ est donné par une application méromorphe (7) $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbf{C})$ satisfaisant sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ aux conditions de compatibilité : $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$.

Le faisceau sans torsion $\mathcal{S}$ peut être considéré comme sous-faisceau de $\mathcal{G}$.

Chaque section s_τ est représentée sur U_i par r fonctions méromorphes

$$\alpha_{U_i}(s_\sigma) = {}^t(f^\tau_1, \ldots, f^\tau_r).$$

Si Θ_{U_i} désigne la matrice $(\alpha_{U_i}(s_1), \ldots, \alpha_{U_i}(s_\nu))$, nous avons $\Theta_{U_i} = g_{ij}\, \Theta_{U_j}$ sur $U_i \cap U_j$.

Désignons par $p^{U_i}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(s)$ le déterminant formé par les colonnes $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ de Θ_{U_i}, alors

$$p^{U_i}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(s) = \det(g_{ij})\, p^{U_j}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(s).$$

L'identité

$$\bigwedge_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\, dt^j = \sum_{\sigma_1 < \ldots < \sigma_r} p_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(a)\, dt^{\tau_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\tau_r}$$

définit les polynômes $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(a)$ comme les coordonnées homogènes du point général de la variété de Grassmann $G(\nu, r)$ représentant les sous-espaces projectifs de dimension $r - 1$ dans $P_{\nu-1}(\mathbf{C})$. Les $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(a)$ sont les coordonnées du plongement naturel de $G(\nu, r)$ dans $P_{\binom{\nu}{r}-1}(\mathbf{C})$.

Il en résulte que la donnée des ν sections $s_1, \ldots, s_\nu$ définit une application méromorphe de l'espace X dans la variété de Grassmann $G(\nu, r)$ (8).

---

(7) I. e. donnée par une matrice de fonctions méromorphes.

(8) Une application méromorphe $f : X \to Y$ de l'espace complexe X dans l'espace complexe Y est une application définie et holomorphe sur le complémentaire dans X d'un ensemble localement contenu dans un ensemble analytique de codimension ≥ 1 en chaque point et dont la fermeture du graphe dans $X \times Y$ est un ensemble analytique.

On vérifie que cette application méromorphe ne dépend pas du recouvrement $\mathfrak{U}$ ni du choix des isomorphismes α_{U_i}.

REMARQUE. — Nous avons vu (proposition 9, remarque 1) qu'on peut choisir les α_{U_i} de sorte que $\alpha_{U_i}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{O}^r_{|U_i}$ et que, en dehors d'un ensemble analytique $A_i \subsetneq U_i$, ils soient des isomorphismes. Rétrécissons le recouvrement $\mathfrak{U} = \{ U_i \}$ en $\mathfrak{U}' = \{ U'_i \}$, $U'_i \subseteqq U_i$. Si $A'_i = A_i \cap U'_i$, l'ensemble $M = \cup A_i$ est un ensemble maigre (i. e. localement contenu dans un ensemble analytique de codimension $\geqq 1$) et $\mathcal{S}_{|X-M}$ est localement libre Les fonctions g'_{ij} relatives au recouvrement $\mathfrak{U}'$ seront holomorphes en dehors de M. On remarquera également que les fonctions $p^{U_i}_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(s)$ sont holomorphes sur U_i.

b. Soit $\sigma : X \to G(\nu, r)$ l'application méromorphe définie par les sections $s_1, \ldots, s_\nu$ dans la grassmannienne $G(\nu, r)$. Soit X_σ l'ouvert partout dense dans X où σ est holomorphe. Nous dirons que les sections $s_1, \ldots, s_\nu$ sont *algébriquement dépendantes* si $\sigma(X_\sigma)$ est contenu dans une sous-variété algébrique de $G(\nu, r)$ de codimension $\geqq 1$.

Nous dirons que les sections $s_1, \ldots, s_\nu$ sont *analytiquement dépendantes* si $\sigma(X_\sigma)$ est contenu dans un sous-ensemble maigre de $G(\nu, r)$.

c. Soient $\overset{1}{x} = (\overset{1}{x}_1, \ldots \overset{1}{x}_\nu), \ldots, \overset{r}{x} = (\overset{r}{x}_1, \ldots, \overset{r}{x}_\nu)$ r suites d'indéterminées et posons

$$\bigwedge_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\nu} \overset{i}{x}_j \, dt^j = \sum_{\sigma_1 < \ldots < \sigma_r} p_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(x) \, dt^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge dt^{\sigma_r}.$$

Soit $\mathbf{C}[\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}]$ l'anneau gradué des polynômes homogènes de même degré en chaque système de variables $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}$; si $P_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}$ désignent des indéterminées et $\mathbf{C}[\ldots, P_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}, \ldots]$ l'anneau gradué des polynômes homogènes en ces indéterminées, l'application $P_{\sigma_1 \ldots \sigma_r} \to p_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(x)$ définit un homomorphisme

$$\rho : \quad \mathbf{C}[\ldots, P_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}, \ldots] \to \mathbf{C}[\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}].$$

Comme les $p_{\sigma_1 \ldots \sigma_r}(x)$ sont les coordonnées du point général de la grassmannienne $G_{\nu,r}$ l'image de ρ est un anneau $\mathfrak{A}$ isomorphe à l'anneau gradué des coordonnées sur $G_{\nu,r}$.

LEMME. — *L'anneau $\mathfrak{A}$ est le sous-anneau de $\mathbf{C}[\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}]$ des polynômes $f(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x})$ satisfaisant à la condition*

$$f(\tau(\overset{1}{x}), \ldots, \tau(\overset{r}{x})) = (\det \tau)^l f(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}),$$

ou $\tau : \overset{i}{x} \to \sum \alpha_{ik} \overset{k}{x}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}$ et ou l est le degré de f en chacune des variables $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}$.

Ce lemme est dû à HODGE [7]. Une conséquence de ce lemme est que $\mathfrak{A}$ est un anneau factoriel (9).

Soit $P(\overset{1}{x}, \ldots, \overset{r}{x}) \in \mathfrak{A}$. Par la substitution

$$\overset{j}{x} \to (f_j^1, \ldots, f_j^\nu), \tag{1}$$

il se transforme en une fonction méromorphe P_{U_i} sur U_i telle que sur $U_i \cap U_j$ on ait

$$P_{U_i} = (\det g_{ij})^k P_{U_j},$$

k étant le degré de P en chacune des variables $\overset{j}{x}$.

Dire que les sections $s_1, \ldots, s_\nu$ sont algébriquement dépendantes signifie qu'il existe un polynôme $P \in \mathfrak{A}$ non nul annulé par la substitution (1).

Si D est le diviseur de la section hyperplane sur $G(\nu, r)$ il résulte que $\mathfrak{A}$ est isomorphe à l'anneau gradué

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(G(\nu, r), \Omega(D)^k).$$

Si $\mathfrak{R}$ est le faisceau sur X localement isomorphe à $\mathfrak{M}$ et obtenu par recollement par le cocycle $\det(g_{ij})$, alors l'application σ donne un homomorphisme σ^* de

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(G(\nu, r), \Omega(D)^k) \quad \text{dans} \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathfrak{R}^k),$$

et la dépendance algébrique des sections $s_1, \ldots, s_\nu$ signifie que σ^* n'est pas injectif.

d. Soit $N = r(\nu - r)$ la dimension de la grassmannienne $G(\nu, r)$ et soit Ω^N le faisceau des germes de N-formes holomorphes sur $G(\nu, r)$. Considérons l'application (multilinéaire) :

$$j: \bigoplus_{0}^{N} \Gamma(G(\nu, r), \Omega(D)) \to \Gamma(G(\nu, r), \Omega(D)^N \otimes \Omega^N)$$

définie par

$$j: (\sigma_0, \ldots, \sigma_N) \to \sum (-1)^i \sigma_i \, d\sigma_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\sigma_i} \wedge \ldots \wedge d\sigma_N.$$

Dire que j est nulle sur $\sigma_0, \ldots, \sigma_N$ signifie que les fonctions méromorphes $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ (en supposant $\sigma_0 \not\equiv 0$) sont « *analytiquement dépendantes* ».

