BULLETIN DE LA S. M. F.

ALDO ANDREOTTI
HANS GRAUERT

Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 193-259
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__193_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 193 à 259.

THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES ESPACES COMPLEXES.

PAR

ALDO ANDREOTTI et HANS GRAUERT (*).

Cet article est consacré à des résultats intermédiaires entre les deux théorèmes de H. CARTAN et J.-P. SERRE; l'un, le théorème de finitude pour la cohomologie à valeurs dans un faisceau cohérent d'un espace complexe compact [6], l'autre, le « théorème B » de la théorie des espaces holomorphiquement complets ([18], [24]). Toutes les techniques de démonstration employées ici sont inspirées de ces deux Mémoires et de [12]. Une partie des résultats sont annoncés dans [13].

On introduit les notions d'espaces fortement q-pseudoconvexes, d'espaces q-complets et d'espaces fortement q-pseudoconcaves. Ces notions englobent celles d'espace holomorphiquement convexe (= espace fortement 1-pseudoconvexe lorsque l'ensemble de dégénérescence est compact), d'espace holomorphiquement complet (= espace 1-complet), d'espace compact (convexité nulle).

Les énoncés des théorèmes nécessitent l'introduction de la notion de dimension homologique d'un faisceau cohérent, ce qui est fait au paragraphe 1.

Moyennant une étude locale de la situation développée aux paragraphes 2, 3, 4, on arrive aux théorèmes de finitude du paragraphe 5. Le point qui nous semble le plus délicat est le théorème d'approximation du n° 19 qui étend aux classes de cohomologie le théorème de Runge sur l'approximation des fonctions sur un espace de Stein.

Des applications de ces théorèmes sont développées au paragraphe 6. En particulier, on obtient un théorème d'annulation de la cohomologie à valeurs dans un faisceau localement libre, qui étend le théorème analogue de

(*) The second author was supported by directorate of Mathematical Sciences AFOSR, European office of aerospace research, Grant No. AF-EOAR-61-50.

J.-P. SERRE pour les variétés algébriques [25] et celui de KODAIRA pour les variétés kählériennes [17].

Il faut remarquer que la notion de q-convexité a été introduite pour la première fois par W. ROTHSTEIN [21].

A P. CARTIER, qui s'est chargé de la lecture du manuscrit, sont dues de nombreuses améliorations (en particulier, la remarque du n° 2 et le lemme du n° 19), pour lesquelles nous exprimons ici nos vifs remerciements.

1. — La dimension homologique.

1. Le théorème des syzygies de Hilbert.

a. Soit A un anneau local nœthérien d'intégrité avec élément unité. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A.

Soit F un A-module de type fini. Choisissons un ensemble minimal de générateurs $s_1, \ldots, s_{p_0}$ de F et envisageons l'homomorphisme surjectif

$$\alpha_0 : \quad A^{p_0} \to F$$

défini par $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p_0}) \to \sum \lambda_i s_i$.

Soit $F_1 = \operatorname{Ker} \alpha_0$; c'est un A-module de type fini. Si p_1 est le nombre minimal de générateurs de F_1 on obtient un homomorphisme surjectif

$$\alpha_1 : \quad A^{p_1} \to F_1.$$

On opère sur $\operatorname{Ker} \alpha_1$ comme tout à l'heure, et ainsi de suite. Des homomorphismes obtenus on tire une suite exacte

$$(1) \qquad \ldots \to A^{p_h} \xrightarrow{\beta_h} A^{p_{h-1}} \to \ldots \to A^{p_1} \xrightarrow{\beta_1} A^{p_0} \xrightarrow{\beta_0} F \to 0,$$

où β_h est le composé de $\alpha_h : A^{p_h} \to F_h$ et de l'injection $F_h \to A^{p_{h-1}}$.

On appellera (1) une *résolution minimale* de F.

b. Le théorème de Hilbert est le suivant (*cf.* [5]) :

THÉORÈME 1. — *Supposons que l'idéal* $\mathfrak{m}$ *ait une base* $m_1, \ldots, m_n$ *satisfaisant à la propriété suivante :*

$$A\, m_{h+1} \cap A(m_1, \ldots, m_h) = m_{h+1} A(m_1, \ldots, m_h) \qquad \textit{pour} \quad 1 \leq h \leq n-1.$$

Alors, dans toute résolution minimale (1) *de* F, *on a* $A^{p_l} = 0$ si $l > n$.

PREUVE.

α. On démontre d'abord le lemme suivant (GRÖBNER [15]) :

LEMME. — *Soit* $\ldots \to A^{p_h} \xrightarrow{\beta_h} A^{p_{h-1}} \xrightarrow{\beta_{h-1}} \ldots \to A^{p_0}$ *une suite exacte. Soit* $\mathfrak{a} = A(a_1, \ldots, a_l)$ *un idéal de* A *satisfaisant aux conditions*

$$A\, a_{h+1} \cap A(a_1, \ldots, a_h) = a_{h+1} A(a_1, \ldots, a_h) \qquad \textit{pour} \quad 1 \leq h \leq l-1.$$

On a

$$\mathfrak{a} A^{p_h} \cap \operatorname{Ker} \beta_h = \mathfrak{a} \operatorname{Ker} \beta_h \qquad \textit{pour} \quad h \geq l.$$

Preuve du lemme. — Soit $u = \sum_1^l a_i u_i$, et supposons que $\beta_h(u) = 0$, donc

$$\sum_1^l a_i \beta_h(u_i) = 0.$$

Si $l = 1$, $a_1 \beta_h(u_1) = 0$ implique $\beta_h(u_1) = 0$, car A est d'intégrité et A^{p_h} est libre; le lemme est vrai dans ce cas.

Par récurrence sur l admettons le lemme pour les $\mathfrak{a}$ avec moins que l générateurs.

Posons $u'_i = \beta_h(u_i)$. De $a_l u'_l = -\sum_1^{l-1} a_j u'_j$, par les hypothèses sur $\mathfrak{a}$, on tire que $u'_l = \sum_1^{l-1} a_j u''_j$ et, comme $\beta_{h-1}(u'_l) = 0$ par l'induction, on peut supposer $\beta_{h-1}(u''_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq l$. D'après l'exactitude de la suite des β on peut trouver des v_j tels que $u''_j = \beta_h(v_j)$.

On pose

$$w_j = u_j + a_l v_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq l-1 \qquad \text{et} \qquad w_l = u_l - \sum_1^{l-1} a_j v_j.$$

On aura $\sum_1^l a_i w_i = u$ et aussi $\beta_h(w_l) = 0$. Donc

$$u - a_l w_l = \sum_1^{l-1} a_j w_j \qquad \text{et} \qquad \beta_h(u - a_l w_l) = 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence on peut choisir les w_j pour $1 \leq j \leq l-1$, tels que $\beta_h(w_j) = 0$.

β. On remarque à présent que, la résolution étant minimale, si l'on a $\beta_h \neq 0$ et $\beta_h(u) = 0$, nécessairement $u \in \mathfrak{m} A^{p_h}$, i. e. $\operatorname{Ker} \beta_h \subset \mathfrak{m} A^{p_h}$.

Supposons qu'on ait $A^{p_{n+1}} \neq 0$, donc $\beta_{n+1} \neq 0$. Il existe $v \in A^{p_{n+1}}$, tel que $u = \beta_{n+1}(v) \neq 0$. Comme $\beta_n(u) = 0$, on a

$$x \in \mathfrak{m} A^{p_n} \cap \operatorname{Ker} \beta_n = \mathfrak{m} \operatorname{Ker} \beta_n \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{m} A^{p_h} \cap \operatorname{Ker} \beta_n) = \mathfrak{m}^2 \operatorname{Ker} \beta_n, \ \ldots.$$

Donc $u \in \mathfrak{m}^{\nu} A^{p_h}$, $\forall \nu$, et par conséquent $u = 0$, car A est nœthérien et $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal (lemme de Krull).

C. Q, F. D.

c. Soit à présent $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$. Soit x un point de U. Comme $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$ module de type fini, $\mathcal{O}_x$ étant l'anneau local du point x, on a une résolution du type

$$0 \to \mathcal{O}_x^{p_d} \xrightarrow{\beta_d} \mathcal{O}_x^{p_{d-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}_x^{p_0} \xrightarrow{\beta_0} \mathcal{F}_x \to 0.$$

En utilisant la cohérence de $\mathcal{F}$, on voit qu'il existe un voisinage V_x de x dans U dans lequel on peut étendre les homomorphismes β de sorte que la suite

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \mathcal{O}^{p_{d-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_0} \to \mathcal{F} \to 0$$

soit encore exacte. On aura encore $d \leqq n$. Nous appellerons une telle résolution, une *résolution de Hilbert* de $\mathcal{F}$ au voisinage de x.

Pour tout $x \in U$ désignons par $d(x)$ la longueur d'une résolution de Hilbert de $\mathcal{F}$ au voisinage de x.

Il résulte que $d(x)$ est le plus petit entier tel qu'on ait dans un voisinage convenable de x une résolution de $\mathcal{F}$ de longueur d par des faisceaux libres.

En effet, s'il y avait une résolution de longueur $\delta < d(x)$ au voisinage de x, le noyau $\mathcal{G}$ de l'homomorphisme $\mathcal{O}^{p_{\delta-1}} \to \mathcal{O}^{p_{\delta-2}}$ dans la résolution de Hilbert aurait une fibre $\mathcal{G}$ qui serait $\mathcal{O}_x$-projective (Cartan-Eilenberg [5], prop. 2.1, p. 110). Par conséquent, $\mathrm{Tor}_1(\mathcal{G}_x, \mathcal{O}_{x/\mathfrak{m}_x}) = 0$. Donc $\mathcal{G}$ serait localement libre au voisinage de x et la résolution de Hilbert serait de longueur $\leqq \delta$ (en effet, sur un anneau local, tout module projectif de type fini est libre).

En particulier, il résulte que $d(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement sur U.

Proposition 1. — *Soit U un ouvert d'holomorphie, soit $W \Subset U$ un ouvert d'holomorphie topologiquement contractile et relativement compact. Soit $d = \sup_{x \in W} d(x)$; on a sur W une résolution globale du faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur U*

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \mathcal{O}^{p_{d-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_0} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Preuve. — Comme les sections globales de $\mathcal{F}$ engendrent $\mathcal{F}$ en chaque point de U, on peut trouver un nombre fini p_0 de sections de $\mathcal{F}$ sur U qui engendrent $\mathcal{F}$ en tout point de W. Ces sections définissent un homomorphisme $\mathcal{O}^{p_0} \to \mathcal{F}$ qui est surjectif sur W. On opère sur le noyau de cet homomorphisme comme sur $\mathcal{F}$ et ainsi de suite; on en déduit une résolution, peut-être infinie, de $\mathcal{F}$ sur W. Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}^{p_{d-1}} \to \mathcal{O}^{p_{d-2}})$. Comme tout à l'heure

on voit que $\mathcal{G}$ est localement libre en tout point de W. Comme W est contractile, il résulte d'un théorème de GRAUERT [11] que $\mathcal{G} \approx \mathcal{O}^{p_d}$ pour p_d convenable.

C. Q. F. D.

2. La dimension homologique.

a. Soient X un espace complexe et $\mathcal{F}$ un faiscesu analytique cohérent sur X. Pour tout point $x \in X$, il existe un plongement ψ d'un voisinage V_x de x dans X dans un voisinage U de l'origine de l'espace tangent de Zariski $\mathcal{T}_x = \mathbf{C}^{m(x)}$ au point x. Par ψ le faisceau $\mathcal{F}|_{V_x}$ se transporte dans un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}^\star$ sur l'ensemble analytique $\psi(V_x) \subset U$. En étendant $\mathcal{F}^\star$ par zéro sur U en dehors de $\psi(V_x)$ on obtient un faisceau $\hat{\mathcal{F}}^\star$ analytique cohérent sur U. Soit

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \mathcal{O}^{p_{d-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_0} \to \hat{\mathcal{F}}^\star \to 0$$

une résolution de $\hat{\mathcal{F}}^\star$ au voisinage de l'origine, de longueur minimale.

On aura $d \leq m(x)$. Par définition, on pose

$$\operatorname{dih}_x(\mathcal{F}) = m(x) - d.$$

Ce nombre ne dépend pas du plongement ψ comme il résulte de [1]; on l'appelle la *dimension homologique du faisceau $\mathcal{F}$ au point x*. Comme dimension homologique du faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on prend par définition le nombre

$$\operatorname{dih}(\mathcal{F}) = \min_{x \in X} \operatorname{dih}_x(\mathcal{F}).$$

Remarque. — Pour la définition de la dimension homologique de $\mathcal{F}$ au point x on a utilisé un plongement local de l'espace X au voisinage de x dans l'espace tangent de Zariski à X au point x.

Or, n'importe quel plongement local ψ d'un voisinage de X dans un espace numérique quelconque donne lieu au même résultat.

Comme ψ s'étend à un plongement d'un voisinage de l'origine de l'espace tangent de Zariski (*cf.* [1]), il suffit de démontrer le lemme suivant :

LEMME. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent défini sur un voisinage U d'un point ξ_0 de l'espace $\mathbf{C}^n$ sur lequel on ait une résolution de Hilbert*

$$0 \to \mathcal{O}_n^{p_d} \xrightarrow{\alpha_d} \mathcal{O}_n^{p_{d-1}} \xrightarrow{\alpha_{d-1}} \ldots \to \mathcal{O}_n^{p_0} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F} \to 0,$$

$\mathcal{O}_n$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$.

Identifions $\mathbf{C}^n$ au sous-espace de $\mathbf{C}^{n+1}$ défini par l'équation $z_1 = 0$, et soit $\mathcal{F}$ le faisceau sur $\mathbf{C} \times U$ égal à $\mathcal{F}$ sur U et nul en dehors de U. Il existe alors un voisinage $\hat{U}$ de $(0, \xi_0)$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et une résolution minimale

$$0 \to \mathcal{O}_{n+1}^{p_d} \xrightarrow{\beta_{d+1}} \mathcal{O}_{n+1}^{p_d+p_{d-1}} \xrightarrow{\beta_d} \mathcal{O}_{n+1}^{p_{d-1}+p_{d-2}} \to \ldots \to \mathcal{O}_{n+1}^{p_1+p_0} \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{O}_{n+1}^{p_0} \xrightarrow{\beta_0} \hat{\mathcal{F}} \to 0,$$

où $\mathcal{O}_{n+1}$ désigne le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^{n+1}$.

Preuve. — L'homomorphisme α_k de $\mathcal{O}_n^{p_k}$ dans $\mathcal{O}_n^{p_{k-1}}$ est défini par une matrice de fonctions holomorphes $\alpha_{rs}(t_1, \ldots, t_n)$ (en notant par $t_1, \ldots, t_n$ les coordonnées sur U). On définit un homomorphisme $\tilde{\alpha}_k$ de $\mathcal{O}_{n+1}^{p_k}$ dans $\mathcal{O}_{n+1}^{p_{k-1}}$ au moyen de la matrice de fonctions holomorphes $\alpha_{rs}(z_2, \ldots, z_{n+1})$ sur $\mathbf{C} \times U$. Il est immédiat que la suite des homomorphismes $\tilde{\alpha}_k$, pour $k = 1, 2, \ldots, d$, est exacte.

On définit, par ailleurs, une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{n+1} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{n+1} \xrightarrow{v} \mathcal{O}_n \to 0$$

en prenant pour u la multiplication par la fonction holomorphe z_1, et pour v l'homomorphisme de restriction $f \to f|_U$ pour toute fonction f holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C} \times U$.

L'homomorphisme β_k de $\mathcal{O}^{p_k} \oplus \mathcal{O}^{p_{k-1}}$ dans $\mathcal{O}^{p_{k-1}} \oplus \mathcal{O}^{p_{k-2}}$ est défini par la formule

$$\begin{aligned} &\beta_k(\sigma_1, \sigma_2) = (\tilde{\alpha}_k(\sigma_1) + (-1)^k z_1 \sigma_2, \ \tilde{\alpha}_{k-1}(\sigma_2)) \qquad (2 \leqq k \leqq d), \\ &\beta_1(\sigma_1, \sigma_2) = \tilde{\alpha}_1(\sigma_1) - z_1 \sigma_2, \\ &\beta_{d+1}(\sigma) = ((-1)^{d+1} z_1 \sigma, \ \tilde{\alpha}_d(\sigma)) \end{aligned}$$

(on convient que $p_{d+1} = p_{-1} = 0$). Enfin β_0 est composé de v et de α_0. On vérifie, en vertu de ce qu'on a dit tout à l'heure, que la suite des homomorphismes β_k est exacte. Cette suite est minimale car les matrices qui expriment les homomorphismes β_k, pour $k \neq 0$, sont composées de fonctions holomorphes nulles en $(0, \xi_0)$.

b. Dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ est le faisceau des anneaux locaux on parle de la dimension homologique de l'espace X tout court. Donc, par définition,

$$\operatorname{dih}_x X = \operatorname{dih}_x(\mathcal{O}), \qquad \operatorname{dih} X = \operatorname{dih}(\mathcal{O}).$$

Si X est non singulier au point x, au voisinage de x, l'espace X est isomorphe à un voisinage de l'origine de l'espace tangent de Zariski, donc $\operatorname{dih}_x X = \dim_x X$. En particulier, si X est une variété purement dimensionelle, on a $\operatorname{dih} X = \dim_{\mathbf{C}} X$.