---

(9) *Cf.* aussi ANDREOTTI (A.) und SALMON (P.). — Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete. *Monatsh. f. Math.*, t. 61, 1957, p. 97-142.

Soit $\xi_1, \ldots, \xi_\rho, \left(\rho = \binom{r}{\nu}\right)$, une base de $\Gamma(G(\nu, r)\,\Omega(D))$, et considérons l'application méromorphe $\sigma : X \to G(\nu, r)$, définie par les fonctions méromorphes $\xi_1(x), \ldots, \xi_\rho(x)$, (c'est-à-dire les sections $\sigma^*\xi_i$ de $\mathcal{O}(\mathcal{C})$. *Dire que les sections* $s_1, \ldots, s_\nu$ *sont analytiquement dépendantes revient à dire que les formes*

$$\sum (-1)^s \xi_{i_s}(x)\, d\xi_{i_0}(x) \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_{i_s}}(x) \wedge \ldots \wedge d\xi_{i_N}(x)$$

sont identiquement nulles pour tout choix des indices $\{ i_0, \ldots, i_N \}$ *dans* $\{ 1, \ldots, \rho \}$.

e. Si au lieu d'un seul faisceau $\mathcal{F}$ on envisage un nombre fini de faisceaux $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ et dans chacun d'eux un système de sections

$$\underset{\beta}{s} = \left(\underset{\beta}{s}_1, \ldots, \underset{\beta}{s}_{\nu_\beta}\right) \qquad (1 \leq \beta \leq k),$$

on définit la dépendance algébrique et analytique de ces sections au moyen de l'application méromorphe $\sigma = \underset{1}{\sigma} \times \ldots \times \underset{k}{\sigma}$ produit des applications $\underset{\beta}{\sigma}$ dans les grassmanniennes correspondantes. Cette notion permet d'énoncer les théorèmes de dépendance algébrique et analytique qui suivent sous une forme un peu plus générale.

§ 2. ESPACES PSEUDO-CONCAVES, THÉORÈME DE FINITUDE.

8. Définitions.

a. Soient U un espace complexe, V une partie de U; on appelle *enveloppe (holomorphe)convexe* $\hat{V}_U$ de V par rapport à U l'ensemble

$$\hat{V}_U = \{ x \in U \mid |f(x)| \leq |\sup f(V)| \text{ pour tout } f \text{ holomorphe sur } U \}.$$

Soient X un espace complexe, Y un ouvert dans X, $\partial Y = \bar{Y} - Y$ la frontière de Y dans X. On dit que, au point $y_0 \in \partial Y$, Y a une *frontière pseudo-concave* s'il existe un système fondamental de voisinages $\{ U \}$ de y_0 dans X tel que y_0 soit point intérieur des ensembles $\left(\widehat{U \cap Y}\right)_U$.

Nous dirons qu'un espace X est *pseudo-concave* s'il existe un ouvert relativement compact $Y \subset\subset X$ dont la frontière soit pseudo-concave en chacun de ses points, et tel que Y rencontre chacune des composantes irréductibles de X. Tout espace compact est pseudo-concave.

b. Pour établir la pseudo-concavité de la frontière, on peut appliquer le critère suivant :

PROPOSITION 10. — *Soient* (X, x_0) *un ensemble analytique pointé contenu dans un ouvert* $U \subset \mathbf{C}^\nu$ *dont chaque composante est de dimension* $\geqq d \geqq 2$ *au point* x_0 *et* $Y \subset X$ *un ouvert de* X *tel que* $x_0 \in \partial Y$.

La frontière ∂Y *de* Y *est pseudo-concave en* x_0 *s'il existe un espace linéaire* E *de dimension* $\geqq \nu - d + 2$ *passant par* x_0 *et une fonction* φ, C^∞, *fortement pseudo-convexe sur un voisinage* V *de* x_0 *dans* E *telle que*

$$\varphi(x_0) = 0, \qquad Y \cap V = \{ x \in X \cap V \mid \varphi(x) > 0 \}.$$

Preuve. — Les composantes de l'ensemble $X \cap E$ sont toutes de dimension $\geqq 2$ au point x_0. Choisissons une fonction holomorphe f sur un voisinage $W \subset V$ de x_0 dans E telle que

$$f(x_0) = 0, \qquad \{ x \in W \mid f(x) = 0 \} \subset \{ x \in W \mid \varphi(x) > 0 \} \cup \{ x_0 \}.$$

Ceci est possible grâce au corollaire de la proposition 4. Soit B_ρ une boule de $\mathbf{C}^\nu$ de centre x_0 et rayon ρ. Supposons que $B_{\rho_0} \cap E \subset W$.

Soient $l_1(x) = 0, \ldots, l_\mu(x) = 0$ $(\mu \leqq d - 2)$ les équations de E, et $\hat{f}$ une fonction holomorphe dans B_{ρ_0} telle que $\hat{f}_{|E} = f$. Considérons l'ensemble analytique

$$R_\alpha(\rho) = \{ x \in B_\rho \cap X \mid \hat{f}(x) = \alpha_0, l_1(x) = \alpha_1, \ldots, l_\mu(x) = \alpha_\mu \}.$$

Si $\rho_1 < \rho_0$ est suffisamment petit $\overline{B}_{\rho_1} \cap X$ est de dimension $\geqq d$, en chaque point. On peut donc choisir $\varepsilon = \varepsilon(\rho_1) > 0$ tel que si $|\alpha_i| < \varepsilon(\rho_1)$ l'ensemble $R_\alpha(\rho)$ (s'il n'est pas vide) est de dimension $\geqq 1$ en chaque point et de plus $\partial R_\alpha(\rho_1) \subset Y$ pour tout $|\alpha_i| < \varepsilon(\rho_1)$.

Si $\eta > 0$ est tel que, sur $B_\eta \cap X$, $\hat{f}$, $l_1, \ldots, l_\mu$ sont en valeur absolue $< \varepsilon(\rho_1)$, alors

$$B_\eta \cap X \subset \bigcup_{|\alpha_i| < \varepsilon(\rho_1)} R_\alpha(\rho_1)$$

et pour g holomorphe sur $B_{\rho_1} \cap X$; on aura

$$\sup |g(B_\eta \cap X)| \leqq \sup_{\substack{x \in R_\alpha \\ |\alpha_i| < \varepsilon(\rho_1)}} |g(x)|.$$

Or pour $x \in R_\alpha$, et $|\alpha_i| < \varepsilon(\rho_1)$, on a, en vertu du principe du maximum,

$$|g(x)| \leqq \sup_{y \in R_\alpha} |g(y)| \leqq \sup |g(B_{\rho_1} \cap Y)|,$$

car $\partial R_\alpha \subset B_{\rho_1} \cap Y$. Donc :

$$\sup |g(B_\eta \cap X)| \leqq \sup |g(B_{\rho_1} \cap Y)|.$$

Comme ρ_1 peut être choisi arbitrairement petit, ceci prouve notre assertion.

Cette proposition ne sera pas utilisée dans la suite.

9. Lemme fondamental.

a. Faisons d'abord quelques remarques élémentaires.

Soient $P = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid |z_\alpha| \leq r_\alpha,\ 1 \leq \alpha \leq n \}$ un polycylindre fermé dans $\mathbf{C}^n$, et $S(P) = \{ z \in P \mid |z_\alpha| = r_\alpha,\ 1 \leq \alpha \leq n \}$, pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage de P on a

$$\sup |f(P)| = \sup |f(S(P))|.$$

Ce fait peut, entre autre, se démontrer de la manière suivante : d'après le principe du maximum, il existe un point z_0 sur la frontière de P tel que $|f(z_0)| = \sup |f(P)|$, si $z_0 \notin S(P)$ il existe un disque analytique D de dimension ≥ 1 passant par z_0 dont la frontière est dans $S(P)$. D'après le principe du maximum, $f_{|D}$ est constante, donc il existe un point $z_1 \in S(P)$ où $|f(z_1)| = \sup |f(P)|$.