3. Propriétés de la dimension homologique d'un espace.

a. Soit (X, x) un sous-ensemble analytique pointé d'un ouvert U de $\mathbf{C}^m$. Soit $\mathcal{O}_x$ le faisceau des anneaux locaux sur X étendu trivialement en dehors de X. Soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux défini par X dans U. Le faisceau $\mathcal{J}$ est un faisceau analytique cohérent d'idéaux sur U. Soit d la longueur d'une résolution de Hilbert du faisceau $\mathcal{J}$ au voisinage de x. De cette résolution et de la suite exacte $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_X \to 0$, on déduit une résolution de Hilbert du faisceau $\mathcal{O}_X$ au voisinage de x de longueur $d + 1$. Donc

$$\operatorname{dih}_x(X) = \operatorname{dih}_x(\mathcal{J}) - 1.$$

Proposition 2. — $\dim_x X = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{dih}_x X = 0$.

Preuve. — Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — *Soit $\mathcal{J}$ un faisceau analytique cohérent d'idéaux sur l'ouvert $U \subset \mathbf{C}^m$. Soit $x \in U$ et soit f une fonction holomorphe au voisinage de x nulle en x et telle que*

$$\mathcal{J}_x \cap f\mathcal{O}_x = f\mathcal{J}_x.$$

Alors on a

$$\mathrm{dih}_x \mathcal{O}(\mathcal{J}, f) = \mathrm{dih}_x(\mathcal{J}) - 1.$$

En effet, soit

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \xrightarrow{\alpha_d} \ldots \to \mathcal{O}^{p_0} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{J} \to 0$$

une résolution de Hilbert au voisinage de x Soit $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathcal{J}, f)$. On obtient une résolution de Hilbert de $\mathcal{A}$ dans la suite

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \xrightarrow{\beta_{d+1}} \mathcal{O}^{p_d+p_{d-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_1+p_0} \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{O}^{p_0+1} \xrightarrow{\beta_0} \mathcal{A} \to 0,$$

où $\beta_k : \mathcal{O}^{p_k} \oplus \mathcal{O}^{p_{k-1}} \to \mathcal{O}^{p_{k-1}} \oplus \mathcal{O}^{p_{k-2}}$ est donné par

$$(\sigma_1, \sigma_2) \to (\alpha_k(\sigma_1) + (-1)^k f\sigma_2, \alpha_{k-1}(\sigma_2))$$

(on convient que $\mathcal{O}^{p_{-1}} = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}^{p_{-2}} = 0$). La vérification se fait de proche en proche pour $k = 0, 1, \ldots$ (*cf.* [15]).

Venons à la démonstration de la proposition. L'implication

$$\dim_x X = 0 \Rightarrow \mathrm{dih}_x X = 0$$

est évidente.

Soit $\mathrm{dih}_x X = 0$ et supposons, si possible, $\dim_x X = d \geqq 1$.

L'espace tangent de Zariski en x est de dimension $\geqq d$. S'il était de dimension d, x serait non singulier, donc $\mathrm{dih}_x X = d \geqq 1$, ce qui est impossible. Donc l'espace tangent de Zariski en x est de dimension $> d$.

On aura donc, selon la remarque faite au début de ce numéro, $\mathcal{J}_x \neq 0$ et $\mathrm{dih}_x(\mathcal{J}) = 1$. Comme $\mathcal{J}_x$ est intersection d'idéaux premiers de dimension $\geqq 1$, il existe une fonction f holomorphe, nulle en x, non contenue dans aucun de ces idéaux, donc telle que $\mathcal{J}_x \cap f\mathcal{O}_x = f\mathcal{J}_x$ (1). A cause du lemme, pour le faisceau $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathcal{J}, f)$, on aura $\mathrm{dih}_x(\mathcal{A}) = 0$. Le faisceau cohérent $\mathcal{O}/\mathcal{A}$ n'est pas nul et l'on aurait $\mathrm{dih}_x(\mathcal{O}/\mathcal{A}) = -1$, ce qui est une contradiction.

b. Du lemme démontré tout à l'heure on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Supposons qu'on puisse choisir un système de générateurs de l'idéal $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_s)$ de sorte que*

---

(1) En effet, si $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_x$ de dimension $\geqq 1$, il ne peut pas contenir toutes les fonctions linéaires sur $\mathbf{C}^m$ nulles en x. Donc les fonctions linéaires de $\mathbf{C}^m$ nulles en x et dans $\mathfrak{p}_x$ forment un espace linéaire de dimension $< m$. On peut donc choisir f linéaire.

$\mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_h) \cap \mathcal{O}_x f_{h+1} = f_{h+1}\mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_h)$ *pour* $0 \leq h \leq s-1$.
Alors, au voisinage de x, on a une résolution de Hilbert du type

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^{\binom{s}{s-1}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{\binom{s}{1}} \to \mathcal{J} \to 0.$$

Nous dirons que X est une *intersection complète* au point x si l'on peut choisir les générateurs de l'idéal $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_s)$ de sorte que
$\mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_h) \cap \mathcal{O}_x f_{h+1} = f_{h+1}\mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_h)$ pour $0 \leq h \leq s-1$.

Proposition 3. — *Si X est une intersection complète au point x, alors*

$$\mathrm{dih}_x X = \dim_x X.$$

Preuve. — Nous ferons d'abord la remarque suivante. Soient X un espace complexe irréductible, f une fonction holomorphe sur X non identiquement nulle, $Y = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. Alors si Y n'est pas vide, il est purement dimensionnel de codimension 1.

En effet, supposons d'abord X normal. Soit $g = f^{-1}$. L'ensemble Y des points singuliers de g est maigre. D'après un théorème de Thullen [27], en un point $y \in Y$ qui est simple pour X, cet ensemble est purement dimensionnel de codimension 1 (ceci peut aussi être établi directement). Si $y \in Y$ est singulier pour X par le théorème d'Hartogs, il doit être un point d'accumulation de points de Y simples sur X. Donc partout $\mathrm{codim}_y(Y) = 1$.

Comme la projection de l'espace normalisé sur l'espace envisagé est propre à fibre discrète d'après un théorème de Remmert [20], on déduit la conclusion.

Démontrons que $\dim_x X = m - s$ dans les hypothèses envisagées. Soit $\mathcal{J}_h = \mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_h)$ et soit V_h le germe d'ensemble analytique défini par $\mathcal{J}_h$ au point x. Si $h = 1$, de la remarque précédente découle que $\mathrm{codim}_x V_1 = 1$. Par induction, supposons que V_h soit purement dimensionnel de codimension h. Démontrons que V_{h+1} est aussi purement dimensionnel de codimension $h+1$. Pour ceci il suffit de démontrer que f_{h+1} n'est identiquement nulle sur aucune composante irréductible de V_h.

Soit $\mathcal{J}_h = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ une décomposition primaire minimale de $\mathcal{J}_h$ et soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ les idéaux premiers associés. Comme

$$\mathcal{O}(f_{h+1}) \cap \mathcal{J}_h = f_{h+1}\mathcal{J}_h,$$

f_{h+1} ne peut être dans aucun des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$. Ceci termine la démonstration.

Proposition 4. — *On a toujours* $\mathrm{dih}_x X \leq \dim_x X$.

Preuve. — Soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des anneaux locaux sur X étendu trivialement sur U en dehors de A. Envisageons une résolution de Hilbert de $\mathcal{O}_X$ sur un voisinage V, dans U, du point x et soit $d(x)$ sa longueur. Par définition, on a $\mathrm{dih}_x X = m - d(x)$.

Soit y un point de $X \cap V$ qui soit non singulier pour X et tel que $\dim_y X = \dim_x X$. Soit $d(y)$ la longueur d'une résolution de Hilbert de $\mathcal{O}_X$ au voisinage de y. A cause de ce qu'on a dit en b, on aura

$$m - d(y) = \dim_y X = \dim_x X.$$

En vertu de la minimalité de la fonction $d(x)$, on aura aussi $d(y) \leqq d(x)$. Donc

$$\mathrm{dih}_x X = m - d(x) \leqq m - d(y) = \dim_x X.$$

C. Q. F. D.

2. — Chemins différentiables dans un espace de Fréchet.

4. Préliminaires.

a. Soit F un espace de Fréchet, c'est-à-dire un espace vectoriel topologique sur $\mathbf{C}$, localement convexe, métrisable, complet. Soit I_m le cube unité fermé de $\mathbf{R}^m$:

$$I_m = \left\{ t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}^m \;\middle|\; |t_i| \leqq 1 \right\}.$$

Désignons par $\mathcal{E}^r(I_m, F)$ l'espace des applications continûment différentiables jusqu'à l'ordre r de I_m dans F; tout élément de $\mathcal{E}^r(I_m, F)$ est donc une fonction définie sur I_m, à valeurs dans F, admettant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre r. L'espace $\mathcal{E}^0(I_m, F)$ est l'espace des applications continues de I_m dans F; l'espace $\mathcal{E}^\infty(I_m, F)$ celui des applications indéfiniment différentiables.

b. Munissons les espaces $\mathcal{E}^r(I_m, F)$ de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre r. Les espaces envisagés sont complets. En particulier, on obtient des espaces de Banach si $r < \infty$ et F est un espace de Banach, tandis que $\mathcal{E}^\infty(I_m, F)$ sera un espace de Fréchet.

c. Pour tout élément $f \in \mathcal{E}^0(I_m, F)$ on définit, par exemple au moyen des sommes de Riemann, l'intégrale $\int_{I_m} f(t)\, dt$, dt étant la mesure euclidienne sur I_m.

Soit $e' \in F'$ un élément du dual de F, c'est-à-dire une application linéaire continue de F dans $\mathbf{C}$. La fonction $h_{e'}(t) = \langle e', f(t) \rangle$ est une fonction continue de t sur I_m à valeurs dans $\mathbf{C}$. On a pour tout $e' \in F'$ l'identité

$$\int_{I_m} \langle e', f(t) \rangle\, dt = \left\langle e', \int_{I_m} f(t)\, dt \right\rangle$$

Celle-ci est de démonstration facile. D'ailleurs, elle pourrait être prise

comme définition de $\int_{I_m} f(t)\,dt$, mais il faudrait prouver que cette intégrale appartient effectivement à F et non seulement au dual algébrique de F'.

5. **Séries de Fourier.**

a. Soit $f \in \mathcal{E}^0(I_m, F)$: nous poserons pour tout $n \in \mathbf{Z}^m$

$$a_n(f) = \int_{I_m} f(t)\, e^{-2\pi i n.t}\, dt,$$

où $n.t = \sum_1^m n_i t_i$. On notera $|n|$ l'expression $\left(\sum n_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

LEMME 1. — *Si $f \in \mathcal{E}^0(I_m, F)$ et $a_n(f) = 0$ pour tout n, alors $f = 0$.*

Preuve. — Si $F = \mathbf{R}$ le résultat est classique. En général, pour tout $e' \in F'$, le dual de F, on aura

$$\int_{I_m} \langle e', f(t) \rangle e^{-2\pi i n.t}\, dt = \langle e', a_n(f) \rangle = 0,$$

donc par la remarque précédente $h_{e'}(t) = \langle e', f(t) \rangle = 0$ pour tout $e' \in F'$. Du théorème de Hahn-Banach, il résulte qu'on a $f(t) = 0$.

LEMME 2. — *Si $f \in \mathcal{E}^0(I_m, F)$, on a $\lim_{n \to \infty} a_n(f) = 0$.*

Preuve. — Si f est constante, le lemme est banal. Il en découle qu'il est vrai aussi pour une fonction g en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux sur les cubes d'un quadrillage fini de I_m. Comme f est continue, on peut l'approcher uniformément par une suite de fonctions g en escalier. Si U est un voisinage cerclé convexe de l'origine dans F tel que $f(t) - g(t) \in U$ pour tout $t \in I_m$, on aura aussi $a_n(f - g) \in \bar{U}$, pour tout n, comme on voit sur les sommes de Riemann. De là, on conclut facilement.

b. Soit $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial t_i^2}$ l'opérateur de Laplace. Par intégration par parties on obtient facilement le lemme suivant :

LEMME 3. — *Si $f \in \mathcal{E}^2(I_m, F)$ et si f est périodique (i. e. f est une fonction de classe C^2 sur le tore $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$), on a*

$$a_n(\Delta f) = -4\pi^2 |n|^2 a_n(f).$$

En particulier, on déduit du lemme 2 que, si $f \in \mathcal{E}^{2k}(I_m, F)$ est périodique (i. e. de classe C^{2k} sur $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$), on aura $\lim_{|n| \to \infty} |n|^{2k} a_n(f) \to 0$.

PROPOSITION 5. — *Si $f \in \mathcal{E}^{2k}(I_m, F)$ est périodique et si $2k > m$, f est développable en série de Fourier uniformément convergente.*

Preuve. — On remarque d'abord que la série $\sum_n 1/|n|^{2k}$ est convergente, car $2k > m$. De là on déduit que la série $\sum a_n(f)\, e^{2\pi i n.t}$ est uniformément convergente. En effet, si U est un voisinage convexe cerclé de l'origine dans F et si N_0 est choisi de sorte que

(i) $|n|^{2k} a_n(f) \in U$ pour $|n| > N_0$;

(ii) $\sum_{\substack{n \\ |n| > N_0}} 1/|n|^{2k} < 1$,

on voit que toute somme finie de termes $a_n(f)\, e^{2\pi i n.t}$, avec $|n| > N_0$ est contenue dans U.

Si $g(t) = \sum a_n(f)\, e^{2\pi i n.t}$ est la somme de la série de Fourier de f, $g(t)$ est continue. Or $h(t) = f(t) - g(t)$ est continue et tous ses coefficients de Fourier sont nuls. Du lemme 1 on tire $f = g$.

On déduit aisément des remarques précédentes la proposition suivante :

PROPOSITION 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(t)$, développable en série de Fourier $\sum_n a_n e^{2\pi i n.t}$, soit indéfiniment différentiable est que, pour tout $k > 0$,*

$$\lim_{|n| \to \infty} |n|^{2k} a_n = 0.$$

6. Le foncteur $\mathcal{E}^\infty(X, F)$.

a. Désignons par T le tore $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ et par $\mathcal{E}^\infty(T, F)$ l'espace des applications indéfiniment différentiables de T dans l'espace de Fréchet F. On munit $\mathcal{E}^\infty(T, F)$ de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées; il en résulte que $\mathcal{E}^\infty(T, F)$ est un espace de Fréchet. Toute application linéaire continue $\alpha : F \to F'$ d'un espace de Fréchet F dans un autre F' induit une application linéaire continue

$$\alpha_* : \quad \mathcal{E}^\infty(T, F) \to \mathcal{E}^\infty(T, F');$$

il résulte que $\mathcal{E}^\infty(T, F)$ est un foncteur de la catégorie des espaces de Fréchet dans elle-même. On a le lemme suivant d'exactitude (*cf.* [16]) :

LEMME 1. — *Si $0 \to F' \xrightarrow{\alpha'} F \xrightarrow{\alpha} F'' \to 0$ est une suite exacte d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues, alors la suite*

$$0 \to \mathcal{E}^\infty(T, F') \xrightarrow{\alpha'_*} \mathcal{E}^\infty(T, F) \xrightarrow{\alpha_*} \mathcal{E}^\infty(T, F'') \to 0$$

est aussi une suite exacte d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues.

Preuve. — Comme F' est un sous-espace fermé de F en tant que noyau de α, il résulte que $\mathcal{E}^\infty(T, F')$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}^\infty(T, F)$ qui s'identifie au noyau de α_*. Donc la suite

$$0 \to \mathcal{E}^\infty(T, F') \xrightarrow{\alpha'_*} \mathcal{E}^\infty(T, F) \xrightarrow{\alpha_*} \mathcal{E}^\infty(T, F'')$$

est une suite exacte. Il reste à démontrer que la dernière application est surjective.

Soit $f: T \to F''$ un élément de $\mathcal{E}^\infty(T, F'')$. Envisageons ses coefficients de Fourier $a_n(f)$ $(n \in \mathbf{Z}^m)$. Comme f est indéfiniment différentiable, on a $|n|^{2k} a_n \to 0$ pour $|n| \to \infty$ et k quelconque. Comme $\alpha: F \to F'$ est surjective, elle est ouverte (théorème de Banach), donc on peut choisir des suites fondamentales $\{V_\nu\}$, $\{W_\nu\}$ de voisinages de zéro dans F, F'' respectivement, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, telles que :

(i) $\alpha(V_\nu) \supset W_\nu$;
(ii) $V_\nu \supset V_{\nu+1} \supset \ldots$; $W_\nu \supset W_{\nu+1} \supset \ldots$;
(iii) $W_{\nu+1} + W_{\nu+1} \subset W_\nu$.

On peut supposer aussi que les V_ν sont disqués, i. e. que pour $\lambda \in \mathbf{C}$ et $|\lambda| \leqq 1$, on a

$$\lambda V_\nu \subset V_\nu.$$

Pour $k > 0$ donné et tout $N > 0$, désignons par $\nu(N, k)$ le plus grand entier tel que

$$|n|^{2k} a_n(f) \in W_{\nu(N,k)} \qquad \text{si} \quad |n| \geqq N.$$

On a évidemment $\nu(N+1, k) \geqq \nu(N, k)$. De plus, $\lim\limits_{N \to +\infty} \nu(N, k) = +\infty$. Choisissons une suite d'entiers $0 < N_0 < N_1 < N_2 < \ldots$ tels que

$$\nu(N_0, 0) \geqq 1, \qquad \nu(N_1, 1) \geqq 2, \qquad \nu(N_2, 2) \geqq 3, \qquad \ldots.$$

Choisissons une suite b_n, $n \in \mathbf{Z}^m$, d'éléments de F de la manière suivante. Pour $|n| < N_0$ on demande que $\alpha(b_n) = a_n(f)$, ce qui est possible, car α est surjective.

Pour $N_0 \leqq |n| < N_1$, on demande que $\alpha(b_n) = a_n(f)$ et que $b_n \in V_1$. Ceci est possible car, pour $n \geqq N_0$, $a_n(f) \in W_1$.

Pour $N_1 \leqq |n| < N_2$, on demande que $\alpha(b_n) = a_n(f)$ et que $|n|^2 b_n \in V_2$. Ceci est possible, car, pour $|n| \geqq N_1$, nous avons $|n|^2 a_n(f) \in W_2$. Et ainsi de suite. On vérifie que, pour tout $k > 0$, on a $\lim\limits_{|n| \to +\infty} |n|^{2k} b_n = 0$. En effet, V_ν étant fixé, choisissons un $k_0 > \sup(k, \nu)$. Comme $|n|^{2k_0} b_n \in V_{k_0} \subset V_\nu$,

pour $|n| > N_{k_0}$, il résulte que $|n|^{2k} b_n = \frac{|n|^{2k}}{|n|^{2k_0}} |n|^{2k_0} b_n$ est dans V_ν, car $\frac{|n|^{2k}}{|n|^{2k_0}} < 1$.

Il résulte que $g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^m} b_n e^{2\pi i n.t}$ est un élément de $\mathcal{E}^\infty(T, F)$ en vertu de la proposition 6. De plus, comme $f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^m} a_n(f) e^{2\pi i n.t}$, et que α est linéaire et continue, on déduit $\alpha(g(t)) = f(t)$. Ceci prouve notre assertion.

b. Nous utiliserons dans la suite aussi le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit $\alpha : F \to F'$ une application linéaire continue d'espaces de Fréchet. Si* $\operatorname{Im} \alpha$ *est dense dans F', alors l'application*

$$\alpha_* : \quad \mathcal{E}^\infty(T, F) \to \mathcal{E}^\infty(T, F')$$

a une image dense daus le deuxième espace.

Preuve. — Soit $f \in \mathcal{E}^\infty(T, F')$. Soit $f(t) = \sum a_n e^{2\pi i n.t}$ son développement en série de Fourier. On peut approcher f aussi bien qu'on veut par une somme partielle $s_N = \sum_{|n| < N} a_n e^{2\pi i n.t}$. Soit b_n^ν une suite d'éléments de F tels que $\lim_{\nu \to \infty} \alpha(b_n^\nu) = a_n$, $|n| < N$. Soit $g^\nu = \sum_{|n| < N} b_n^\nu e^{2\pi i n.t}$. On a $\lim_{\nu \to \infty} \alpha(g^\nu) = s_N$. Ceci prouve notre assertion.

c. Soit X une variété différentiable paracompacte, et soit F un espace de Fréchet. Désignons par $\mathcal{E}^\infty(X, F)$ l'espace des applications indéfiniment différentiables de X dans F. On peut répéter pour $\mathcal{E}^\infty(X, F)$ ce qu'on a dit dans le cas où X est un tore; la topologie sur $\mathcal{E}^\infty(X, F)$ étant à présent celle de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées sur tout compact de X. On obtient, pour X fixé, un foncteur covariant de la catégorie des espaces de Fréchet et des applications linéaires continues, en elle-même.

THÉORÈME 1. — *Le foncteur $\mathcal{E}^\infty(X, F)$ est exact.*

Preuve. — Soit $0 \to F' \xrightarrow{\alpha'} F \xrightarrow{\alpha} F'' \to 0$ une suite exacte d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues. Il faut démontrer l'exactitude de la suite d'applications linéaires continues

$$0 \to \mathcal{E}^\infty(X, F') \xrightarrow{\alpha'_*} \mathcal{E}^\infty(X, F) \xrightarrow{\alpha_*} \mathcal{E}^\infty(X, F'') \to 0.$$

Comme au lemme 1 seulement la surjectivité de α_* demande démonstration. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini avec des cartes $h_i : U_i \to \mathbf{R}^m$ telles que $h_i(U_i)$ soit un ouvert contenu dans le cube unité I_m de $\mathbf{R}^m$. Soit $\{\rho_i\}_{i \in I}$ une partition C^∞ de l'unité, subordonnée à $\mathfrak{U}$, avec $\operatorname{Supp} \rho_i = V_i \Subset U_i$. Soit finalement μ_i une fonction réelle différentiable telle que $\mu_i = 1$ sur V_i et $\operatorname{Supp} \mu_i \Subset U_i$. Étant donné $f \in \mathcal{E}^\infty(X, F'')$, posons $f_i = \rho_i f$, de sorte que $f = \sum f_i$. Il suffit de démontrer que, pour chaque f_i, on peut trouver $g_i \in \mathcal{E}^\infty(X, F)$ avec $\operatorname{Supp} g_i \subset U_i$ telle que $\alpha_* g_i = f_i$; en effet, pour $g = \sum_i g_i$ on aura $\alpha_* g = f$.

Or f_i définit de manière évidente une fonction sur le tore $T = \mathbf{R}^m / \mathbf{Z}^m$. A cause du lemme 1 on peut construire une fonction indéfiniment différentiable γ_i sur U_i à valeurs dans F telle que $\alpha_* \gamma_i = f_i$ sur U_i. Il suffit de poser $g_i = \mu_i \gamma_i$ pour avoir la conclusion.

d. Avec un argument analogue on démontre le

THÉORÈME 2. — *Soit $\alpha : F \to F'$ une application linéaire continue d'espaces de Fréchet. Si* $\operatorname{Im} \alpha$ *est dense dans F', alors l'application*

$$\alpha_* : \quad \mathcal{E}^\infty(X, F) \to \mathcal{E}^\infty(X, F')$$

a une image dense dans le deuxième espace.

Preuve. — On est ramené à démontrer le fait suivant :

Soient V, U deux ouverts de $\mathbf{R}^m$ tels que $V \subset \bar{V} \subset U \subset \bar{U} \subset \mathring{I}_m$. Soit $f \in \mathcal{E}^\infty(\mathring{I}_m, F')$ avec $\operatorname{Supp} f \subset \bar{V}$. Il existe une suite $\{g^\nu\} \subset \mathcal{E}^\infty(\mathring{I}_m, F)$ telle que $\operatorname{Supp}(g^\nu) \subset \bar{U}$, et que $\alpha_*(g^\nu) \to f$.

A cause du lemme 2 il existe une suite $\{\gamma^\nu\} \in \mathcal{E}^\infty(\mathring{I}_m, F)$ telle que $\alpha_*(\gamma^\nu) \to f$. Soit μ une fonction réelle C^∞, telle que $\mu = 1$ sur un voisinage V et $\operatorname{Supp} \mu \subset \bar{U}$. Posons $g^\nu = \mu \gamma^\nu$; il faut démontrer que $\alpha_*(g^\nu) \to f$, c'est-à-dire que, sur $\bar{U}$, $\alpha_*(\mu\gamma^\nu) - f$ converge uniformément vers zéro avec toutes ses dérivées. Soit D^p, $p \in \mathbf{N}^m$ l'opérateur $\dfrac{\partial^{p_1 + \ldots + p_m}}{\partial t_1^{p_1} \ldots \partial t_m^{p_m}}$; on aura

$$D^p \alpha_*(\mu\gamma^\nu) = D^p \mu \alpha_*(\gamma^\nu) = \sum_{|h| \leq p} a_h D^h \alpha_*(\gamma^\nu),$$

où les a_h sont des fonctions réelles continues à support dans $\bar{U}$.

Soit W un voisinage disqué de l'origine dans F'. Il existe un ν_0 tel que, pour tout $t \in \bar{V}$ et $\nu \geqq \nu_0$, $D^p(\alpha_* \gamma^\nu - f) \in W$. Choisissons un voisinage W' disqué de l'origine dans F' tel que toute somme de $\binom{p+m}{m}$ points de W'

soit contenue dans W, et soit k une constante positive telle que $|a_h| \leqq k$. On peut trouver un $\nu_1 \geqq \nu_0$ tel que $D^h \alpha_*(\gamma^\nu) \in \frac{1}{k} W'$ pour tout $t \in \overline{U} - \overline{V}$, si $\nu \geqq \nu_1$ et $|h| \leqq p$. Il résulte alors que, pour tout $t \in \overline{U}$, si $\nu \geqq \nu_1$, $D^h(\alpha_*(\mu\gamma^\nu) - f) \in W$. Ceci démontre notre assertion.

3. — Familles de domaines dans $\mathbf{C}^n$.

7. Familles différentiables.

a. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$. Soit ω la projection de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^m$; c'est une application ouverte, donc $M = \omega(\mathcal{V})$ est un ouvert de $\mathbf{R}^m$. Désignons par π la restriction de ω à $\mathcal{V}$. Nous dirons que $(\mathcal{V}, \pi, M)$ est une *famille différentiable de domaines dans* $\mathbf{C}^n$. Nous écrirons aussi $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in M}$, où $V_t = \pi^{-1}(t)$ pour $t \in M$. Si $\mathcal{V}$ est de la forme $V \times M$, où V est ouvert dans $\mathbf{C}^n$ et M ouvert dans $\mathbf{R}^m$ nous dirons que la famille est une *famille banale*.

b. Pour tout ouvert $V \subset \mathbf{C}^n$, envisageons l'espace $\mathcal{E}(V)$ des fonctions indéfiniment différentiables muni de la topologie de la convergente compacte des fonctions et de toutes les dérivées. Si U est un ouvert dans $\mathbf{R}^m$ on peut considérer l'espace $\mathcal{E}(U, \mathcal{E}(V))$ des applications indéfiniment différentiables de U dans $\mathcal{E}(V)$ muni de la topologie de la convergence compacte des applications et de toutes leurs dérivées.

On reconnaît que l'espace $\mathcal{E}(U, \mathcal{E}(V))$ est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathcal{E}(V \times U)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $V \times U$ muni de la topologie de la convergence compacte des fonctions et des dérivées.

Si au lieu de $\mathcal{E}(V)$ on envisage l'espace $\mathcal{H}(V)$ des fonctions holomorphes muni de la topologie de la convergence compacte, l'espace analogue $\mathcal{E}(U, \mathcal{H}(V))$ s'identifie à l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $V \times U$ et holomorphes le long des fibres $V \times \{t\}$, $t \in U$.

c. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$. Soit $A^{0,r}$ le faisceau des germes de formes

$$\varphi = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_r} \varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} d\bar{z}_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\alpha_r}.$$

indéfiniment différentiables et de type (o, r) sur $\mathbf{C}^n$. Soit $\bar{\partial} = \bar{\partial}_r : A^{0,r} \to A^{0,r+1}$ l'opérateur défini par

$$\bar{\partial}_r \varphi = \sum_{\alpha_0 < \ldots < \alpha_r} \left\{ \sum_{h=0}^{r} (-1)^h \frac{\partial \varphi_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_h \ldots \alpha_r}}{\partial \bar{z}_{\alpha_h}} \right\} d\bar{z}_{\alpha_0} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\alpha_r}.$$

De manière analogue, soit $\mathfrak{A}$ le faisceau sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$ des germes de fonctions indéfiniment différentiables et holomorphes le long des fibres. Soit $\mathfrak{A}^{0,r}$ le

faisceau des germes des formes indéfiniment différentiables de type $(0, r)$ en les différentielles des fibres. Soit $\bar{\partial}'_r$ l'opérateur $\bar{\partial}: \mathcal{A}^{0,r} \to \mathcal{A}^{0,r+1}$ défini comme tout à l'heure.

De ce qu'on a dit au point b et du théorème 1 du n° 6, on déduit la suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$:

$$(\bigstar) \qquad 0 \to \mathfrak{A} \to \mathcal{A}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}'_0} \mathcal{A}^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}'_1} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}'_{n-1}} \mathcal{A}^{0,n} \to 0.$$

En effet, elle découle de la suite exacte de faisceaux et homomorphismes sur $\mathbf{C}^n$

$$0 \to \mathcal{O} \to A^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_0} A^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} A^{0,n} \to 0$$

et du fait qu'on peut pour tout ouvert $U' \times V'$ de $\mathcal{V}$ identifier $\Gamma(U' \times V', \mathcal{A}^{0,r})$ et $\mathcal{E}^\infty(U', \Gamma(V', A^{0,r}))$, l'opérateur $\bar{\partial}'_r$ dans $\mathcal{A}^{0,r}$ se transformant en $(\bar{\partial}_r)_*$.

On remarquera que les faisceaux $\mathcal{A}^{0,r}$ sont des faisceaux fins et que $\bar{\partial}'$ commute à la multiplication par les fonctions constantes sur les fibres.

Proposition 7. — *Pour une famille banale $\mathcal{V} = V \times M$, si l'on a $H^r(V, \mathcal{O}) = 0$ pour un entier $r \geqq 1$, on a $H^r(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) = 0$.*

Preuve. — L'hypothèse faite sur V et le théorème de Dolbeault (²) montrent que la suite

$$\Gamma(V, A^{0,r-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{r-1}} \Gamma(V, A^{0,r}) \xrightarrow{\bar{\partial}_r} \Gamma(V, A^{0,r+1})$$

est exacte. Il faut démontrer que la suite

$$\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{A}^{0,r-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}'_{r-1}} \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{A}^{0,r}) \xrightarrow{\bar{\partial}'_r} \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{A}^{0,r+1})$$

est exacte.

Or ceci est une conséquence du théorème 1 du n° 6.

d. Désignons par $Z^{0,r}(V)$ l'espace

$$\operatorname{Ker}(\Gamma(V, A^{0,r}) \xrightarrow{\bar{\partial}_r} \Gamma(V, A^{0,r+1}))$$

pour V ouvert dans $\mathbf{C}^n$. De même pour $\mathcal{V}$ ouvert dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$ désignons par $\mathfrak{Z}^{0,r}(\mathcal{V})$ l'espace

$$\operatorname{Ker}(\Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{A}^{0,r}) \xrightarrow{\bar{\partial}'_r} \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{A}^{0,r+1})).$$

Ces deux espaces $Z^{0,r}(V)$ et $\mathfrak{Z}^{0,r}(\mathcal{V})$ sont munis des topologies induites.