Si (V, x_0) est un ensemble analytique pointé purement dimensionnel en x_0, on sait qu'on peut trouver un voisinage $U(x_0)$ de x_0 dans V qui peut se représenter comme un revêtement ramifié d'un ouvert G de $\mathbf{C}^n$, $n = \dim_{x_0} V$. Si $\pi : U \to G$ désigne la projection de ce revêtement et P un polycylindre fermé de centre $\pi(x_0)$ contenu dans G, l'ensemble $\pi^{-1}(P) = P^*$ s'appellera un *voisinage polycylindrique fermé* de x_0 dans V.

Soit $S(P^*) = \pi^{-1}(S(P))$. Avec le raisonnement ci-dessus on vérifie que pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage de P^*, on a

$$\sup |f(P^*)| = \sup |f(S(P^*))|.$$

Soit V' un sous-ensemble analytique de (V, x_0) passant par x_0 et de codimension ≥ 1, on peut trouver un système fondamental de voisinages polycylindriques fermés $\{ P^* \}$ de x_0 dans V, tels que $S(P^*) \cap V' = \emptyset$.

En effet, ceci est facile à montrer si V est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, autrement on se ramène à ce cas en remarquant que l'ensemble $\pi(V')$ est un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 1 dans G (en utilisant le théorème de Remmert [10]) ([10]).

b. Soient X un espace irréductible et localement irréductible, $Y \Subset X$ un ouvert relativement compact dans X à frontière pseudo-concave, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sans torsion sur X.

([10]) Sans utiliser ce théorème on peut vérifier directement que $\pi(V)'$ est contenu dans un sous-ensemble analytique de codimension 1. D'ailleurs autrement, on n'utilise qu'un cas très particulier du théorème de Remmert.

Étant donnée une section s de $\mathcal{F}$, un point $x \in X$, et un homomorphisme injectif $\alpha_U : \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{O}^n_{|U}$ (U désignant un voisinage de x) on peut représenter cette section sur U au moyen d'une fonction holomorphe $f_\alpha : U \to \mathbf{C}^n$.

Désignons par $O_{\alpha,x}(s)$ l'ordre d'annulation de la fonction f_α au point x [11].

Par définition, nous dirons que s *s'annule en* x *à un ordre* $> h$ si $h \leq \inf_\alpha O_{\alpha,x}(s)$.

Si $\mathcal{F}$ est localement libre au voisinage de x et si α_0 est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{O}^n$ au voisinage de x, l'ordre d'annulation de s au point x coïncide avec l'ordre d'annulation de la fonction f_{α_0}, c'est-à-dire $\inf_\alpha O_{\alpha,x}(s) = O_{\alpha_0,x}(s)$.

LEMME FONDAMENTAL. — *Il existe un nombre fini de points* $x_\alpha \in X$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$, *et un entier* h *tels que toute section de* $\mathcal{F}$ *qui s'annule aux points* x_α *d'ordre* $\geq h$ *est nécessairement la section nulle.*

Preuve.

α. Choisissons d'abord un recouvrement fini $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $1 \leq i \leq N$, de $\overline{Y}$ par des ouverts U_i de X tels que sur chaque U_i on ait des homomorphismes injectifs

$$\alpha_{U_i} : \quad \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{O}^n_{|U_i},$$

n étant le rang de $\mathcal{F}$. Dans chaque U_i choisissons un ensemble analytique M_i de codimension ≥ 1 tel que pour tout $x \in U_i - M_i$, $\alpha_{U_i x} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{O}^n_x$ soit un isomorphisme.

Comme X est localement compact et à base dénombrable, on peut introduire sur X une métrique. Pour chaque $x \in \overline{Y}$ désignons par $\rho(x)$ le sup des rayons des boules de centre x qui sont contenues dans quelques U_i. La fonction $\rho(x)$ est semi-continue inférieurement sur $\overline{Y}$, donc elle admet un minimum positif ρ_0.

Pour chaque $x \in \overline{Y}$, choisissons un voisinage U_x de diamètre $< \frac{1}{2}\rho_0$ et dans U_x un voisinage polycylindrique V_x de centre x, $V_x \Subset U_x$ tel que

$$(o) \qquad \left(\widehat{U_x \cap Y}\right)_{U_x} \supset V_x.$$

Finalement dans chaque V_x choisissons un voisinage polycylindrique W_x, de centre x, $W_x \Subset V_x$, tel que

$$(i) \qquad \overline{W}_x \subset \bigcap_{U_i \ni x} U_i.$$

$$(ii) \qquad S(W_x) \cap \left(\bigcup_{U_i \ni x} M_i \right) = \emptyset.$$

---

[11] C'est-à-dire le plus petit entier h tel que chaque composante de f s'annule en x à un ordre $\geq h$.

Enfin, prenons un nombre fini de points x_α, $1 \leq \alpha \leq \nu$, tels que $\cup W_{x_\alpha} \supset \overline{Y}$ et pour chaque x_α un indice $i(x_\alpha) \in \{1, \ldots, N\}$, tel que le voisinage de U_{x_α} de rayon $\frac{1}{2}\rho_0$, soit contenu relativement compact dans $U_{i(x_\alpha)}$; c'est-à-dire avec des notations évidentes

(iii) $$\overline{(U_{x_\alpha})_{\frac{1}{2}\rho_0}} \subset U_{i(x_\alpha)}.$$

β. Soit $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ étant le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur X. Les homomorphismes α_{U_i} donnent les isomorphismes $\tilde{\alpha}_{U_i} : \mathcal{G}_{|U_i} \to \mathfrak{M}^n_{|U_i}$ et sur $U_i \cap U_j$, $\tilde{\alpha}_{U_i} \circ \tilde{\alpha}_{U_j}^{-1}$ est donné par une application méromorphe

$$g_{ij} : \quad U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbf{C}).$$

Les fonctions g_{ij} seront de plus holomorphes sur l'ouvert

$$U_i \cap U_j - (U_i \cap U_j) \cap (M_i \cup M_j).$$

Nous poserons

$$g_{x_\alpha x_\beta} = g_{i(x_\alpha)\, i(x_\beta)\,|U_{x_\alpha} \cap U_{x_\beta}}.$$

Pour une matrice $A = (a_{is})$ à éléments complexes introduisons la norme

$$\| A \| = \max_r \sum_{s=1}^{n} | a_{rs} |.$$

Si $\overline{W}_{x_\beta} \subset U_i$ la condition (ii) entraîne que la fonction $g_{ii(x_\beta)}$ sera définie et holomorphe sur $S(W_{x_\beta})$. Nous poserons

$$\| g \| = \sup_{U_i \supset W_{x_\beta}} \sup_{s(W_{x_\beta})} \| g_{ii(x_\beta)} \|.$$

Si $i = i(x_\beta)$, $g_{ii(x_\beta)} = 1$, donc, $1 \leq \| g \| < \infty$.

γ. Soit s une section de $\mathcal{F}$. Représentons s sur chaque U_i au moyen des α_{U_i} comme fonction holomorphe $s_i : U_i \to \mathbf{C}^n$, et posons

$$\| s \|_V = \sup_\alpha \| s_{i(x_\alpha)}(V_{x_\alpha}) \|,$$

$$\| s \|_W = \sup_\alpha \| s_{i(x_\alpha)}(W_{x_\alpha}) \|.$$

Supposons que s s'annule aux points x_α à un ordre $\geq l$. Alors les fonctions $s_{i(x_\alpha)}$ s'annulent également à un ordre $\geq l$ aux points x_α $1 \leq \alpha \leq \nu$. Du lemme de Schwarz on déduit qu'il existe une constante q, $0 < q < 1$ telle que :

(1) $$\| s \|_W \leq q^l \| s \|_V.$$

Démontrons qu'on a aussi une inégalité du type

$$\| s \|_{\mathscr{V}} \leq c \| s \|_{\mathscr{W}},$$

ou c est une constante > 0, indépendante de l. Pour chaque x_α envisageons la fonction $s_{i(x_\alpha)}$ sur l'ensemble $\overline{U_{x_\alpha} \cap Y}$. Soit y_0 un point de $\partial (U_{x_\alpha} \cap Y)$ tel que

$$\sup \| s_{i(x_\alpha)}(U_{x_\alpha} \cap Y) \| = \| s_{i(x_\alpha)}(y_0) \| .$$

D'après la condition (iii), il existe un ouvert $W_{x_\beta} \ni y_0$, tel que $U_{i(x_\alpha)} \supset \overline{W}_{x_\beta}$, on a donc

$$s_{i(x_\alpha)} = g_{i(x_\alpha) i(x_\beta)} s_{i(x_\beta)}$$

et le deuxième membre, comme il est égal à $s_{i(x_\alpha)}$, est holomorphe sur $\overline{W}_{x_\beta}$. Donc

$$\sup_{x \in S(W_{x_\beta})} | s_{i(x_\alpha)}(x) | \leq \| g \| . \| s \|_{\mathscr{W}} .$$

et en utilisant la propriété de $S(W_{x_\beta})$ on aura, pour tout $x \in W_{x_\beta}$,

$$| s_{i(x_\alpha)}(x) | \leq \| g \| . \| s \|_{\mathscr{W}} .$$

En particulier pour $x = y_0$ on obtient

$$\| s_{i(x_\alpha)}(y_0) \| \leq \| g \| . \| s \|_{\mathscr{W}} .$$

Finalement, à cause de la condition (o) on déduit l'inégalité

$$\| s \|_{\mathscr{V}} \leq \| g \| . \| s \|_{\mathscr{W}} . \tag{2}$$

δ. Des inégalités (1) et (2) on tire :

$$\| s \|_{\mathscr{W}} \leq q^l \| g \| . \| s \|_{\mathscr{W}} .$$

Donc si $l > (\log q^{-1}) \log \| g \|$, on aura $\| s \|_{\mathscr{W}} = 0$. Comme $\mathscr{F}$ est sans torsion et X est irréductible, l'annulation de la section s sur Y entraîne son annulation sur tout X.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — Un recouvrement $\mathfrak{V} = \{ W_{x_\alpha} \}$, comme on l'a défini au point (α) de cette démonstration, s'appellera un *recouvrement* (de Y) *bien adapté au faisceau* $\mathscr{F}$. Le nombre $\| g \|$, défini en (β), s'appellera la *norme du cocycle structural du faisceau* $\mathscr{G} = \mathscr{F} \otimes \mathfrak{M}$ par rapport à $\mathfrak{V}$. On vient de démontrer que l'entier h de l'énoncé du lemme peut être choisi égal à $\{ c_{\mathfrak{V}} \log \| g \| \} + 1$ [12], où $c_{\mathfrak{V}}$ est une constante > 0, qui ne dépend que de $\mathfrak{V}$.

---

[12] On note par $\{ x \}$ le plus grand entier ≥ 0 inférieur ou égal à x.

REMARQUE 2. — On a construit les ouverts W_x en considérant chaque ouvert V_x comme un revêtement ramifié d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ et en prenant pour W l'image réciproque d'un polycylindre P relativement compact contenu dans U. Il n'est pas nécessaire de prendre le centre de P sur la projection de x. Il suffirait de substituer au point x, dans la démonstration ci-dessus, l'image réciproque du centre de P.

On peut donc supposer dans le lemme fondamental que les points x_α sont des points non singuliers de X (en dehors de l'ensemble de ramifications des V correspondants).

10. **Le théorème de finitude.**

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sans torsion sur un espace analytique X localement irréductible et pseudo-concave. Alors la dimension de l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des sections de $\mathcal{F}$ est finie* $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{F}) < \infty$.

Preuve. — Il suffit de le démontrer lorsque X est irréductible. Avec les notations du lemme fondamental, h étant l'entier déterminé dans le lemme, définissons un homomorphisme

$$\sigma : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \left(\bigoplus_1^n \mathcal{O}_{x_1}/\mathfrak{m}_{x_1}^h\right) \oplus \ldots \oplus \left(\bigoplus_1^n \mathcal{O}_{x_\nu}/\mathfrak{m}_{x_\nu}^h\right),$$

(les $\mathfrak{m}_{x_\alpha}$ étant les idéaux maximaux des anneaux locaux $\mathcal{O}_{x_\alpha}$) de la manière suivante : à chaque section $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ on associe comme projection sur $\bigoplus_1^n \mathcal{O}_{x_\alpha}/\mathfrak{m}_{x_\alpha}^h$ l'image de la fonction $s_{i(x_\alpha)}$, par l'application naturelle $\mathcal{O}_{x_\alpha} \to \bigoplus_1^n \mathcal{O}_{x_\alpha}/\mathfrak{m}_{x_\alpha}^h$. Le lemme fondamental nous dit que $\sigma(s) = 0$ implique $s = 0$. Donc σ est injectif, comme l'espace vectoriel des images est de dimension finie on a la conclusion énoncée.

COROLLAIRE. — *Étant donné un recouvrement sur X bien adapté au faisceau $\mathcal{F}$, si x_α, $1 \leq \alpha \leq \nu$, sont les « centres » des ouverts du recouvrement et $\| g \|$ la norme du cocycle structural de $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{N} = \mathcal{G}$ par rapport à ce recouvrement, la démonstration précédente nous donne la limitation*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(X, \mathcal{F}) \leq \operatorname{rang} \mathcal{F} \sum_\alpha \chi_{x_\alpha}(\{c \log \| g \|\} + 1),$$

où χ_{x_α} sont les fonctions de Hilbert aux points x_α et ou c est une constante > 0 qui ne dépend que du choix du recouvrement.

11. **Formules de postulation.** — Soit X un espace localement irréductible et pseudo-concave. Soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_h$ des faisceaux analytiques cohérents sans torsion. Envisageons le faisceau

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^{l_1} \tilde{\otimes} \mathcal{F}_2^{l_2} \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathcal{F}_h^{l_h},$$

où nous avons écrit $\mathcal{F}_\nu^{l_\nu}$ pour $\mathcal{F}_\nu \tilde{\otimes} \mathcal{F}_\nu \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathcal{F}_\nu$, l_ν fois. Rappellons que les $\sim$ sur les signes de produit tensoriel indiquent qu'on a fait d'abord le produit tensoriel et qu'on a éliminé ensuite la torsion qui a pu éventuellement se produire.

Choisissons un recouvrement de la fermeture d'une partie $Y \subset X$ à bord pseudo-concave, bien adapté à la fois aux faisceaux $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_h$. Le recouvrement sera aussi bien adapté au faisceau $\mathcal{F}$ pour tout choix des entiers $l_1, \ldots, l_h$. Si n_ν est le rang du faisceau $\mathcal{F}_\nu$ le rang de $\mathcal{F}$ sera $\prod n_\nu^{l_\nu}$.