(²) Le théorème de Dolbeault dit que $H^r(V, \mathcal{O})$ est isomorphe à

$$\operatorname{Ker}\Big(\Gamma(V, A^{0,r}) \xrightarrow{\bar{\partial}_r} \Gamma(V, A^{0,r+1})\Big) \Big/ \operatorname{Im}\Big(\Gamma(V, A^{0,r-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}_{r-1}} \Gamma(V, A^{0,r})\Big).$$

PROPOSITION 8. — *Soient $V' \subset V$ deux ouverts dans $\mathbf{C}^n$. Si, par restriction, l'image de $Z^{0,r}(V)$ est dense dans $Z^{0,r}(V')$, alors pour tout ouvert $M \subset \mathbf{R}^m$ l'image par restriction de $\mathcal{Z}^{0,r}(V \times M)$ est dense dans $\mathcal{Z}^{0,r}(V' \times M)$.*

Preuve. — Soit $\varphi' \in \mathcal{Z}^{0,r}(V' \times M)$. Comme φ' s'identifie à un élément de $\mathcal{E}^\infty(M, Z^{0,r}(V'))$, par le théorème 2 du n° 6, on peut trouver une suite de fonctions $\{\varphi_\nu\} \in \mathcal{E}^\infty(M, Z^{0,r}(V))$ telle que les images φ'_ν des φ_ν tendent vers φ'. Il résulte alors que les formes φ_ν sont $\bar\partial'$-fermées et ont des images φ'_ν qui tendent vers la forme φ'.

e. PROPOSITION 9. — *Soit $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in M}$ une famille de domaines dans $\mathbf{C}^n$. Supposons que $\mathcal{V}$ soit réunion d'une suite croissante $\mathcal{V}_h = \{V_t(h)\}_{t \in M}$ de sous-familles telles qu'on ait, pour un entier $r \geqq 1$, les propriétés :*

(i) $\bar{\mathcal{V}}_h \subset \mathcal{V}_{h+1}$, $\mathcal{V} = \bigcup_{h \geqq 0} \mathcal{V}_h$, *pour tout compact $K \subset M$, $(\mathbf{C}^n \times K) \cap \bar{\mathcal{V}}_h$ est compact;*

(ii) $H^r(V_t(h), \mathcal{O}) = 0$ *pour tout t et tout h;*

(iii) $\mathcal{Z}^{0,r-1}(\mathcal{V}_{h+1})$ *a une image dense dans $\mathcal{Z}^{0,r-1}(\mathcal{V}_h)$ par restriction. Alors on a $H^r(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) = 0$.*

Preuve.

α. Dans la suite ($\bigstar$) les faisceaux $\mathcal{A}^{0,r}$ étant fins on peut calculer la cohomologie $H^*(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$ au moyen des sections des faisceaux $\mathcal{A}^{0,r}$ en vertu de l'isomorphisme de Dolbeault généralisé (*cf.* GODEMENT [10]).

Soit $\varphi \in \mathcal{Z}^{0,r}(\mathcal{V})$ une forme qui représente une classe de cohomologie de $H^r(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$. Nous démontrerons d'abord que, sur chaque $\mathcal{V}_h$ on peut trouver une forme ψ_h, indéfiniment différentiable, et de type $(0, r-1)$ le long des fibres telle que

$$\varphi|_{\mathcal{V}_h} = \bar\partial' \psi_h.$$

Pour tout $t \in M$ et tout entier $h \geqq 0$ on peut choisir un voisinage U de t dans M tel que

$$\mathcal{V}_h \cap \pi^{-1}(V_i) \subset V_t(h+1) \times V.$$

Ceci est possible en vertu de la propriété (i).

Choisissons un recouvrement localement fini $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M et dans chaque U_i un point t_i, tels que

$$\mathcal{V}_h \cap \pi^{-1}(U_i) \subset V_{t_i}(h+1) \times U_i.$$

Soit $\{\rho_i\}$ une partition indéfiniment différentiable de l'unité, subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Soit $\varphi_i = \rho_i \varphi$. On a $\bar\partial' \varphi_i = 0$ et $\sum \varphi_i = \varphi$. En vertu de

l'hypothèse (ii) et de la proposition 7, on peut trouver une forme ψ_i sur $V_{t_i}(h+1) \times U_i$, indéfiniment différentiable, telle que $\varphi_i = \bar{\partial}' \psi_i$. En multipliant ψ_i par une fonction C^∞ constante le long des fibres, égale à 1 sur le support de φ_i, et dont le support est contenu dans l'image réciproque d'un compact de U_i, on voit qu'on peut supposer que le support de ψ_i est dans l'image réciproque d'un compact de U_i. Il suffit alors de prendre pour ψ_h la restriction à $\mathcal{V}_h$ de $\psi = \sum \psi_i$.

β. Soit $\gamma \in \mathfrak{F}^{0,r-1}(\mathcal{V}_h)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et k entier positif, on peut trouver une forme $\eta \in \mathfrak{F}^{0,r-1}(\mathcal{V}_{h+1})$ telle que (avec des notations évidentes)

$$p_k^{h-1}(\gamma - \eta) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\bar{\mathcal{V}}_{h-1}} |D\alpha\gamma - D\alpha\eta| < \varepsilon.$$

En effet, soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de M avec des ouverts relativement compacts et d'indice borné $\leq s$ (on peut supposer $s = 2m+1$). Avec une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ on peut écrire $\gamma = \sum \gamma_i$ avec les $\gamma_i \in \mathfrak{F}^{0,r-1}(\mathcal{V}_h)$ et à support contenu dans l'image réciproque d'un compact de U_i. A cause de l'hypothèse (iii) on peut trouver $\eta_i \in \mathfrak{F}^{0,r-1}(\mathcal{V}_{n+1})$ à support contenu dans l'image réciproque d'un compact de U_i et telle que $p_k^{h-1}(\gamma_i - \eta_i) < \varepsilon/s$. Il suffit alors de prendre $\eta = \sum \eta_i$ pour avoir la conclusion.

γ. Étant donnée $\varphi \in \mathfrak{F}^{0,r}(\mathcal{V})$, en vertu de (α), on peut sur tout $\mathcal{V}_h$ trouver une forme ψ_h indéfiniment différentiable et de type $(0, r-1)$ telle que

$$\varphi|_{\mathcal{V}_h} = \bar{\partial}' \psi_h.$$

La forme ψ_h est déterminée modulo l'addition d'une forme

$$\eta_h \in \mathfrak{F}^{0,r-1}(\mathcal{V}_h).$$

Étant donnée une série $\sum_1^\infty \varepsilon_s$ à termes positifs et convergente, en vertu de (β) on voit qu'on peut choisir les formes ψ_h de proche en proche de sorte que

$$p_{h-1}^h(\psi_h - \psi_{h-1}) < \varepsilon_h \qquad \text{pour} \quad h = 1, 2, \ldots.$$

Envisageons sur $\mathcal{V}_h$ la série

$$\psi_h + (\psi_{h+1} - \psi_h) + (\psi_{h+2} - \psi_{h+1}) + \ldots.$$

A cause des inégalités établies, elle est convergente à une forme $\tilde{\psi}_h$ indéfiniment différentiable sur $\mathcal{V}_h$ telle que $\bar{\partial}' \tilde{\psi}_h = \varphi|_{\mathcal{V}_h}$. Comme $\tilde{\psi}_{h+1}|_{\mathcal{V}_h} = \tilde{\psi}_h$ la

collection des formes $\{\tilde{\psi}_h\}$ définit une forme globale ψ sur $\mathcal{V}$ indéfiniment différentiable et de type $(0, r-1)$ telle que $\bar{\partial}'\psi = \varphi$. Ceci démontre la proposition.

8. Familles de domaines d'holomorphie. Paires de Runge.

a. Par une *famille de domaines d'holomorphie* dans $\mathbf{C}^n$, on entend une famille $(\mathcal{V}, \pi, M)$ de domaines dans $\mathbf{C}^n$ dont chaque fibre $V_t = \pi^{-1}(t)$ $(t \in M)$ est un domaine d'holomorphie.

Soit $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in M}$ une famille de domaines dans $\mathbf{C}^n$. Désignons par $\mathcal{H}(\mathcal{V}) = \Gamma(\mathcal{V}, \mathfrak{A})$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathcal{V}$ et holomorphes le long des fibres, la topologie étant celle de la convergence compacte des fonctions et des dérivées.

Soit $\mathcal{V}' = \{V'_t\}_{t \in M}$ une sous-famille de $\mathcal{V}$, i. e. pour chaque $t \in M$, V'_t est un ouvert dans V_t. On dit que $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ est une *paire de Runge* si l'image de $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{V}')$ par l'homomorphisme de restriction est dense dans ce dernier espace.

Lorsque M est réduit à un point, on retrouve la définition de paire de Runge pour deux ouverts $V' \subset V$ dans $\mathbf{C}^n$.

Nous dirons qu'une famille $(\mathcal{V}, \pi, M) = \{V_t\}_{t \in M}$ est une *famille régulière* si, pour chaque $t \in M$, on peut trouver un voisinage U_t de t dans M et un ouvert $D_t \subset \mathbf{C}^n$ tels que

(i) $V_t \subset D_t$ et (D_t, V_t) est une paire de Runge;
(ii) $D_t \times U_t \supset \pi^{-1}(U_t)$.

b. Soit K un sous-ensemble compact de $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in M}$. Nous désignerons par $(\hat{K})_{\mathcal{V}}$ l'enveloppe convexe de K par rapport à $\mathcal{V}$

$$(\hat{K})_{\mathcal{V}} = \left\{ x \in \mathcal{V} \;\middle|\; |f(x)| \leq \sup |f(K)| \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{H}(\mathcal{V}) \right\}.$$

Si M est réduit à un point, on retrouve la notion d'enveloppe convexe d'un compact dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$.

Si $\mathcal{V}$ est une famille *régulière*, on démontre facilement que

$$(\hat{K})_{\mathcal{V}} = \bigcup_{t \in M} \left(\widehat{K \cap V_t}\right)_{V_t} \quad (^3).$$

---

(3) L'exemple suivant montre que la condition de régularité pour $\mathcal{V}$ est nécessaire. Soit

$$\mathcal{V} = \mathbf{C} \times \mathbf{R} - \{(0, 0)\} \qquad \text{et} \qquad K = \left\{ (z, t) \in \mathcal{V} \;\middle|\; |z| = 1, -1 \leq t \leq 1 \right\}.$$

On a

$$\left(\widehat{K \cap V_t}\right)_{V_t} = \{ |z| \leq 1 \} \qquad \text{pour} \quad 0 < |t| \leq 1$$

et

$$\left(\widehat{K \cap V_0}\right)_{V_0} = \{ |z| = 1 \}.$$

Donc $\bigcup_t \left(\widehat{K \cap V_t}\right)_{V_t}$ n'est pas fermé.

PROPOSITION 10. — *Soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ deux familles régulières de domaines d'holomorphie. Soit $\mathcal{V}'$ une sous-famille de $\mathcal{V}$. Pour que $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ soit une paire de Runge, il faut et il suffit que pour tout compact $K \subset \mathcal{V}'$ l'ensemble $(\hat{K})_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V}'$ soit compact.*

La démonstration est calquée sur le cas classique et se démontre aisément compte tenu de la proposition 8 du n° 6.

La proposition précédente peut être aussi formulée en disant que, sous les mêmes hypothèses, la condition pour que $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ soit une paire de Runge est que, pour chaque $t \in M$, (V_t, V'_t) soit une paire de Runge.

Soit $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in M}$ une famille de domaines dans $\mathbf{C}^n$. Par polyèdre analytique dans $\mathcal{V}$ nous entendons un sous-ensemble Q fermé dans $\mathcal{V}$ tel que :

(i) pour chaque compact $K \subset M$, $Q \cap \pi^{-1}(K)$ est compact;

(ii) il existe un voisinage U de Q dans $\mathcal{V}$ et des fonctions $g_i \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ telles que

$$Q = \left\{ x \in U \;\middle|\; |g_i(x)| \leqq 1 \right\}$$

de sorte pour chaque $t \in M$ seulement un nombre fini d'inégalités $|g_i(x)| \leqq 1$ soient essentielles.

Soit $\mathcal{V}$ une famille régulière de domaines d'holomorphie et soit Q un polyèdre analytique dans $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{W}$ l'intérieur de Q. On reconnaît à l'aide de la proposition précédente que $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ est une paire de Runge. En particulier, on déduit en raisonnant comme dans le cas classique, que toute famille régulière $\mathcal{V}$ de domaines d'holomorphie est réunion d'une suite croissante $\mathcal{W}_\nu$ de sous-familles de domaines d'holomorphie : $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{W}_\nu$, chaque paire $(\mathcal{V}, \mathcal{W}_\nu)$ étant une paire de Runge, les $\mathcal{W}_\nu$ étant les intérieurs de polyèdres analytiques de $\mathcal{V}$.

Dans ces conditions, il résulte que l'image de l'homomorphisme de restriction $\mathcal{Z}^{0,r}(\mathcal{W}_{\nu+1}) \to \mathcal{Z}^{0,r}(\mathcal{W}_\nu)$ est dense dans le deuxième espace pour $r \geqq 0$. Comme $(\mathcal{W}_{\nu+1}, \mathcal{W}_\nu)$ est une paire de Runge, il suffit de démontrer le lemme suivant :

LEMME. — *Soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ deux familles régulières de domaines d'holomorphie. Soit $\mathcal{V}'$ une sous-famille de $\mathcal{V}$ et supposons que la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ soit de Runge. Alors, pour tout $r \geqq 0$, l'image par restriction de $\mathcal{Z}^{0,r}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{Z}^{0,r}(\mathcal{V}')$ est dense dans le deuxième espace.*

Preuve. — Pour $r = 0$, le fait énoncé n'est autre que la propriété de la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ d'être de Runge.

Soit $r > 0$ et $\varphi \in \mathcal{Z}^{0,r}(\mathcal{V}')$. Soit K un compact contenu dans $\mathcal{V}'$. On peut construire un polyèdre analytique $Q \in \mathcal{V}'$ et contenant K. Le raisonnement employé à la proposition 9.α montre que sur $\mathcal{W} = \mathring{Q}$ on peut trouver une forme ψ indéfiniment différentiable et de type $(0, r-1)$ le long des fibres

telle que $\varphi|_{\mathfrak{W}} = \bar{\partial}'\psi$. Soit ρ une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathcal{V}$, égale à 1 sur un voisinage de K et dont le support est contenu dans $\mathfrak{W}$. La forme $\rho\psi$ peut être considérée comme une forme sur $\mathcal{V}$ en convenant qu'elle soit nulle en dehors du support de ρ. Sur K on a $\varphi = \bar{\partial}'\rho\psi$ et ceci démontre notre assertion.

En particulier, pour toute famille régulière $\mathcal{V}$ de domaines d'holomorphie, on peut appliquer la proposition 9 en utilisant la suite de sous-familles $\{\mathfrak{W}_\nu\}$. On obtient donc le

COROLLAIRE. — *Pour une famille régulière $\mathcal{V}$ de domaines d'holomorphie, on a $H^s(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) = 0$ pour $s > 0$. $\mathfrak{A}$ désignant le faisceau des germes de fonctions indéfiniment différentiables et holomorphes le long des fibres.*

9. Familles analytiques de domaines d'holomorphie.

a. Envisageons le cas où l'espace $\mathbf{R}^m$ est l'espace réel sous-jacent d'un espace numérique complexe $\mathbf{C}^{q-1}[m = 2(q-1)]$. On a alors affaire à des familles analytiques complexes de domaines dans $\mathbf{C}^n$. Nous poserons $d = n + q - 1$.

THÉORÈME 3. — *Pour toute famille régulière analytique de domaines d'holomorphie $(\mathcal{V}, \pi, M)$, $M \subset \mathbf{C}^{q-1}$, on a $H^r(\mathcal{V}, \mathcal{O}) = 0$ pour $r \geqq q$, $\mathcal{O}$ étant le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathcal{V}$.*

Preuve. — Soit $\mathfrak{A}^{0,r}$ le faisceau des germes de formes différentielles sur $\mathcal{V}$ de type $(0, r)$ en les différentielles de la base M et dont les coefficients sont indéfiniment différentiables et holomorphes le long des fibres. Soit $\bar{\partial}_t$ l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux coordonnées complexes conjuguées sur la base. On a la suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathfrak{A}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_t} \mathfrak{A}^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_t} \ldots \xrightarrow{\bar{\partial}_t} \mathfrak{A}^{0,q-1} \to 0.$$

L'exactitude de cette suite de faisceaux se démontre avec le même raisonnement qu'on emploie dans le lemme de Dolbeault-Grothendieck et en remarquant qu'une fonction continue holomorphe en les variables z et t séparément est holomorphe aussi en tant que fonction de l'ensemble des variables (z, t).

Or $\mathcal{V}$ étant régulière, par le corollaire à la fin du numéro précédent, on sait que $H^s(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) = 0$ pour $s > 0$. Comme le faisceau $\mathfrak{A}^{0,r}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}^{\binom{q}{r}}$ on a aussi $H^s(\mathcal{V}, \mathfrak{A}^{0,r}) = 0$ pour tout $s > 0$. On a donc une résolution de longueur $q - 1$ du faisceau $\mathcal{O}$ par des faisceaux de cohomologie nulle. On peut donc calculer les groupes $H^r(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ par la cohomologie du complexe $\bigoplus_r \Gamma(\mathcal{V}, \mathfrak{A}^{0,r})$.

Par la dualité de SERRE [26] on obtient pour la cohomologie à supports compacts le

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses, on a*

$$H_k^s(\mathcal{V}, \mathcal{O}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqq s \leqq d - q.$$

b. Soit $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in M}$, $M \subset \mathbf{C}^{q-1}$ une famille analytique complexe régulière de domaines d'holomorphie. D'après le théorème précédent, on sait que $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}) = 0$. Désignons par $Z^{0,q-1}(\mathcal{V})$ l'espace des formes indéfiniment différentiables sur $\mathcal{V}$, de type $(0, q-1)$ et $\bar{\partial}$-fermées, l'opérateur $\bar{\partial}$ étant l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux coordonnées complexes conjuguées sur $\mathcal{V}$. Munissons cet espace de la topologie de la convergence compacte des coefficients et de toutes leurs dérivées.

THÉORÈME 4. — *Soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ deux familles régulières de domaines d'holomorphie dans $\mathbf{C}^{d-q+1} \times \mathbf{C}^{q-1}$. Supposons que $\mathcal{V}'$ soit une sous-famille de $\mathcal{V}$ et que la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ soit une paire de Runge. Alors l'image de $Z^{0,l}(\mathcal{V})$ dans $Z^{0,l}(\mathcal{V}')$ par l'holomorphisme de restriction est dense dans ce dernier espace, dès que $l \geqq q-1$.*

Preuve. — Désignons par $\mathfrak{A}^{0,l}$ le faisceau des germes de formes différentielles sur $\mathcal{V}$ de type $(0, l)$ en les différentielles de base, à coefficients indéfiniment différentiables et holomorphes le long des fibres. Désignons par $A^{0,l}$ le faisceau des germes des formes différentielles de type $(0, l)$ sur $\mathcal{V}$ à coefficient indéfiniment différentiables. On a sur $\mathcal{V}$ les deux suites exactes de faisceaux et d'homomorphismes :

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathfrak{A}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_t} \mathfrak{A}^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_t} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_t} \mathfrak{A}^{0,q-1} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O} \to A^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{0,d} \to 0,$$

où $\bar{\partial}_t$ désigne la différentiation extérieure par rapport aux coordonnées complexes conjuguées de la base.

Ces deux résolutions sont composées de faisceaux acycliques, la première en vertu de la remarque faite en *a*, la deuxième par le fait que les faisceaux $A^{0,l}$ sont fins.

Il en résulte que toute forme différentielle de type $(0, l)$ qui est C^∞ sur $\mathcal{V}$ et $\bar{\partial}$-fermée est co-homologue à une forme du même type en les seules différentielles de base, $\bar{\partial}_t$-fermée, à coefficients C^∞ et holomorphes le long des fibres. Pour toute forme $\varphi \in Z^{0,l}(\mathcal{V})$ on peut écrire

$$\varphi = \psi + \bar{\partial}\gamma, \qquad \text{où} \quad \psi \in \Gamma(\mathcal{V}, \mathfrak{A}^{0,l}) \quad \text{et} \quad \gamma \in \Gamma(\mathcal{V}, A^{0,l-1});$$

on aura $\gamma = 0$ si $l = 0$ et $\psi = 0$ si $l \geqq q$. On a la même propriété pour $\mathcal{V}'$.

Soit à présent $\varphi' \in Z^{0,l}(\mathcal{V}')$. Écrivons $\varphi' = \psi' + \bar{\partial}\gamma'$, avec

$$\psi' \in \Gamma(\mathcal{V}', \mathfrak{A}^{0,l}), \qquad \gamma' \in \Gamma(\mathcal{V}', A^{0,l-1}).$$

Soit K un compact contenu dans $\mathcal{V}'$. Puisque $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ est une paire de Runge on peut approcher la composante de ψ', donc aussi ψ', autant qu'on veut sur K par une forme $\psi \in \Gamma(\mathcal{V}, \mathfrak{A}^{0,l})$. Soit γ la forme déduite de γ' par multiplication avec une fonction C^∞ à support dans $\mathcal{V}'$ et qui vaut 1 sur K. Envisageons γ comme une forme sur $\mathcal{V}$ en la prenant égale à 0 en dehors de $\mathcal{V}'$. La forme $\psi + \bar{\partial}\gamma$ approche ψ' sur K autant qu'on veut. Comme toute forme de $\Gamma(\mathcal{V}, \mathfrak{A}^{0,l})$ est $\bar{\partial}$-fermée si $l \geqq q-1$, on a

$$\psi + \bar{\partial}\gamma \in Z^{0,l}(\mathcal{V}).$$

Par dualité, on obtient pour la cohomologie à support compact le

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses l'homomorphisme naturel*

$$H_k^{d-l}(\mathcal{V}', \mathcal{O}) \to H_k^{d-l}(\mathcal{V}, \mathcal{O})$$

est injectif lorsque $l \geqq q-1$.

Preuve. — On a la suite exacte d'espaces de Fréchet

$$(\bigstar) \qquad 0 \to Z^{0,l}(\mathcal{V}) \xrightarrow{i} \Gamma(\mathcal{V}, A^{0,l}) \xrightarrow{\bar{\partial}^l} \Gamma(\mathcal{V}, A^{0,l+1}),$$

les applications i, $\bar{\partial}^l$ étant linéaires et continues. De plus, les hypothèses entraînent que $H^{l+1}(\mathcal{V}, \mathcal{O}) = 0$ et donc l'exactitude de la suite

$$(\bigstar\bigstar) \qquad \Gamma(\mathcal{V}, A^{0,l}) \xrightarrow{\bar{\partial}^l} \Gamma(\mathcal{V}, A^{0,l+1}) \xrightarrow{\bar{\partial}^{l+1}} \Gamma(\mathcal{V}, A^{0,l+2}).$$

De l'exactitude de $(\bigstar\bigstar)$, on déduit que l'image de $\bar{\partial}^l$ est égale au noyau de $\bar{\partial}^{l+1}$, donc fermée; le théorème de Banach prouve alors que $\bar{\partial}^l$ est un homomorphisme.

Par passage aux espaces duaux dans $(\bigstar)$ et en désignant par $K^{r,s}$ l'espace des formes de type (r, s) sur $\mathcal{V}$ à coefficients distributions à support compact, on obtient la suite exacte (*cf.* Serre [26])

$$0 \leftarrow (Z^{0,l}(\mathcal{V}))' \xleftarrow{{}^t i} K^{d,d-l} \xleftarrow{{}^t\bar{\partial}^l} K^{d,d-l-1}.$$

De là, en identifiant $\mathcal{O}$ au faisceau des d-formes holomorphes sur $\mathcal{V}$, on a

$$H_k^{d-l}(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \subset (Z^{0,l}(\mathcal{V}))'.$$

Le transposé λ de l'homomorphisme de restriction envoie $(Z^{0,l}(\mathcal{V}'))'$ *injectivement* dans $(Z^{0,l}(\mathcal{V}))'$, en vertu du théorème précédent. Par conséquent, la restriction de λ à $H_k^{d-l}(\mathcal{V}', \mathcal{O})$ est aussi injective.

10. Familles de domaines pseudoconvexes. — Soit D un ouvert dans $\mathbf{C}^n$ et soit φ une fonction définie sur D, indéfiniment différentiable à valeurs réelles, fortement q-pseudoconvexe (avec $q \geqq 1$) ([4]). Soit $\xi_0 \in D$ et soit

$$Y = \{ z \in D \mid \varphi(z) < \varphi(\xi_0) \}.$$

Supposons les coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ de $\mathbf{C}^n$ choisies de sorte que ξ_0 soit à l'origine et que sur l'espace $z_1 = \ldots = z_{q-1} = 0$ la fonction φ soit fortement plurisousharmonique au voisinage de l'origine. Posons

$$z_1 = t_1, \quad \ldots, \quad z_{q-1} = t_{q-1}; \qquad z_q = \xi_1, \quad \ldots, \quad z_n = \xi_{n-q+1}$$

et soit $\varphi = \varphi(\xi, t)$ la fonction envisagée.

Choisissons $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ de sorte que pour tout t, tel que $\| t \| < \varepsilon$ ([5]) la fonction $\psi_t(\xi) = \varphi(\xi, t)$ des variables ξ soit fortement plurisousharmonique dans le polycylindre $\| \xi \| \leqq \rho$.

Soient U^*, U deux ouverts d'holomorphie contenant ξ_0, tels que $U \Subset U^*$ et contenu dans le polycylindre

$$Q = \{ (\xi, t) \in \mathbf{C}^n \mid \| \xi \| < \rho, \| t \| < \varepsilon \}$$

et supposons que (U^*, U) soit une paire de Runge. Par exemple, on peut choisir pour U^*, U deux boules concentriques ou deux polyèdres analytiques dans le polycylindre Q.

On peut considérer les deux ouverts $\mathcal{V} = U$, $\mathcal{W} = U \cap Y$ par rapport à la projection sur l'espace des t comme deux familles analytiques de domaines d'holomorphie dépendant de $q-1$ paramètres. L'assertion concernant $\mathcal{V}$ découle du fait que, $\mathcal{V}$ étant un domaine d'holomorphie, les sections de $\mathcal{V}$ avec les espaces $z_1 = t_1^0, \ldots, z_{q-1} = t_{q-1}^0$, pour $\| t^0 \| < \varepsilon$ sont aussi des domaines d'holomorphie.

L'assertion concernant $\mathcal{W}$ découle du théorème suivant dont la forme générale est due à Narasimhan [19] :

Si X est un espace de Stein et p une fonction différentiable plurisousharmonique sur X, alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\{ p(x) < \alpha \}$ est de Runge dans X et un espace de Stein ([6]).

([4]) Une fonction φ à valeurs réelles, C^∞, définies sur un ouvert $D \subset \mathbf{C}^n$ est dite *fortement q-pseudoconvexe* si la forme hermitienne

$$L(\varphi)_\xi = \sum \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} \right)_\xi u_\alpha \bar{u}_\beta$$

à $n-q+1$ valeurs propres > 0, en tout point $\xi \in D$ (*cf.* [1]).

([5]) On convient de noter $\| x \|$ le nombre $\sup_{1 \leqq i \leqq k} | x_i |$ pour tout point $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{C}^k$.

([6]) Pour un domaine $X \subset \mathbf{C}^n$, ce théorème a été démontré par Behnke et Stein [2]. Pour une variété X, ce théorème est déjà dans Doquier et Grauert [7].

De plus, remarquons que, si (X, X') est une paire de Runge de domaines d'holomorphie [telle que (U^*, U)], et si V est un sous-espace analytique fermé de X, la paire $(V, X' \cap V)$ est aussi une paire de Runge. On déduit de là que $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ sont des familles *régulières* de domaines d'holomorphie et que la paire $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ est une paire de Runge. Nous pouvons donc énoncer la proposition snivante :

PROPOSITION 11. — *Soit D ouvert dans $\mathbf{C}^n$ et φ une fonction C^∞ fortement q-pseudoconvexe sur D. Soit $\xi_0 \in D$ et soit*

$$Y = \{ z \in D \mid \varphi(z) < \varphi(\xi_0) \}.$$

Si U^* est un voisinage d'holomorphie de ξ_0 suffisamment petit dans D, pour tout voisinage d'holomorphie $U \Subset U^*$ de ξ_0 qui soit de Runge dans U^* on a

$H^r(U \cap Y, \mathcal{O}) = 0$ pour $r \geqq q$ et $H_k^s(U \cap Y, \mathcal{O}) = 0$ pour $0 \leqq 1 \leqq n - q$;
$Z^{0,l}(U, \mathcal{O}) \to Z^{0,l}(U \cap Y, \mathcal{O})$ a une image dense pour $l \geqq q - 1$;
$H_k^{n-l}(U \cap Y, \mathcal{O}) \to H_k^{n-l}(U, \mathcal{O})$ est injectif pour $l \geqq q - 1$.

Remarque. — On peut éviter l'utilisation du théorème général de Narasimhan par un argument direct. Pour tout t, on écrit le développement de Taylor de $\psi_t(\xi)$ au voisinage de $\xi^{(1)}$

$$\psi_t(\xi) = \psi_t(\xi^{(1)}) + 2\,\mathrm{Re}\, f_t(\xi^{(1)}, \xi) + L(\psi_t)_{\xi^{(1)}} + [3],$$

où $f_t(\xi^{(1)}, \xi)$ est une fonction holomorphe de ξ (en réalité un polynome du second degré), où $L(\psi_t)_{\xi^{(1)}}$ est la forme de Lévi en les variables ξ au point $\xi^{(1)}$ et où $[3]$ désigne un infiniment petit du 3e ordre par rapport à $\|\xi - \xi^{(1)}\|$. Si ρ et ε sont petits, $L(\psi_t)_{\xi^{(1)}} + [3] > 0$ pour $\xi \neq \xi^{(1)}$ et la considération de la fonction $e^{f_t(\xi^{(1)}, \xi)}$ permet de démontrer que

$$\Delta_t = \{ \xi \mid \|\xi\| < \rho,\ \psi_t(\xi) < \psi_0(0) \}$$

est holomorphiquement convexe par rapport au polycylindre $\|\xi\| < \rho$.

11. Familles de domaines d'holomorphie troués.

a. Envisageons dans $\mathbf{C}^{n+p}$, pour $p > 0$, les domaines suivants :

$$\Delta_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} < |z_\alpha| < 1 \\ \quad |z_\beta| < 1 \qquad \text{pour} \quad \beta \neq \alpha, \quad 1 \leqq \beta \leqq n + p \end{cases} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq n).$$

Soit

$$\Delta_0 = \begin{cases} |z_\mu| < 1 & 1 \leqq \mu \leqq n, \\ |z_{n+\nu}| < \frac{1}{2} & 1 \leqq \nu \leqq p, \end{cases}$$

et posons

$$Y' = \bigcup_{\alpha=0}^{n} \Delta_\alpha .$$

LEMME 1 (J. FRENKEL [9]). *On a* $H^r(Y', \mathcal{O}) = 0$ *pour* $r \neq 0, n$.

Preuve. — La démonstration est copiée avec des changements infinitésimaux de la thèse de FRENKEL. Nous en donnons une esquisse pour la commodité du lecteur.

Soit f holomorphe sur $\Delta_1 \cap \Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}$, avec $\alpha_s \neq 1$ pour $1 \leq s \leq q$. Elle a un développement de Laurent par rapport à z_1

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{c_h(z_2, \ldots, z_{n+p})}{z_1^h} + \sum_0^\infty a_h(z_2, \ldots, z_{n+p})\, z_1^h .$$

Posons

$$e_1 f = \sum_0^\infty a_h(z_2, \ldots, z_{n+p})\, z_1^h ,$$

c'est une fonction holomorphe sur $\Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}$. De même, on définit les opérateurs e_i pour $1 \leq i \leq n$. On vérifie que :

α. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\Delta_i \cap \Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \hat{\Delta}_{\alpha_r} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{e_i} & \Gamma(\Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \hat{\Delta}_{\alpha_r} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O}), \\
\downarrow r & & \downarrow r \\
\Gamma(\Delta_i \cap \Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\quad e_i \quad} & \Gamma(\Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O}),
\end{array}$$

r étant les homomorphismes de restriction.

β. l'homomorphisme composé

$$\Gamma(\Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O}) \xrightarrow{r} \Gamma(\Delta_i \cap \Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O}) \xrightarrow{e_i} \Gamma(\Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}, \mathcal{O})$$

est l'identité.

Soit f une q-cochaîne alternée sur le recouvrement $\{\Delta_\alpha\}$ de Y'. Posons

$$k_i f(\Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}) = e_i f(\Delta_i \cap \Delta_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q}).$$

Compte tenu de α et β on vérifie que si

$$\sigma = \Delta_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \Delta_{\alpha_q} \qquad \text{et} \qquad i \notin \{\alpha_0, \ldots, \alpha_q\},$$

on a

$$f(\sigma) - (\delta k_i f)(\sigma) - (k_i\, \delta f)(\sigma) = 0.$$

Soit π_i l'application $f \to f - \delta k_i f - k_i\, \delta f$. Elle commute avec δ comme il est immédiat de vérifier.

Il en est de même de l'application $\pi = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \ldots \circ \pi_1$. Or si f est un q-cocycle alterné et si $1 \leq q \leq n-1$, alors πf est un q-cocycle alterné cohomologue à f. Mais πf est toujours nul, sauf peut-être si $q = n-1$ sur $\sigma = \Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_n$. Dans ce cas, la condition $\delta \pi f = 0$ entraîne que πf est nul sur la partie $\Delta_0 \cap \Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_n$ de σ. Donc $\pi f = 0$ en tout cas. Comme $\{\Delta_\alpha\}$ est un recouvrement de Stein de Y' on a la conclusion cherchée.

b. α. Soit $\varphi : D \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment différentiable définie sur un ouvert $D \subset \mathbf{C}^n (n \geq 2)$ et fortement plurisousharmonique.