Si $\{ g_{ij}^{(\nu)} \}$ sont les cocycles structuraux des faisceaux $\mathcal{F}_\nu \otimes \mathfrak{M}$ celui de $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{M}$ est donné par $g_{ij} = g_{ij}^{(1)l_1} \otimes \ldots \otimes g_{ij}^{(h)l_h}$, où $g_{ij}^{(\nu)l_\nu}$ signifie le produit tensoriel $g_{ij}^{(\nu)} \otimes \ldots \otimes g_{ij}^{(\nu)}$, l_ν fois. En passant aux normes on vérifie que

$$\| g \| \leq \| g^{(1)} \|^{l_1} \ldots \| g^{(h)} \|^{l_h}.$$

Du corollaire du théorème de finitude, on obtient la

PROPOSITION 11. — *Pour la dimension $l(\mathcal{F})$ de l'espace des sections d'un faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^{l_1} \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathcal{F}_h^{l_h}$ on a une majoration*

$$l(\mathcal{F}) \leq \prod_{\nu=1}^{h} n_\nu^{l_\nu} \cdot \sum_\alpha \chi_{x_\alpha}(c_1 l_1 + \ldots + c_h l_h + c_0),$$

où les constantes c_i sont ≥ 0. On peut donc majorer $l(\mathcal{F})$ par une expression du type $\prod n_\nu^{l_\nu}$ (polynôme en $\sum c_\nu l_\nu$ de degré $= \dim_{\mathbf{C}} X$).

Par exemple, si $\mathcal{F}_\nu = \Omega(\{ D_\nu \})$ est le faisceau des germes de sections holomorphes d'un fibré associé au diviseur D_ν, la proposition 11 nous dit que la dimension du système linéaire $| l_1 D_1 + \ldots + l_h D_h |$ est majorée par un polynôme en $l_1, \ldots, l_h$ de degré $= \dim_{\mathbf{C}} X$.

§ 3. THÉORÈMES DE DÉPENDANCE ALGÉBRIQUE.

12. Soient X un espace localement irréductible et pseudo-concave, $\mathcal{F}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq r$ et $\mathcal{F}$ des faisceaux analytiques sur X cohérents et sans torsion et,

$$s_\alpha = (s_\alpha^1, \ldots, s_\alpha^{\nu_\alpha}), \qquad s = (s^1, \ldots, s^\nu)$$

un système de sections pour chacun de ces faisceaux.

Nous supposerons $\nu_\alpha \geq n_\alpha = \operatorname{rang} \mathcal{F}_\alpha$, $\nu \geq n = \operatorname{rang} \mathcal{F}$.

THÉORÈME 2. — *Si les sections* s_α, $1 \leq \alpha \leq r$, *sont analytiquement indépendantes mais si les sections s dépendent analytiquement des sections* s_α, *alors il y a une dépendance algébrique entre les sections s et les sections* s_α, $1 \leq \alpha \leq r$.

Preuve. — Reprenons les notations du lemme fondamental en supposant comme permis, X irréductible.

Choisissons le recouvrement fini $\mathfrak{U} = \{ U_i \}$ de $\overline{Y}$, de sorte que sur chaque U_i les faisceaux envisagés puissent être considérés comme sous-faisceaux de faisceaux libres de même rang.

Sur chaque U_i les sections s_α et s se représentent par des vecteurs holomorphes. Calculons sur chaque U_i les composantes $p_{i_1 \dots i_{n_\alpha}}(s_\alpha)$, $p_{i_1 \dots i_n}(s)$ des vecteurs grassmanniens correspondants (*cf.* n° 7); nous désignerons par $g^\alpha_{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \binom{\nu_\alpha}{n_\alpha} - 1$, $g_{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \binom{\nu}{n} - 1$, ces composantes. Comme les sections s_α sont analytiquement indépendantes, aucune des fonctions $g^\alpha_{i\sigma}$ n'est identiquement nulle. De même, on peut supposer que les fonctions $g_{i\sigma}$ sont non identiquement nulles car, autrement, le théorème est immédiat.

Les fonctions $f^\alpha_\sigma = (g^\alpha_{i0})^{-1}\, g^\alpha_{i\sigma}$ et $f_\sigma = (g_{i0})^{-1}\, g_{i\sigma}$ sont des fonctions méromorphes globales sur tout Y.

Sans perte de généralité on peut encore supposer que les points x_ν du lemme fondamental ont été choisis tels que :

(i) les x_ν sont des points non singuliers de X;

(ii) les fonctions f^α_σ, f_σ sont holomorphes aux points x_ν;

(iii) parmi les fonctions f^α_σ il y en a l, $\xi^1, \dots, \xi^l$, $l = \sum n_\alpha (\nu_\alpha - n_\alpha)$, qui sont analytiquement indépendantes en chaque point x_ν;

(iv) au voisinage de chaque point x_ν on a

$$d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^l \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_\mu \not\equiv 0,$$
$$d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^l \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_\mu \wedge df_{\mu+\lambda} \equiv 0, \qquad (\lambda > 0).$$

Il suffit pour cela de prendre les points x_ν en dehors d'un nombre fini de sous-ensembles analytiques en utilisant la remarque 2 au lemme fondamental.

Il découle de ces conditions que les fonctions méromorphes $\xi^1, \dots, \xi^l$, $f_1, \dots, f_\mu$ peuvent être choisies en chaque point x_ν parmi un système de coordonnées locales $z^1_\nu, \dots, z^d_\nu$, $d = \dim_{\mathbf{C}} X$, $z^1_\nu = \xi^1, \dots, z^{l+\mu}_\nu = f_\mu$. Il en résulte qu'au voisinage de chaque point x_ν les fonctions $f_{\mu+\lambda}$ $(\lambda > 0)$ sont des fonctions holomorphes des seules variables $z^1_\nu, \dots, z^{l+\mu}_\nu$.

Prenons des systèmes d'indéterminées X^σ_α, $0 \leq \sigma \leq n_\alpha (\nu_\alpha - n_\alpha) = \mu_\alpha$ et X^ρ, $0 \leq \rho \leq \mu + 1$. Soit $P(X_\alpha, X)$ un polynôme homogène en

chaque système de ces indéterminées et de degré τ en chacun de ces systèmes; l'ensemble de ces polynômes forme un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension

$$N(\tau) = \binom{\tau+\mu+1}{\mu+1} \prod_{\alpha=1}^{r} \binom{\tau+\mu_\alpha}{\mu_\alpha} = N_0 \tau^{\sum \mu_\alpha + \mu + 1} + \dots,$$

où

$$N_0 = \frac{1}{(\mu+1)!} \prod_{\alpha=1}^{r} \frac{1}{\mu_\alpha!} > 0.$$

Par la substitution $X_\alpha^\sigma \to g_{i\sigma}^\alpha$, $X^\rho \to g_{i\rho}$ nous obtenons

$$P(\dots, g_{i0}^\alpha, \dots, g_{i\mu_\alpha}^\alpha, \dots, g_{i0}, \dots, g_{i\mu+1}) = (g_{i0})^\tau \left\{ \prod (g_{i0}^\alpha)^\tau \right\} P'(\xi^1, \dots, \xi^l, f_1, \dots, f_1, \dots, f_{\mu+1}),$$

où P' est le polynôme qu'on obtient à partir de P en posant $X_\alpha^0 = 1$, $X^0 = 1$.

Les conditions pour P' de s'annuler à un ordre $\geqq h$ au point x_ν sont au nombre de

$$\delta_{x_\nu}(h) = \binom{l+\mu+h}{l+\mu}.$$

En effet c'est le nombre des conditions linéairement indépendantes qu'il faut imposer à une fonction holomorphe en $l+\mu$ variable pour qu'elle s'annule à un ordre $\geqq h$ au voisinage d'un point non singulier x_ν.