Soit $\xi_0 \in D$ et envisageons le développement de Taylor de φ au point ξ_0

$$\varphi(z) = \varphi(\xi_0) + 2\operatorname{Re} f(\xi_0, z) + L_{\xi_0}(\varphi) + [3]_{\xi_0}$$

où $[3]_{\xi_0}$ désigne un infiniment petit du 3e ordre par rapport à $\|z - \xi_0\|$ et où

$$f(\xi_0, z) = \sum_\nu (z_\nu - \xi_{0,\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\right)_{\xi_0} + \sum_{\mu,\nu} (z_\nu - \xi_{0,\nu})(z_\mu - \xi_{0,\mu}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial z_\mu}\right)_{\xi_0},$$

$$L_{\xi_0}(\varphi) = \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}\right)_{\xi_0} (z_\nu - \xi_{0,\nu})(\bar{z}_\mu - \bar{\xi}_{0,\mu}).$$

Par hypothèse, $L_{\xi_0}(\varphi)$ est définie positive. On peut donc choisir un voisinage U de ξ_0 dans D et une constante $a > 0$ tels que pour $z, z' \in U$, $z \neq z'$, on ait

$$(\bigstar) \qquad \frac{L_{z'}(\varphi)}{\|z - z'\|^2} > a, \qquad \frac{|[3]_{z'}|}{\|z - z'\|^2} < \frac{1}{2} a.$$

Soit

$$Y' = \left\{ z \in D \;\middle|\; \varphi(z) > \varphi(\xi_0) \right\}.$$

Si $f(\xi_0, z) \not\equiv 0$ sur l'hypersurface analytique $\{f = 0\} \cap U$, on a $\varphi(z) > \varphi(\xi_0)$ sauf au point ξ_0. Si $f(\xi_0, z) \equiv 0$ dans U tout entier, on a $\varphi(z) > \varphi(\xi_0)$ sauf au point ξ_0.

On peut donc choisir une fonction holomorphe $f \not\equiv 0$ dans U, avec $f(\xi_0) = 0$, et telle que sur $\{f = 0\}$ dans U on ait $\varphi(z) > \varphi(\xi_0)$ sauf au point ξ_0.

Posons $\xi_\nu = k_\nu(z_\nu - \xi_{0,\nu})$, les constantes $k_\nu > 0$ étant choisies de sorte que le polycylindre $\|\xi\| < 1$ soit un sous-ensemble relativement compact de U.

Choisissons $\varepsilon > 0$ de sorte que, pour tout $c \in \mathbf{C}$, avec $|c| < \varepsilon$, la frontière $\partial\{f = c, \|\xi\| < 1\}$ de l'ensemble $f = c$ dans $\|\xi\| < 1$ soit contenue dans Y'.

Si ε est suffisamment petit, on peut également démontrer que les ouverts définis par

$$|f| < \varepsilon, \qquad |\xi_i| < 1 \quad (i \neq \alpha), \qquad \frac{1}{2} < |\xi_\alpha| < 1 \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

sont aussi contenus dans Y'.

Posons finalement

$$\xi_0 = \frac{2f - \varepsilon}{2\varepsilon - f}.$$

Lorsque f varie dans le cercle $|f| < \varepsilon$, ξ_0 varie dans le cercle $|\xi_0| < 1$, le point $f = \frac{\varepsilon}{2}$ étant envoyé dans le point $\xi_0 = 0$.

Sur $\left\{f = \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap U$, on a $\varphi(z) > \varphi(\xi_0)$, à cause des conditions ($\bigstar$) et du choix de f. Donc il existe une constante $0 < b < 1$ telle que l'ouvert $|\xi_0| < b$, $|\xi_i| < 1$, $1 \leq i \leq n$, soit contenu dans Y'.

En conclusion, on a déterminé $n+1$ fonctions holomorphes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ dans U telles que :

(i) l'ouvert

$$|\xi_0| < 1, \qquad |\xi_i| < 1 \quad \text{pour } i \neq \alpha, \qquad \frac{1}{2} < |\xi_\alpha| < 1$$

est contenu dans Y' pour tout $\alpha = 1, \ldots, n$;

(ii) l'ouvert

$$|\xi_0| < b, \qquad |\xi_i| < 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

est contenu dans Y';

(iii) l'application $z \to \xi$ est une application biholomorphe de l'ouvert $P = \{|\xi_i| < 1,\ 0 \leq i \leq n\}$ sur un sous-ensemble analytique du polycylindre $\|\xi\| < 1$ de $\mathbf{C}^{n+1}$.

β. Choisissons $\eta > 0$ si petit que l'ouvert

$$P_\eta = \{|\xi_i| < 1 + \eta,\ 0 \leq i \leq n\}$$

soit contenu dans U. Soit Δ le compact de P_η défini par les inégalités

$$\varphi(z) \leq \varphi(\xi_0), \qquad |\xi_i| \leq 1.$$

D'après le théorème cité de Narasimhan [19] ou par un argument direct (*cf.* n° 10, Remarque), on voit que Δ coïncide avec sa propre enveloppe $\hat{\Delta}$ par rapport à P_η. On peut donc construire une suite décroissante de polyèdres

$$Q_\nu = \left\{z \in P_\eta \;\middle|\; |f_{\nu,i}(z)| < \frac{1}{2},\ 1 \leq i \leq r_\nu\right\}$$

tendant vers

$$\Delta : \quad Q_{\nu+1} \subset Q_\nu, \qquad \bigcap_\nu Q_\nu = \Delta.$$

Envisageons la suite d'ouverts $W_\nu = P - (P \cap Q_\nu)$. C'est une suite croissante d'ouverts telle que $\bigcup W_\nu = P \cap Y'$. Sans perte de généralité, on

peut supposer que chaque fonction $f_{\nu,i}$ est en valeur absolue < 1 sur P.

Pour chaque ν, envisageons l'application τ_ν de P dans $\mathbf{C}^{n+r_\nu+1}$ définie par

$$\begin{aligned} w_0 &= \xi_0, & \ldots, \quad & w_n = \xi_n, \\ w_{n+1} &= f_{\nu,1}, & \ldots, \quad & w_{n+r_\nu} = f_{\nu,r_\nu}. \end{aligned}$$

Elle envoie le polycylindre P biholomorphiquement sur un sous-ensemble analytique $\tau_\nu(P)$ du polycylindre $W = \{ \| w \| < 1 \}$.

Envisageons les domaines

$$\Delta_\alpha = \begin{cases} |w_i| < 1 & (i \neq \alpha), \\ \frac{1}{2} < |w_\alpha| < 1 & \text{pour} \quad \alpha = 1, \ldots, n + r_\nu \end{cases}$$

et le domaine

$$\Delta_0 = \begin{cases} |w_0| < b \\ |w_i| < 1 & (i \neq 0). \end{cases}$$

Soit $Z_\nu \bigcup_{\alpha=0}^{n+r_\nu} \Delta_\alpha$. Il en résulte que

$$\tau_\nu(W_\nu) \subset Z_\nu \cap \tau_\nu(P).$$

Soit $M_\nu = \tau_\nu^{-1}(Z_\nu \cap \tau_\nu(P))$. C'est une suite croissante d'ouverts telle que $\bigcup_\nu M_\nu = P \cap Y'$.

Soit $N = n + r_\nu + 1$. Soit $\mathcal{J}$ le faisceau d'idéaux défini dans W par la sous-variété analytique $\tau_\nu(P)$. Comme le plongement τ_ν s'étend à un voisinage de $\overline{P}$, on aura sur W une résolution du type

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{O}^{p_{N-n}} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_1} \to \mathcal{J} \to 0$$

en vertu des propositions 1 et 3. Du lemme 1, on tire que $H^s(Z_\nu, \mathcal{O}) = 0$ pour $s \neq 0, N-1$. On aura donc

$$H^r(Z_\nu, \mathcal{J}) \simeq H^{r+N-n-1}\left(Z_\nu, \mathcal{O}^{p_{N-n}}\right)$$

pour $r > 0$ pourvu que $r + N - n - 1 < N - 1$, i. e. pour $0 < r < n$.

En particulier, $H^1(Z_\nu, \mathcal{J}) = 0$, car on suppose $n > 1$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(W, \mathcal{J}) & \to & H^0(W, \mathcal{O}) & \to & H^0(P, \mathcal{O}) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H^0(Z_\nu, \mathcal{J}) & \to & H^0(Z_\nu, \mathcal{O}) & \to & H^0(M_\nu, \mathcal{O}) & \to & 0 \end{array}$$

les horizontales sont des suites exactes. Les trois premiers et le dernier homomorphismes verticaux sont des bijections par le théorème d'Hartogs. Il en découle que $H^0(P, \mathcal{O}) \to H^0(M_\nu, \mathcal{O})$ est aussi une bijection.

Finalement, de la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\tau_\nu(P)} \to 0$$

utilisée tout à l'heure, on déduit que $H^r(M_\nu, \mathcal{O}) \simeq H^{r+1}(Z_\nu, \mathcal{J})$ si

$$r+1 < N-1.$$

Donc $H^r(M_\nu, \mathcal{O}) = 0$ pour $0 < r < n-1$.

En conclusion, on a construit dans un voisinage P de ξ_0 une suite croissante d'ouverts $\{M_\nu\}$ tels que :

(i) $\bigcup_\nu M_\nu = P \cap Y'$;

(ii) $H^0(P, \mathcal{O}) \to H^0(M_\nu, \mathcal{O})$ est bijectif;

(iii) $H^r(M_\nu, \mathcal{O}) = 0$ pour $0 < r < n-1$.

De la proposition 9 on déduit le lemme suivant :

Lemme 2. — *Soit D un ouvert dans $\mathbf{C}^n$, $n \geqq 2$, et φ une fonction C^∞ sur D fortement plurisousharmonique. Soit $\xi_0 \in D$ et soit*

$$Y' = \{z \in D \mid \varphi(z) > \varphi(\xi_0)\}.$$

Il existe un système fondamental de voisinages d'holomorphie P de ξ_0 dans D tels que

(i) $H_0(P, \mathcal{O}) \to H_0(P \cap Y', \mathcal{O})$ est bijectif (7);

(ii) $H^r(P \cap Y', \mathcal{O}) = 0$ pour $0 < r < n-1$.

c. Nous voulons démontrer à présent la

Proposition 12. — *Soient D un ouvert dans $\mathbf{C}^n$ et φ une fonction C^∞ fortement q-pseudoconvexe sur D, $n-q \geqq 1$. Pour tout point $\xi_0 \in D$, on peut trouver un système fondamental de voisinages d'holomorphie Q de ξ_0 tels que, en désignant par Y' l'ensemble $\{z \in D \mid \varphi(z) > \varphi(\xi_0)\}$, on ait :*

(i) *$H^0(Q, \mathcal{O}) \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O})$ est bijectif;*

(ii) *$H^r(Q \cap Y', \mathcal{O}) = 0$ pour $0 < r < n-q$.*

Preuve. — α. Il existe un espace linéaire L de dimension $n-q+1$ passant par ξ_0 tel que $\varphi|_L$ soit fortement plurisousharmonique sur L au voisinage de ξ_0. Soit U un voisinage de ξ_0 dans D tel que, sur les sections de U par les espaces linéaires de dimension $n-q+1$ parallèles à L, φ soit fortement plurisousharmonique.

---

(7) Ce fait n'est autre qu'un aspect particulier du « théorème de continuité », *cf.* Behnke-Thullen [3], p. 49.

Supposons ξ_0 à l'origine, et que $z_1 = \ldots = z_{q-1} = 0$ soient les équations de L. Posons $t_1 = z_1, \ldots, t_{q-1} = z_{q-1}$, $\xi_1 = z_q, \ldots, \xi_{n-q+1} = z_n$. Supposons le polycylindre $\| t \| < 1$, $\| \xi \| < 1$ contenu dans U. Sur l'espace $L = \{ t = 0 \}$ effectuons la construction d'un petit polyèdre P au voisinage de l'origine satisfaisant aux conditions du lemme 2, par rapport à la fonction

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi, 0).$$

Soit

$$Y' = \{ z \in D \mid \varphi(z) > \varphi(\xi_0) \}$$

et soit Y'_t la section de Y' par l'espace $z_1 = t_1, \ldots, z_{q-1} = t_{q-1}$. On peut trouver un $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$, si petit que le polyèdre $P \times \{ t \}$ et l'ouvert Y'_t vérifient les conclusions du lemme 2 pour $\| t \| < \varepsilon$.

β. Soit $M = \{ \| t \| < \varepsilon \}$ et posons

$$Q = P \times M \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V} = Q \cap Y'.$$

Envisageons $\mathcal{V} = \{ V_t \}_{t \in M}$ comme une famille de domaines dans $\mathbf{C}^{n-q+1}$, V_t étant l'ouvert $Q \cap Y'_t$.

Avec les mêmes notations qu'au théorème 3, en utilisant le lemme 2 et la proposition 9, on déduit avec un raisonnement analogue que $H^r(\mathcal{V}, \mathfrak{A}^{0,s}) = 0$ pour $s \geqq 0$, et $0 < r < n - q$ (8). On peut donc représenter chaque classe de cohomologie de $H^r(\mathcal{V}, \mathcal{O})$, pour $0 < r < n - q$, par une forme ψ de type

---

(8) Précisément on raisonnera de la manière suivante. Pour tout $t \in M$ on peut écrire la fibre Y'_t comme réunion d'une suite croissante d'ouverts $M_\nu(t)$ tels que

(i) $H^r(M_\nu(t), \mathcal{O}) = 0$, $0 < r < n < q$;
(ii) $H^0(P \times \{ t \}, \mathcal{O}) \to H^0(M_\nu(t), \mathcal{O})$ est bijectif.

Soit K un compact dans $\mathcal{V}$. Pour tout $t \in M$ il existe un voisinage $U(t)$ de t dans M tel que

$$\pi^{-1}(U(t)) \cap K \subset U(t) \times M_{\nu_t}(t).$$

On peut donc choisir un recouvrement $\mathfrak{U} = \{ U_i(t_i) \}$ localement fini de M avec des ouverts relativement compacts dans M tel que pour chaque $U_i(t_i)$ on ait l'inclusion précédente.

Posons $\mathcal{W}(K) = \bigcup_i U(t_i) \times M_{\nu_{t_i}}(t_i)$. Si $0 < r < n - q$ pour toute forme $\varphi^{0,r} \in \mathfrak{Z}^{0,r}(\mathcal{V}^r)$ on peut alors trouver une forme $\varphi^{0,r-2}$ sur $\mathcal{W}(K)$ indéfiniment différentiable et de type $(0, r-1)$ en les différentielles le long des fibres telle que $\varphi^{0,r}|_{\mathcal{W}} = \bar{\partial} \psi^{0,r-1}$.

Ceci étant, soit $\{ K_s \}$ une suite croissante de compacts de $\mathcal{V}$, tels que

$$K_s \subset \mathring{K}_{s+1} \mathcal{V} = \bigcup_s K_s.$$

Posons $\mathcal{W}_s = \mathcal{W}(K_s)$.

Il suit de là que $\mathfrak{Z}^{0,r}(\mathcal{V}) \to \mathfrak{Z}^{0,r}(\mathcal{W}_s)$ a une image dense pour $0 \leqq r < n - q$. Le cas $r = 0$ découle immédiatement de la condition (ii), car toute fonction indéfiniment diffé-

$(0, r)$ en les différentielles de base, à coefficients indéfiniment différentiables et holomorphes le long des fibres et $\bar{\partial}_t$ fermée.

Les coefficients de ψ s'étendent de manière naturelle à des fonctions sur $P \times M$ holomorphes sur chaque fibre $P \times \{t\}$. En regardant le développement de Taylor en chaque point et le prolongement analytique des coefficients de ψ, ou en utilisant l'intégrale de Weil (compte tenu du fait que la frontière distinguée de $P \times \{t\}$ est dans Y'_t et restreignant un peu et génériquement le polyèdre $P \times \{t\}$), on reconnaît que les fonctions étendues sont des fonctions indéfiniment différentiables. En plus, la forme étendue ψ reste $\bar{\partial}_t$ fermée.

Il résulte donc que l'homomorphisme de restriction

$$H^r(Q, \mathcal{O}) \to H^r(\mathcal{V}, \mathcal{O})$$

est surjectif pour $0 \leq r < n - q$. Pour $r = 0$, ce sera un isomorphisme et comme $H^r(Q, \mathcal{O}) = 0$ pour $r > 0$, on a aussi la deuxième partie de la conclusion.