Alors P s'annule aussi en x_ν d'ordre $\geqq h$. D'ailleurs, après la substitution envisagée, P représente une section d'un faisceau cohérent de rang 1 sans torsion. En effet, au moyen des homomorphismes injectifs $\alpha_{U_i} : f_{|U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}^n$ on construit le cocycle méromorphe

$$\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbf{C})$$

comme au n° 7. Soit $\mathcal{G}$ le faisceau obtenu par recollement des faisceaux $\overline{\mathcal{M}}_{|U_i}$ au moyen du cocycle $\{\det \gamma_{ij}\}$. Les expressions $p_{i,\dots,i_n}(s)$ représentent des sections de $\mathcal{G}$ qui dans chaque représentation locale $\mathcal{G} \approx \mathcal{M}_{|U_i}$ sont holomorphes. Ces sections engendrent donc sur $\mathcal{O}$ un faisceau analytique cohérent Φ pour lequel le recouvrement $\mathfrak{U}$ choisi pour appliquer le lemme fondamental sera bien adapté. Le même raisonnement pour les faisceaux $\mathcal{F}_\alpha$ nous donne des faisceaux Φ_α. Ce qu'on obtient en définitive pour P (... g ...) est une section du faisceau $\Phi^\tau \tilde{\otimes} \Phi_1^\tau \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} \Phi_r^\tau$, $\Phi^\tau = \Phi(\tilde{\otimes}) \dots \tilde{\otimes} \Phi$, τ fois, etc.

D'ailleurs le lemme fondamental nous dit que la dimension de l'espace des sections $P(\ldots g \ldots)$ envisagées est majoré par un polynôme du type

$$\sum_{\nu} \delta_{x_\nu}(c\tau + b) = B_0 \tau^{\sum \mu_\alpha + \mu} + \ldots .$$

En effet il suffit de remarquer que dans le raisonnement qui donne la proposition 11 on peut remplacer, pour le cas qui nous intéresse ici, la fonction de Hilbert χ_{x_ν} par la fonction δ_{x_ν}.

Il suffit donc de prendre τ suffisamment grand pour qu'il existe un polynôme P non identiquement nul, qui s'annule identiquement après la substitution des fonctions g.

Or dans le corps des fonctions rationnelles sur le produit de grassmanniennes $G(\nu, r) \times G(\nu_1, n_1) \times \ldots \times G(\nu_r, n_r)$, les fonctions $\frac{X_\alpha^i}{X_\alpha^0}$, $1 \leq i \leq \mu_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq r$ et $\frac{X^j}{X^0}$, $1 \leq j \leq \mu + 1$, peuvent être supposées algébriquement indépendantes ([13]). Ceci démontre que la relation obtenue n'est pas banale.

13. Soient X un espace localement irréductible et pseudo-concave, $Y \subset\subset X$ un ouvert à frontière pseudo-concave, $\mathcal{F}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq r$, des faisceaux analytiques cohérents sans torsion dans lesquels on a choisi des systèmes de sections analytiquement indépendantes

$$s_\alpha = (s_\alpha^1, \ldots, s_\alpha^{\nu_\alpha}), \qquad \nu_\alpha \geq n_\alpha = \operatorname{rang}(\mathcal{F}_\alpha).$$

THÉORÈME 3. — *On peut choisir un recouvrement fini* $\mathfrak{W} = \{W_i\}$ *de* $\overline{Y}$ *bien adapté aux faisceaux* $\mathcal{F}_\alpha$ *(dépendant aussi des sections* s_α*) tel que pour tout faisceau cohérent sans torsion* $\mathcal{F}$ *sur* X *de rang* 1 *pour lequel* $\mathfrak{W}$ *est encore bien adapté, tout couple de sections* $s = (s^1, s^2)$ *de* $\mathcal{F}$ *dépendant algébriquement des sections* s_α*, satisfait à une équation polynomiale de degré borné* ([14]).

([13]) Si l'on a une variété algébrique V de dimension d, irréductible dans un espace projectif de dimension r, P_r (**C**), et si l'on choisit les coordonnées z_i dans P_r de sorte que chacun des espaces projectifs $z_{i_0} = z_{i_1} = \ldots = z_{i_d} = 0$ (de dimension $r - d - 1$) ne rencontrent pas V_d, alors les fonctions rationnelles $\frac{z_{i_1}}{z_{i_0}}, \ldots, \frac{z_{i_d}}{z_{i_0}}$ sur V_d sont algébriquement indépendantes pour tout choix des indices $\{i_0, \ldots i_d\} \subset \{0, \ldots, r\}$.

Quitte à remplacer au commencement de la démonstration les $p_{i_0 \ldots i_n}$ par des combinaisons linéaires convenables, on peut supposer cette condition remplie.

([14]) C'est-à-dire ce degré dépend seulement de $\mathcal{F}_\alpha$, s_α et de $\mathfrak{W}$.

Preuve. — Avec les notations de la démonstration du théorème 2 on voit qu'on peut choisir un recouvrement fini $\mathfrak{V} = \{ W_i \}$ de $\overline{Y}$ bien adapté aux faisceaux $\mathcal{F}_\alpha$ de sorte que :

(i) les points x_ν correspondants du lemme fondamental soient des points non singuliers de X.

(ii) les fonctions f_σ^α soient holomorphes aux points x_ν ;

(iii) parmi les fonctions f_σ^α il y en a l, $\xi_\nu^1, \ldots, \xi_\nu^l$, $\left(l = \sum n_\alpha (\nu_\alpha - n_\alpha) \right)$ qui sont analytiquement indépendantes en chaque point x_ν.

Supposons $s^1 \not\equiv 0$ et posons $f = \dfrac{s^2}{s^1}$, au voisinage de chaque point x_ν on aura

$$d\xi_\nu^1 \wedge \ldots \wedge d\xi_\nu^l \wedge df \equiv 0$$

(où f est holomorphe).

Soient $\xi^1, \ldots, \xi^l, \eta_\nu^1, \ldots, \eta_\nu^{d-l}$, ou $d = \dim_{\mathbf{C}} X$, un système de coordonnées locales en x_ν. La condition précédente se traduit dans les conditions

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\nu^\beta} f = 0, \qquad 1 \leq \beta \leq d - l.$$

Démontrons que f peut s'écrire au voisinage de x comme quotient de deux fonctions holomorphes en les variables ξ seulement; pour cela, utilisons le lemme suivant :

LEMME. — *Si $y = y(x, t)$ est une fonction des variables $x, t_1, \ldots, t_n$, holomorphe au voisinage de l'origine $(x, t) = (0, 0)$ de $\mathbf{C}^{n+1}$ satisfaisant à une équation différentielle du type*

$$\frac{dy}{dx} - \alpha(x, t)\, y = 0,$$

ou $\alpha(x, t)$ est holomorphe au voisinage de l'origine. Alors $y(x, t)$ peut s'écrire sous la forme

$$y(x, t) = y_0(t)\, u(x, t),$$

ou $y_0(t) = y(0, t)$ et ou $u(x, t)$ est une unité au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, ne dépendant que de $\alpha(x, t)$.

Preuve du lemme. — Soit $y(x, t) = y_0(t) + y_1(t)\, x + y_2(t)\, x^2 + \ldots$, $\alpha(x, t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\, x + \alpha_2(t)\, x^2 + \ldots$. D'après l'hypothèse, on a une identité :

$$y_1 + 2y_2 x + \ldots = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots)(y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots).$$

Donc

$$y_1 = \alpha_0 y_0, \qquad 2y_2 = \alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_0, \qquad \text{d'où} \qquad y_2 = \frac{1}{2}(\alpha_0^2 + \alpha_1) y_0, \ \ldots.$$

Par conséquent,

$$y(x, t) = y_0(t)\left\{1 + \alpha_0(t)\, x + \frac{1}{2}(\alpha_0(t)^2 + \alpha_1(t))\, x^2 + \ldots\right\}.$$

Le lemme étant établi, écrivons $f = \dfrac{\sigma_\nu^2}{\sigma_{*\nu}^1}$ avec σ_ν^2 et σ_ν^1 holomorphes et sans facteurs communs au point x_ν.