Par dualité, pour les mêmes hypothèses, on obtient le

Corollaire. — *On a $H^s_k(Q \cap Y', \mathcal{O}) = 0$ pour $q + 1 < s < n$ et l'homomorphisme $H^n_k(Q \cap Y', \mathcal{O}) \to H^n_k(Q, \mathcal{O})$ est bijectif si $n > q + 1$.*

Preuve. — On a la suite exacte d'espaces de Fréchet :

$$\Gamma(Q \cap Y', A^{0,r-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(Q \cap Y', A^{0,r}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(Q \cap Y', A^{0,r+1}).$$

La deuxième application $\bar{\partial}$ sera un homomorphisme si $H^{r+1}(Q \cap Y', \mathcal{O}) = 0$, i. e. pour $r + 1 < n - q$. Par la dualité de Serre, on a donc la première assertion.

De plus, la suite

$$0 \to H^0(Q, \mathcal{O}) \xrightarrow{i} \Gamma(Q, A^{0,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(Q, A^{0,1})$$

est aussi exacte et $\bar{\partial}$ est un homomorphisme, car $H^1(Q, \mathcal{O}) = 0$. De même pour $Q \cap Y'$ au lieu de Q, en vertu de la proposition précédente, car $n > q + 1$. En dualisant, on a

$$H^n_k(Q, \mathcal{O}) \simeq (H^0(Q, \mathcal{O}))', \qquad H^n_k(Q \cap Y', \mathcal{O}) \simeq (H^0(Q \cap Y', \mathcal{O})).$$

De là notre affirmation.

---

rentiable et holomorphe le long des fibres de $\mathcal{W}_s$ se prolonge à une fonction, holomorphe le long des fibres sur $Q = P \times M$, et qui est aussi indéfiniment différentiable sur Q comme il résulte du prolongement analytique.

Le raisonnement de la proposition 9 permet alors de conclure que

$$H^r(\mathcal{V}, \mathfrak{A}) = 0 \qquad \text{pour } 0 < r < n - q$$

Exemple. — Soit D un ouvert d'holomorphie dans $\mathbf{C}^n$, $z^{(1)}, \ldots, z^{(k)}$ des points de D. Soient U_i, pour $i = 1, \ldots, k$, des boules disjointes de centre $z^{(i)}$ dans D. De la suite exacte pour le couple $\bigcup_{i=1}^{k} U_i \subset D$, on déduit que

$$H^r\Big(D - \bigcup_i U_i, \mathcal{O}\Big) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < r < n - 1.$$

Par approximation, si $n > 2$, on obtient (propos. 9) $H^r\Big(D - \bigcup z^{(i)}, \mathcal{O}\Big) = 0$. Ce résultat pourrait aussi être déduit comme au lemme 2. Ceci étant, soit A un sous-ensemble analytique de dimension k dans le polycylindre $P = \{ \| z \| < 1 \}$ de $\mathbf{C}^n$. Supposons que les espaces $z_1 = c_1, \ldots, z_k = c_k$, $\| c \| < 1$ coupent A en un nombre fini de points (pour tout point d'un ensemble analytique, il existe toujours un voisinage de telle sorte). On aura alors comme à la proposition précédente,

$$H^r(P - A, \mathcal{O}) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < r < n - k - 1 = \operatorname{codim}(A) - 1.$$

En utilisant le théorème de Leray sur les recouvrements acycliques en dessous d'une certaine dimension ([9]), on retrouve d'intéressants théorèmes signalés par Scheja [23]. Pour traiter le cas d'un faisceau cohérent quelconque on se ramène au cas précédent en utilisant la dimension homologique du faisceau.

4. Cohomologie aux points frontière des domaines d'un espace analytique.

12. Domaines q-pseudoconvexes. — Soit V un sous-ensemble analytique d'un domaine $D \subset \mathbf{C}^N$ et soit $\xi \in V$. Soit φ une fonction indéfiniment différentiable sur V et fortement q-pseudoconvexe. Nous supposerons que φ est restriction à V d'une fonction $\hat{\varphi}$ indéfiniment différentiable et fortement q-pseudoconvexe dans D. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur V et soit $\hat{\mathcal{F}}$ son extension triviale à D. Sur un voisinage suffisamment petit U^* de ξ_0 (*cf.* propos. 1) considérons une résolution de Hilbert de $\hat{\mathcal{F}}$:

$$0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \ldots \to \mathcal{O}^{p_0} \to \hat{\mathcal{F}} \to 0.$$

Soit Y l'ouvert

$$Y = \{ z \in D \mid \hat{\varphi}(z) > \varphi(\xi_0) \}.$$

Théorème 5. — *Si U^* est un voisinage d'holomorphie suffisamment petit de ξ_0 dans D, pour tout voisinage $U \Subset U^*$ d'holomorphie de ξ_0 dans D qui soit de Runge dans U^*, et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur V, on a*

$$H^r((U \cap Y) \cap V, \mathcal{F}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad r \geq q.$$

([9]) *Cf.*, par exemple le Séminaire E. E. Levi, Pisa, 1959.

Preuve. — Soit $Z^i = \operatorname{Im}(\mathcal{O}^{p_{i+1}} \to \mathcal{O}^{p_i})$. On a donc les suites exactes :

$$\begin{array}{l} 0 \to Z^0 \to \mathcal{O}^{p_0} \to \hat{\mathcal{F}} \to 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 \to Z^i \to \mathcal{O}^{p_i} \to Z^{i-1} \to 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \mathcal{O}^{p_{d-1}} \to Z^{d-2} \to 0, \end{array}$$

En vertu de la proposition **11**, on en déduit

$$\begin{aligned} H^r((U \cap Y) \cap V, \mathcal{F}) &\simeq H^r(U \cap Y\, \hat{\mathcal{F}}) \\ &\simeq H^{r+h}(U \cap Y, Z^{h-1}) \qquad \text{pour} \quad r \geqq q. \end{aligned}$$

Si $h \geqq d$, le dernier groupe est nul.

13. Théorème d'approximation.

a. Soit X un espace analytique complexe à topologie de type dénombrable. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Par un *recouvrement* $\mathfrak{U} = \{U_\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}}$ *adapté à* $\mathcal{F}$ nous entendons un système d'ouverts U_ν d'holomorphie ([10]) relativement compacts dans X, et tels que :

(i) les U_ν forment une base d'ouverts de X (i. e. chaque ouvert de X est réunion de certains U_ν);

(ii) sur chaque U_ν on s'est donné un épimorphisme $\mathcal{O}^q \to \mathcal{F}$.

On sait (*cf.* [6]) que chaque espace $\Gamma(U_{\nu_0 \dots \nu_l}, \mathcal{F})$ est muni de façon naturelle d'une structure d'espace de Fréchet. Donc l'espace

$$C^l(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod \Gamma(U_{\nu_0 \dots \nu_l}, \mathcal{F})$$

avec la topologie du produit est un espace de Fréchet. De même l'espace $\tilde{C}^l(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ des cochaînes alternées, en tant que sous-espace fermé du précédent, est aussi un espace de Fréchet.

Si $U^\star$ est un ouvert d'holomorphie contenu dans l'ouvert d'holomorphie $U_\nu \in \mathfrak{U}$, l'application de restriction $\Gamma(U_\nu, \mathcal{F}) \to \Gamma(U^\star, \mathcal{F})$ est continue (et même complètement continue si $U^\star \Subset U_\nu$). Il résulte que l'application cobord

$$\delta : \quad C^l(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{l+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

est continue et que si $\mathfrak{U}^\star = \{U^\star_\nu\}_{\nu \in \mathbf{Z}}$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$, l'application de restriction $C^l(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^l(\mathfrak{U}^\star, \mathcal{F})$ est continue.

b. Soit X une variété et soit A^q le faisceau des germes de formes C^∞ de type $(0, q)$ sur X. Pour tout ouvert $U \subset X$ munissons l'espace $\Gamma(U, A^q)$ de

([10]) On entend par là que chaque U_ν est un espace de Stein.

la topologie de la convergence compacte des coefficients des formes et de toutes leurs dérivées. On obtient un espace de Fréchet. L'espace

$$C^{l,q}(\mathcal{U}) = C^l(\mathcal{U}, A^q) = \prod \Gamma(U_{\nu_0 \ldots \nu_l}, A^q)$$

avec la topologie produit est un espace de Fréchet. Les deux applications

$$\bar{\partial} : \quad C^{l,q}(\mathcal{U}) \to C^{l,q+1}(\mathcal{U}) \qquad \text{et} \qquad \delta : \quad C^{l,q}(\mathcal{U}) \to C^{l+1,q}(\mathcal{U})$$

sont des applications linéaires continues (ici $\bar{\partial}$ désigne la différentiation extérieure par rapport aux coordonnées complexes conjuguées dans X).

Soit $Z^q = \operatorname{Ker}\left(A^q \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{q+1}\right)$. Pour tout ouvert U, l'espace $\Gamma(U, Z^q)$, est un sous-espace fermé de $\Gamma(U, A^q)$, donc un espace de Fréchet. Il en est de même de $C^l(\mathcal{U}, Z^q)$, et aussi, comme δ est continu, de $Z^l(U, Z^q)$.

Soit X' un ouvert dans X, désignons par $\mathcal{U}|_{X'}$ le recouvrement de X'

$$\mathcal{U}|_{X'} = \{ U_\nu \in \mathcal{U} \mid U_\nu \subset X' \}.$$

Proposition 13. — *Si l'image de $\Gamma(X, Z^l)$ dans $\Gamma(X', Z^l)$ est dense dans cet espace, alors pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ adapté à $\mathcal{O}$ l'image de $Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ dans $Z^l(\mathcal{U}|_{X'}, \mathcal{O})$ est dense dans cet espace.*

Preuve.

α. Désignons par $\mathcal{U}'$ le recouvrement $\mathcal{U}|_{X'}$ de X'. Soit $\varphi^l \in \Gamma(X', Z^l)$. Posons $\varphi^l_{\nu_0} = \varphi^l|_{U_{\nu_0}}$. Comme U_{ν_0} est un ouvert d'holomorphie, on peut trouver

$$\varphi^{l-1} = \{ \varphi^{l-1}_{\nu_0} \} \in C^0(\mathcal{U}', A^{l-1})$$

tel que

$$\varphi^l_{\nu_0} = \bar{\partial}\varphi^{l-1}_{\nu_0}.$$

On aura $\delta\varphi^{l-1} \in Z^1(\mathcal{U}', Z^{l-1})$. Comme $U_{\nu_0\nu_1}$ est un ouvert d'holomorphie, on peut trouver

$$\varphi^{l-2} = \{ \varphi^{l-2}_{\nu_0\nu_1} \} \in C^1(\mathcal{U}', A^{l-2})$$

tel que

$$(\delta\varphi^{l-1})_{\nu_0\nu_1} = \bar{\partial}\varphi_{\nu_0\nu_1}.$$

On aura $\delta\varphi^{l-2} \in Z^2(\mathcal{U}', Z^{l-2})$. En raisonnant comme tout à l'heure et ainsi de suite on construit pour $0 \leq i \leq l$ des éléments

$$\varphi^{l-i} = \{ \varphi^{l-i}_{\nu_0 \ldots \nu_{i-1}} \} \in C^{i-1}(\mathcal{U}', A^{l-1})$$

pour lesquels

$$\delta\varphi^{l-i} \in Z^i(\mathcal{U}', Z^{l-i}), \qquad (\delta\varphi^{l-i})_{\nu_0 \ldots \nu_i} = \bar{\partial}\varphi^{l-i-1}_{\nu_0 \ldots \nu_i}.$$

Pour $i = l$ on aura

$$\varphi^0 = \{ \varphi^0_{\nu_0 \ldots \nu_{l-1}} \} \in C^{l-1}(\mathcal{U}', A^0)$$

tel que

$$\delta\varphi^0 \in Z^l(\mathfrak{U}', \mathcal{O}).$$

Ce cocycle est dans la classe de cohomologie définie par φ^l en vertu de l'isomorphisme de Dolbeault. En effet, on n'a fait que rendre explicite cet isomorphisme.

β. Par l'hypothèse que l'image de $\Gamma(X, Z^l)$ est dense dans $\Gamma(X', Z^l)$ on peut trouver une suite $\psi^l(n) \in \Gamma(X, Z^l)$ telle que $\psi^l(n)|_{X'}$ tende vers φ^l.

Posons $\psi^l_{\nu_0}(n) = \psi^l(n)|_{U_{\nu_0}}$. On peut trouver

$$\psi^{l-1}(n) = \{\psi^{l-1}_{\nu_0}(n)\} \in C^0(\mathfrak{U}, A^{l-1})$$

tel que

$$\psi^l_{\nu_0}(n) = \bar{\partial}\psi^{l-1}_{\nu_0}(n).$$

Or, remarquons que l'application

$$\Gamma(U_{\nu_0}, A^{l-1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(U_{\nu_0}, Z^l)$$

est surjective ; elle est donc un homomorphisme d'espaces de Fréchet.

Supposons $U_{\nu_0} \subset X'$, comme $\psi^l_{\nu_0}(n)$ tend vers $\varphi^l_{\nu_0}$, on peut choisir $\{\psi^{l-1}_{\nu_0}(n)\}$ de sorte que cette suite tende vers $\varphi^{l-1}_{\nu_0}$.

On aura

$$\delta\psi^{l-1}(n) \in Z^1(\mathfrak{U}, Z^{l-1})$$

et, si $U_{\nu_0}, U_{\nu_1} \subset X$ on aura

$$\lim_{n\to\infty}(\delta\psi^{l-1}(n))_{\nu_0\nu_1} = (\delta\varphi^{l-1})_{\nu_0\nu_1}.$$

On peut trouver

$$\psi^{l-2}(n) = \{\psi^{l-2}_{\nu_0\nu_1}(n)\} \in C^1(\mathfrak{U}, A^{l-2})$$

tel que

$$(\delta\psi^{l-1}(n))_{\nu_0\nu_1} = \bar{\partial}\psi^{l-2}_{\nu_0\nu_1}(n).$$

De plus, on peut demander que, si $\mathfrak{U}_{\nu_0}, \mathfrak{U}_{\nu_1} \subset X'$, on ait

$$\lim_{n\to\infty}\psi^{l-2}_{\nu_0\nu_1}(n) = \varphi^{l-2}_{\nu_0\nu_1}.$$

Ainsi de suite, on construit pour $0 \leq i \leq l$ des éléments

$$\psi^{l-i}(n) = \{\psi^{l-i}_{\nu_0\ldots\nu_{i-1}}(n)\} \in C^{i-1}(\mathfrak{U}, A^{l-i}),$$

pour lesquels

$$\delta\psi^{l-i}(n) \in Z^i(\mathfrak{U}, Z^{l-i}), \qquad (\delta\psi^{l-i}(n))_{\nu_0\ldots\nu_i} = \bar{\partial}\psi^{l-i-1}_{\nu_0\ldots\nu_i}(n)$$

et si $U_{\nu_0}, \ldots, U_{\nu_i} \subset X'$, on ait

$$\lim_{n\to\infty}\psi^{l-i}_{\nu_0\ldots\nu_{i-1}}(n) = \varphi^{l-i}_{\nu_0\ldots\nu_{i-1}}.$$

Pour $i = l$ on aura

$$\psi^0(n) = \{\psi^0_{\nu_0 \ldots \nu_{l-1}}(n)\} \in C^{l-1}(\mathcal{U}, A^0)$$

tel que

$$\delta\psi^0(n) \in Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

et si $U_{\nu_0}, \ldots, U_{\nu_l} \subset X'$,

$$\lim_{n \to \infty} (\delta\psi^0(n)_{\nu_0 \ldots \nu_l}) = (\delta\varphi^0)_{\nu_0 \ldots \nu_l}.$$

γ. Soit $\xi' \in Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ et soit $\varphi^l \in \Gamma(X', Z^l)$ une forme dans la même classe de cohomologie.

Soit γ' le cocycle $\delta\varphi^0$ construit en α. On aura

$$\xi' = \gamma' + \delta\eta', \qquad \text{avec} \quad \eta' \in C^{l-1}(\mathcal{U}', \mathcal{O}).$$

Soit $\eta \in C^{l-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ telle que

$$\eta_{\nu_0 \ldots \nu_{l-1}} = \eta'_{\nu_0 \ldots \nu_{l-1}} \quad \text{si} \quad U_{\nu_0}, \ldots, U_{\nu_{l-1}} \subset X'.$$

Soit $\gamma(n)$ le cocycle $\delta\psi^0(n)$ construit en β. Posons

$$\xi(n) = \gamma(n) + \delta\eta.$$

Des considérations précédentes il résulte que

$$\lim_{n \to \infty} r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} \gamma(n) = \gamma' \qquad \text{et} \qquad r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} \eta = \eta'$$

donc que

$$\lim_{n \to \infty} r^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'} \xi(n) = \xi'.$$

Ceci achève la démonstration.