On aura au voisinage de x_ν, $s^1 = c_\nu \sigma_\nu^1$, $s^2 = c_\nu \sigma_\nu^2$ avec c_ν holomorphe au voisinage de x_ν. Pour tout $\eta = \eta_\nu^\beta$ on a, dans un voisinage de x.

$$\sigma_\nu^1 \frac{d\sigma_\nu^2}{d\eta} - \sigma_\nu^2 \frac{d\sigma_\nu^1}{d\eta} = 0.$$

Donc σ_ν^1 divise $\dfrac{d\sigma_\nu^1}{d\eta}$, c'est-à-dire $\dfrac{d\sigma_\nu^1}{d\eta} = \alpha_\nu \sigma_\nu^2$. Par conséquent aussi $\dfrac{d\sigma_\nu^2}{d\eta} = \alpha_\nu \sigma_\nu^2$. En vertu du lemme on peut alors écrire f au voisinage de x_ν comme quotient de deux fonctions holomorphes ne dépendant pas de η. Ainsi, de proche en proche, on élimine toutes les variables η_ν^β.

Soit donc $s^1 = c_\nu \sigma_\nu^1(\xi)$, $s^2 = c_\nu \sigma_\nu^2(\xi)$ avec les σ holomorphes en ξ au voisinage de x_ν.

Soit $P(X_\alpha, X)$ un polynôme homogène en chaque système d'indéterminées X_α^j, $0 \leq j \leq \mu_\alpha = n_\alpha(\nu_\alpha - n_\alpha)$; et $X = (X^0, X^1)$, de degré τ en X_α, $1 \leq \alpha \leq r$, et de degré t en X. L'ensemble de ces polynômes forme un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension

$$N(t, \tau) = (t+1)\prod_{\alpha=1}^{r}\binom{\tau + \mu_\alpha}{\mu_\alpha} = (t+1)\left\{N_0 \tau^{\sum \mu_\alpha} + \ldots\right\} \qquad (N_0 > 0).$$

Par la substitution $X_\alpha^\sigma \to g_{\nu\sigma}^\alpha$, $X^0 \to s^1$, $X^1 \to s^2$ on obtient

$$P(\ldots, g_{\nu\sigma}^\alpha, \ldots, s^1, s^2) = c_\nu^t \left(\prod g_{\nu\sigma}^\alpha\right)^\tau P'(\xi^1, \ldots \xi^l, \sigma_\nu^1, \sigma_\nu^2),$$

où P' est le polynôme obtenu à partir de P en posant $X_\alpha^0 = 1$. Les conditions pour P' de s'annuler en x_ν à un ordre $\geq h$ sont au nombre de

$$\delta_{x_\nu}(h) = \binom{l+h}{l}.$$

Comme dans la démonstration précédente, on voit que les $P(\ldots, g^\alpha{}_\sigma, \ldots, s^1, s^2)$ représentent des sections d'un faisceau cohérent

sans torsion dont la dimension de l'espace vectoriel de toutes les sections est majorée par une expression du type

$$\sum \delta_{x_\nu}(a\tau + bt + c) = B_0(a\tau + bt)^l + \dots.$$

Choisissons t tel que

$$(t+1)N_0 > B_0 a^l,$$

en prenant τ suffisamment grand on obtient alors l'inégalité

$$\sum \delta_{x_\nu}(a\tau + bt + c) < N(t, \tau),$$

de laquelle on déduit la conclusion, comme au théorème précédent.

§ 4. FONCTIONS MÉROMORPHES SUR LES ESPACES PSEUDO-CONCAVES.

14. Le corps des fonctions méromorphes sur les espaces pseudo-concaves irréductibles.

a. Soit X un espace complexe localement irréductible et irréductible. Toute fonction méromorphe f sur X peut s'écrire comme quotient de deux sections d'un faisceau analytique cohérent sans torsion sur X.

En effet, tout sous-faisceau de type fini sur $\mathcal{O}$ du faisceau $\mathcal{M}$ des germes de fonctions méromorphes est un faisceau analytique cohérent de rang 1 sans torsion. En particulier f est le quotient des deux sections f et 1 de $\mathcal{M}$ et le faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{O}(1, f)$ est cohérent de rang 1 sans torsion.

Nous dirons que les sections méromorphes $f_1, \dots, f_s$ sur X sont *analytiquement dépendantes* si aux points non singuliers de X où les fonctions données sont holomorphes on a $df_1 \wedge \dots \wedge df_s \equiv 0$.

Si l'on représente chaque f_i comme quotient de deux sections d'un faisceau cohérent sans torsion de rang 1, la dépendance analytique des f_i équivaut à la dépendance analytique des sections envisagées.

De la même manière, les fonctions $f_1, \dots, f_s$ sont dites *algébriquement dépendantes* s'il existe un polynôme $P(X_1, \dots, X_s)$ non nul tel que $P(f_1, \dots, f_n) \equiv 0$. La dépendance algébrique des fonctions f_i équivaut à celle des sections correspondantes définies tout à l'heure. Le théorème 2 nous donne comme conséquence le théorème suivant.

THÉORÈME 4. — *Si X est un espace localement irréductible, irréductible et pseudo-concave et si les fonctions méromorphes $f_1, \dots, f_s$ sont analytiquement dépendantes elles sont aussi algébriquement dépendantes.*

En particulier, le corps des fonctions méromorphes sur X a un degré de transcendence $\leq \dim_{\mathbb{C}} X$.

b. Soient X un espace localement irréductible et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent de rang 1 sur X, sans torsion. Le faisceau $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}$ est localement isomorphe à $\mathcal{M}$ et l'on a une injection naturelle $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Choisissons un recouvrement $\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ de X tel que :

(i) sur chaque U_i on ait des isomorphismes $\alpha_i : \mathcal{G}_{| U_i} \to \mathcal{M}_{| U_i}$;
(ii) pour tout $i \in I$, $\operatorname{Im}(\alpha \circ \alpha_i) \subset \mathcal{O}_{| U_i}$.

Nous conviendrons d'appeler *holomorphe* une section s de $\mathcal{G}$ si pour tout choix du recouvrement $\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ et des isomorphismes α_i satisfaisant aux conditions précédentes, $\alpha_i(s)$ est une fonction holomorphe sur U_i.

Toute section de $\mathcal{F}$, considéré comme sous-faisceau de $\mathcal{G}$, est une section holomorphe. Si $\mathcal{F}$ est localement libre, les sections holomorphes de $\mathcal{G}$ coïncident avec celles de $\mathcal{F}$.

Envisageons l'anneau gradué $\mathfrak{A} = \bigcup_0^\infty (X, \mathcal{F}^h)$ où $\mathcal{F}^h$ est le produit tensoriel de h copies de $\mathcal{F}$ privé de la torsion.

Nous dirons qu'une section g de $\mathcal{G}$ est *intègre* sur $\mathfrak{A}$ si elle satisfait à une équation du type

$$g^\nu + a_1 g^{\nu-1} + \ldots + a_\nu = 0,$$

où $a_i \in \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$.

PROPOSITION 12. — *Si l'espace X est normal, toute section g de $\mathcal{G}$ intègre sur $\mathfrak{A}$ est une section holomorphe de $\mathcal{G}$.*

Preuve. — En effet pour tout choix de $\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ et des α_i satisfaisant aux conditions énoncées tout à l'heure, $\alpha_i(g)$ est une fonction méromorphe sur U_i, intègre sur l'anneau des fonctions holomorphes sur U_i. Comme X est normal, $\alpha_i(g)$ est une fonction holomorphe sur U_i.

COROLLAIRE. — *Si $\mathcal{F}$ est localement libre et X normal irréductible, l'anneau $\mathfrak{A}$ est intégralement clos.*

THÉORÈME 5. — *Soit X un espace normal irréductible et pseudo-concave. Le corps des fonctions méromorphes sur X est isomorphe à une extension algébrique simple d'un corps de fonctions rationnelles en d indéterminées ($d \leq \dim_{\mathbf{C}} X$).*

Preuve. — Choisissons un nombre maximal d de fonctions méromorphes sur X analytiquement indépendantes, $f_1, \ldots, f_d$. Nous savons déjà que $d \leq \dim_{\mathbf{C}} X$. Pour chaque fonctions f_α choisissons un faisceau cohérent $\mathcal{F}_\alpha$ de rang 1, sans torsion tel que f_α soit égale au quotient de deux sections s_α^1, s_α^0 de $\mathcal{F}_\alpha$.

Soient $Y \Subset X$ un ouvert à frontière pseudo-concave dans X et $\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ un recouvrement de $\overline{Y}$ adapté aux faisceaux $\mathcal{F}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq d$.

Toute autre fonction méromorphe h sur X satisfait à une équation algébrique du type :

$$G_0(f)h^\nu + G_1(f)h^{\nu-1} + \ldots + G_\nu(f) = 0,$$

où les G_l sont des polynômes en $f_1, \ldots, f_d$ et où $G_0(f)$ n'est pas identiquement nul.

Soit N la borne supérieure des degrés en chacune des variables, des polynômes G_l. Posons $R = \left(\prod_{\alpha=1}^{d} s_\alpha^0 \right)^N$. C'est une section du faisceau $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mathcal{F}_d)^N$. Multiplions l'équation précédente par $R^\nu G_0^{\nu-1}$. On obtient l'équation :

$$(RG_0h)^\nu + RG_1(RG_0h)^{\nu-1} + RG_0RG_2(RG_0h)^{\nu-2} + \ldots + R^{\nu-1}G_0^{\nu-1}RG_\nu = 0.$$

Par construction, chaque produit RG_ν est une section de $\mathcal{F}$ de sorte que si l'on pose $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes \mathfrak{M}$, $RG_0\,h$ est une section de $\mathcal{G}$ intègre sur l'anneau $\mathfrak{a} = \bigcup \Gamma(X, \mathcal{F}^h)$.

Il en découle que $RG_0\,h$ est une section holomorphe de $\mathcal{G}$, et que $h = (RG_0)^{-1}(RG_0\,h)$ est le quotient de deux sections holomorphes de $\mathcal{G}$. En particulier, h peut être représentée comme quotient de deux sections d'un faisceau analytique cohérent de rang 1 sans torsion pour lequel le recouvrement $\mathfrak{U}$ est bien adapté.

En vertu du théorème 3 on peut dire que toute fonction méromorphe h sur X satisfait à une équation algébrique sur $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_d)$ dont le degré en h est borné par une constante ne dépendant pas de h.

Choisissons une fonction méromorphe h telle que le degré $[\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_d, h) : \mathbf{C}(f_1, \ldots, f_d)] = n$ soit maximal. Alors toute autre fonction méromorphe g sur X est contenue dans $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_d, h)$. Ce qui démontre le théorème.

c. Soient X un espace normal irréductible pseudo-concave, $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang 1, $\mathfrak{a}(\mathcal{F}) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{F}^h)$ l'anneau gradué associé. Comme X est irréductible, $\mathfrak{a}(\mathcal{F})$ est un anneau d'intégrité dont on peut considérer le corps $\mathfrak{Q}(\mathcal{F})$ des fractions. Le corps $\mathfrak{Q}(\mathcal{F})$ est un sous-corps du corps de toutes les fonctions méromorphes sur X

donc son degré de transcendance est $\leq \dim_{\mathbf{C}} X$ et l'anneau $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ est intégralement clos dans $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$.

Soit h une fonction méromorphe sur X algébrique sur $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$. Du raisonnement développé dans la démonstration précédente il suit que h peut s'écrire comme quotient de deux sections d'une puissance tensorielle convenable de $\mathcal{F}$. Donc $h \in \mathfrak{L}(\mathcal{F})$, i. e. $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ est algébriquement fermé dans le corps de toutes les fonctions méromorphes sur X. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 13. — *Sur un espace normal réductible pseudo-concave on peut pour tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ de rang 1 envisager l'anneau gradué* $\mathfrak{A}(\mathcal{F}) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{F}^h)$ *et son corps de fractions* $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$

L'anneau $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ est intégralement clos dans $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$. Le corps $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ est isomorphe à un corps de fonctions algébriques en d variables ($d \leq \dim_{\mathbf{C}} X$) et il est algébriquement clos dans le corps de toutes les fonctions méromorphes sur X.

En particulier, si le degré de transcendance de $\mathfrak{L}(\mathcal{F})$ est égal à la dimension complexe de X, toute fonction méromorphe sur X s'écrit comme quotient de deux sections d'une puissance convenable $\mathcal{F}^h$ de $\mathcal{F}$.

Cette remarque s'avère être utile dans la théorie des fonctions automorphes (*cf.* [1]).

15. **Sous-espaces pseudo-concaves d'un espace projectif.**

THÉORÈME 6. — *Soit X un espace irréductible pseudo-concave plongé (de manière holomorphe et biunivoque) dans un espace projectif $P_n(\mathbf{C})$.*

Alors X est contenu dans une variété algébrique irréductible de même dimension.

Preuve. — Soit V la plus petite variété algébrique contenant X. Cette variété est irréductible, car X l'est, en effet elle est définie comme variété des zéros de l'idéal premier

$$\mathfrak{p} = \{ p \in \mathbf{C}[x_0, \ldots x_n] \mid p(x) = 0 \text{ si } x \in X \}.$$

Comme $V \supset X$ on a $\dim_{\mathbf{C}} V \geq \dim_{\mathbf{C}} X$. Soit $\mathcal{K}$ le corps des fonctions rationnelles sur V et $\mathcal{L}$ celui des fonctions méromorphes sur X. Pour chaque élément de $\mathcal{K}$ sa restriction à X est définie car V est minimale. On a donc une injection $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$. Comme le degré de transcendance de $\mathcal{L}$ est $\leq \dim_{\mathbf{C}} X$ il en résulte que $\dim_{\mathbf{C}} V =$ degré de transcendance de $\mathcal{K} \leq \dim_{\mathbf{C}} X$. Donc $\dim_{\mathbf{C}} V = \dim_{\mathbf{C}} X$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ANDREOTTI (A.) und GRAUERT (H.). — Algebraische Körper von automorphen Funktionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1961, p. 39-48.

[2] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). — Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962 p. 193-259.

[3] BOCHNER (S.) and MARTIN (W. T.). — Complex spaces with singularities, *Annals of Math.*, Series 2, t. 57, 1953, p. 490-516.

[4] CHEVALLEY (Claude). — On the theory of local rings, *Annals of Math.*, Series 2, t. 44, 1943, p. 690-708.

[5] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). — Zur Theorie der Modifikationen, I., *Math, Annalen*, t. 129, 1955, p. 274-296.

[6] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). — Komplexe Räume, *Math. Annalen*, t. 136, 1958, p. 245-318.

[7] HODGE (W. V. D.). — Some enumerative results in the theory of forms, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 39, 1943, p. 24-26.

[8] KRULL (W.). — Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. für die reine und angew. Math.*, t. 179, 1938, p. 204-225.

[9] REMMERT (R.). — Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Raumen, *Math. Annalen*, t. 132, 1956, p. 277-288.

[10] REMMERT (R.). — Projektionen analytischer Mengen, *Math. Annalen*, t. 130, 1956, p. 140-441.

[11] SERRE (Jean-Pierre). — Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1956, p. 1-42.

[12] SERRE (Jean-Pierre). — Sur la cohomologie des variétés algébriques, *J. Math. pures et appl.*, Série 9, t. 36, 1957, p. 1-16.

13] SERRE (Jean-Pierre). — Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres*, t. 11, 1957-1958. n° 23, 18 pages.

[14] SIEGEL (C. L.). — Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, 1955, p. 71-77.

(Manuscrit reçu le 30 juillet 1962.)

Aldo ANDREOTTI
Istituto di Matematica
Università
Pisa (Italie).