Soit à présent D un ouvert dans C^n et φ une fonction indéfiniment différentiable fortement q-pseudoconvexe. Soit

$$\xi_0 \in D \qquad \text{et} \qquad Y = \{z \in D \mid \varphi(z) < \varphi(\xi_0)\}.$$

Soit U^* un voisinage d'holomorphie suffisamment petit de ξ_0 dans D et soit $U \Subset U^*$ un deuxième voisinage d'holomorphie qui soit de Runge dans U^*. D'après la proposition 11, on sait que $\Gamma(U, Z^l)$ a une image dense dans $\Gamma(U \cap Y, Z^l)$ pour tout $l \geqq q - 1$. D'après la proposition 13, il résulte que pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de D adapté à $\mathcal{O}$ l'image de $Z^l(\mathcal{U}|_U, \mathcal{O})$ dans $Z^l(\mathcal{U}|_{U \cap Y}, \mathcal{O})$ est dense pour $l \geqq q - 1$.

PROPOSITION 14. — *Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur D et tout $l \geqq q - 1$, $Z^l(\mathcal{U}|_U, \mathcal{F})$ a une image dense dans $Z^l(\mathcal{U}|_{U \cap Y}, \mathcal{F})$.*

Preuve. — Comme $\bar{U}$ est un compact d'un ouvert d'holomorphie U^*, on peut trouver un nombre fini de sections de $\mathcal{F}$ sur U^* qui engendrent $\mathcal{F}$ en chaque point de U. On peut donc trouver sur U une suite exacte

$$(\bigstar) \qquad 0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}^q \to \mathcal{F} \to 0.$$

Envisageons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^l(\mathcal{U}|_U, \mathcal{O}^q) & \xrightarrow{\alpha} & Z^l(\mathcal{U}|_U, \mathcal{F}) \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ Z^l(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{O}^q) & \xrightarrow{\beta} & Z^l(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{F}). \end{array}$$

En utilisant le théorème 5 qui prouve $H^r(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{G}) = 0$ pour $r \geqq q$ et la suite de cohomologie associée à la suite exacte $(\bigstar)$, on voit que

$$H^l(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{O}^q) \to H^l(_{U\cap Y}, \mathcal{F})$$

est surjectif pour $l \geqq q-1$.

Soit $\xi' \in Z^l(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{F})$. De la dernière remarque il suit qu'on peut trouver

$$\eta' \in Z^l(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{O}^q) \qquad \text{et} \qquad \gamma' \in C^{l-1}(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \mathcal{F})$$

tels que

$$\xi' = \beta(\eta') + \delta\gamma'.$$

On peut construire

$$\gamma \in C^{l-1}(\mathcal{U}|_U, \mathcal{F}) \qquad \text{tel que} \quad r\gamma = \gamma'.$$

On peut aussi trouver une suite

$$\eta(n) \in Z^l(\mathcal{U}|_U, \mathcal{O}^q) \qquad \text{telle que} \quad r\eta(n) \to \eta'$$

(*cf.* remarque précédant l'énoncé de la proposition 14). Posons

$$\xi(n) = \alpha(\eta(n)) + \delta\gamma.$$

Comme α, β et les homomorphismes de restriction sont des applications continues, on a $r\xi(n) \to \xi'$.

C. Q. F. D.

a. Soit V un sous-ensemble analytique de D et soit $\xi_0 \in V$. Soit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap V = \{U_\nu \cap V\}$ le recouvrement découpé par $\mathcal{U}$ sur V [11]. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur V. Avec les mêmes notations que tout à l'heure, on a le

THÉORÈME 6. — *Pour $l \geqq q-1$, l'espace $Z^l(\mathcal{V}|_{U\cap V}, \mathcal{F})$ à une image dense dans l'espace $Z^l(\mathcal{V}|_{(U\cap Y)\cap V}, \mathcal{F})$.*

---

[11] Remarquons que tout recouvrement de V avec des ouverts d'holomorphie a un raffinement qui est découpé par un recouvrement de U avec des ouverts d'holomorphie.

Preuve. — Soit $\hat{\mathcal{F}}$ l'extension triviale de $\mathcal{F}$ à D. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^l(\mathcal{U}|_U, \hat{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\alpha} & Z^l(\mathcal{V}|_{U\cap Y}, \mathcal{F}) \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ Z^l(\mathcal{U}|_{U\cap Y}, \hat{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\beta} & Z^l(\mathcal{V}|_{(U\cap Y)\cap Y}, \mathcal{F}) \end{array}$$

où α et β sont des isomorphismes d'espaces de Fréchet.

14. Cohomologie à supports compacts.

a. Reprenons la situation envisagée au n° 13. Nous supposerons que la dimension N de l'espace ambiant est égale à la dimension de l'espace tangent de Zariski à V en ξ_0. Pour la résolution de Hilbert envisagée du faisceau $\hat{\mathcal{F}}$ on aura $N - d = \mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F})$.

THÉORÈME 7. — *Si U^* est un voisinage d'holomorphie suffisamment petit de ξ_0 dans D, pour tout voisinage $U \subset\subset U^*$ d'holomorphie de ξ_0 dans D qui soit de Runge dans U^*, on a*

$$H_k^r((U\cap Y)\cap V, \mathcal{F}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad 0 \leq r \leq \mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F}) - q.$$

Preuve. — Comme dans la démonstration du théorème 5, on aura

$$H_k^r((U\cap Y)\cap V, \mathcal{F}) \simeq H_k^r(U\cap Y, \hat{\mathcal{F}}) \simeq H_k^{r+h}(U\cap Y, Z^{h-1})$$

pourvu que $r + h \leq N - q$ (propos. 11). Pour $h = d$ on obtient le résultat cherché.

b. Avec les mêmes notations, on a le

THÉORÈME 8. — *L'homomorphisme*

$$H_k^{\mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F})-q+1}((U\cap Y)\cap V, \mathcal{F}) \to H_k^{\mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F})-q+1}(U\cap V, \mathcal{F})$$

est injectif.

Preuve. — On doit démontrer que

$$H_k^\rho(U\cap Y, \hat{\mathcal{F}}) \to H_k^\rho(U, \hat{\mathcal{F}}))$$

est injectif pour $\rho = \mathrm{dih}_{\xi_0}(\hat{\mathcal{F}}) - q + 1$. On est donc ramené à démontrer un théorème pour les faisceaux sur D.

Si $\hat{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{O}^p$ i. e. $\mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F}) = N$ le théorème est vrai (propos. 11). Par récurrence descendante, admettons le théorème démontré pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur D avec $\mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{G}) > \mathrm{dih}_{\xi_0}(\hat{\mathcal{F}})$. De la suite exacte

$$0 \to Z^0 \to \mathcal{O}^{p_0} \to \hat{\mathcal{F}} \to 0,$$

on déduit le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} H_k^\rho(U\cap Y, \mathcal{O}^{p_0}) & \to & H_k^\rho(U\cap Y, \hat{\mathcal{F}}) & \to & H_k^{\rho+1}(U\cap Y, Z^0) \\ \downarrow & & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha \\ H_k^\rho(U, \mathcal{O}^{p_0}) & \to & H_k^\rho(U, \hat{\mathcal{F}}) & \to & H_k^{\rho+1}(U, Z^0). \end{array}$$

Comme

$$\rho = \mathrm{dih}_{\xi_0}(\hat{\mathcal{F}}) - q + 1 < N - q + 1$$

on aura (th. 7)

$$H_k^\rho(U\cap Y, \mathcal{O}^{p_0}) = 0.$$

De plus, U est d'holomorphie, donc $H_k^\rho(U, \mathcal{O}^{p_0}) = 0$. Comme

$$\mathrm{dih}_{\xi_0}(Z^0) = \mathrm{dih}_{\xi_0}(\hat{\mathcal{F}}) + 1,$$

l'homomorphisme α est injectif. De ceci et du diagramme précédent on déduit que β est aussi injectif.

15. **Domaines q-pseudoconcaves.** — Reprenons les notations du n° 12 en remplaçant l'ouvert Y par

$$Y' = \{ z \in D \mid \hat{\varphi}(z) > \hat{\varphi}(\xi_0) \}.$$

Supposons aussi que la dimension N de l'espace $\mathbf{C}^N$ soit égale à la dimension de l'espace tangent de Zariski à V au point ξ_0.

THÉORÈME 9. — *Il existe un système fondamental de voisinages d'holomorphie Q de ξ_0 dans D tels que*

$$H^r((Q\cap Y')\cap V, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < r < \mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F}) - q.$$

Preuve. — Comme aux théorèmes 5 et 7 en utilisant la proposition 12.

THÉORÈME 10. — *Avec les mêmes notations, si* $\mathrm{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F}) > q$, *il résulte que l'homomorphisme*

$$H^0(Q\cap V, \mathcal{F}) \to H^0((Q\cap Y')\cap V, \mathcal{F})$$

est bijectif.

Preuve. — Des suites exactes

$$\begin{array}{l} 0 \to Z^0 \to \mathcal{O}^{p_0} \to \hat{\mathcal{F}} \to 0, \\ 0 \to Z^1 \to \mathcal{O}^{p_1} \to Z^0 \to 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 \to \mathcal{O}^{p_d} \to \mathcal{O}^{p_{d-1}} \to Z^{d-2} \to 0 \end{array}$$

(*cf.* démonstration du théorème 5), on déduit que

$$H^i(Q\cap Y', Z^i) \cong H^{d-i}(Q\cap Y', \mathcal{O}^{p_d}) = 0$$

si $0 < d - i < N - q$ (propos. 12). Cela a lieu pour $i = 0, 1, \ldots, d-1$ puisque $d < N - q$, car $\operatorname{dih}_{\xi_0}(\mathcal{F}) = N - d > q$.

Donc on a les suites exactes

$$0 \to H^0(Q \cap Y', Z^0) \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_0}) \to H^0((Q \cap Y') \cap V, \mathcal{F}) \to 0,$$
$$0 \to H^0(Q \cap Y', Z^i) \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_{i-1}}) \to H^0(Q \cap Y', Z^{i-1}) \to 0,$$
$$0 \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_d}) \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_{d-1}}) \to H^0(Q \cap Y', Z^{d-2}) \to 0.$$

On en déduit l'exactitude de la suite

$$0 \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_d}) \to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_{d-1}}) \to \ldots$$
$$\to H^0(Q \cap Y', \mathcal{O}^{p_0}) \to H^0((Q \cap Y') \cap V, \mathcal{F}) \to 0.$$

De même, on a une suite exacte analogue en remplaçant $Q \cap Y'$ par Q. Par restriction, cette deuxième suite s'applique dans la première. Tous les homomorphismes de restriction sont bijectifs, sauf peut-être pour

$$H^0(Q \cap V, \mathcal{F}) \to H^0((Q \cap Y') \cap V, \mathcal{F}).$$

Du « lemme des cinq » on déduit que cet homomorphisme est aussi bijectif.

5. Espaces q-pseudoconvexes et q-pseudoconcaves.

16. Espaces fortement q-pseudoconvexes (q-pseudoconcaves).

a. Soit X un espace analytique complexe, soit B un ouvert dans X. Désignons par $\partial B = \overline{B} - B$ la frontière de B.

Nous supposerons que pour tout point $\xi_0 \in \partial B$ on peut trouver un voisinage U de ξ_0 dans X et une fonction indéfiniment différentiable φ sur U à valeurs réelles tels que

$$B \cap U = \{ x \in U \mid \varphi(x) < \varphi(\xi_0) \}.$$

Nous dirons que ∂B est

(i) *fortement q-pseudoconvexe au voisinage du point* ξ_0 si l'on peut choisir la fonction φ fortement q-pseudoconvexe ($q \geqq 1$);

(ii) *fortement q-pseudoconcave au voisinage du point* ξ_0 si l'on peut choisir la fonction $-\varphi$ fortement q-pseudoconvexe ($q \geqq 1$).

Nous dirons que *∂B est fortement q pseudoconvexe* (*fortement q-pseudoconcave*) si ∂B est telle au voisinage de chacun de ses points.

b. Étant donné un ouvert $B \Subset X$ dont la frontière ∂B est fortement q-pseudoconvexe, est-il possible de trouver un voisinage U de ∂B et une fonction φ fortement q-pseudoconvexe sur U tels que

$$B \cap U = \{ x \in U \mid \varphi(x) < 0 \}?$$

Nous pouvons démontrer que la réponse est affirmative dans le cas des variétés (= espaces sans singularités) :

PROPOSITION 15. — *Soient X une variété, B un ouvert de X relativement compact à frontière fortement q-pseudoconvexe. Il existe un voisinage U de ∂B et une fonction fortement q-pseudoconvexe φ sur U tels que*

$$B \cap U = \{ x \in U \mid \varphi(x) < 0 \}.$$

Preuve. — Nous ferons d'abord quelques remarques préliminaires :

α. Soient φ_1, φ_2 deux fonctions réelles de classe C^k $(k \geqq 1)$ définies dans un voisinage de l'origine $\{0\} \in \mathbf{R}^m$ et nulles en $\{0\}$. Si $(d\varphi_1)_0 \neq 0$ et si φ_2 s'annule sur $\{\varphi_1 = 0\}$, alors dans un voisinage de $\{0\}$ il existe une fonction réelle h de classe C^{k-1} telle que $\varphi_2 = \varphi_1 h$.

β. Avec les mêmes notations, supposons que $(d\varphi_1)_0 = (d\varphi_2)_0 = 0$. Soit

$$H_r(u) = \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 u_\alpha u_\beta \qquad (r = 1, 2).$$

Faisons les hypothèses suivantes :

(i) $H_r(u)$ n'est pas identiquement nulle;

(ii) $\varphi_1 > 0 \Rightarrow \varphi_2 \geqq 0$, $\varphi_1 < 0 \Rightarrow \varphi_2 \leqq 0$,

d'où résulte

$$\varphi_2 > 0 \Rightarrow \varphi_1 \geqq 0, \qquad \varphi_2 < 0 \Rightarrow \varphi_1 \leqq 0.$$

Alors l'une des possibilités suivantes est vérifiée :

$$H_1(u) \geqq 0, \qquad H_2(u) \geqq 0;$$
$$H_1(u) \leqq 0, \qquad H_2(u) \leqq 0;$$

il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $H_1(u) = \lambda H_2(u)$.

La démonstration de ces faits ne présente pas de difficultés.

γ. Venons à la démonstration de la proposition. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de ∂B, tel que sur chaque U_i on ait une fonction φ_i fortement q-pseudoconvexe telle que

$$B \cap U_i = \{ x \in U_i \mid \varphi_i(x) < 0 \}.$$

Soit ρ_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathfrak{U}$. Envisageons la fonction $\varphi = \exp c \sum \rho_i \varphi_i - 1$, avec $c > 0$, sur $\bigcup_i \mathfrak{U}_i$. La forme de Levi $\mathbf{L}(\varphi)$ de φ est donnée par

$$L(\varphi) = c \exp c \sum \rho_i \varphi_i \left\{ L\left(\sum \rho_i \varphi_i \right) + c \left| \partial \left(\sum \rho_i \varphi_i \right) \right|^2 \right\}.$$

Il suffit de démontrer que φ est fortement q-pseudoconvexe en chaque point $\xi_0 \in \partial B$.

Soit $\rho_i(\xi_0) \neq 0$ pour $i = i_1, \ldots, i_r$. Supposons d'abord que l'une des fonctions φ_{i_α} ait une différentielle non nulle en ξ_0, par exemple $(d\varphi_{i_1})_{\xi_0} \neq 0$. Au voisinage de ξ_0 on peut écrire

$$\varphi_{i_\alpha} = \varphi_{i_0} h_{i_\alpha}, \qquad \text{avec} \quad h_{i_\alpha}(\xi_0) > 0$$

[si $h_{i_\alpha}(\xi_0) = 0$, on a $L(\varphi_{i_\alpha}) = 0$ en ξ_0 ce qui est impossible], $\alpha = 1, \ldots, r$. On peut choisir $c > 0$ tel que φ soit fortement q-pseudoconvexe au point ξ_0 ([12]). Si, au contraire, $(d\varphi_{i_\alpha})_{\xi_0} = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$, les formes $L(\varphi_{i_\alpha})_{\xi_0}$ sont ou bien semi-définies toutes du même signe ou bien toutes proportionnelles avec des constantes multiplicatives > 0. Dans ce cas, quel que soit le choix de c, φ est fortement q-pseudo-convexe.

Soit $c(\xi_0)$ la borne inférieure des $c \geqq 1$ tels que φ soit fortement pseudoconvexe au point ξ_0. On voit que $c(\xi_0)$ est semi-continue supérieurement sur ∂B. Donc pour $c = 2 \sup_{\xi_0 \in \partial B} c(\xi_0)$ la fonction φ répond à notre problème.

On a un résultat analogue pour les frontières fortement q-pseudoconcaves.

Remarque. — Le même argument s'applique au cas d'un espace quelconque lorsque les fonctions φ_i sont fortement pseudoconvexes (*cf.* GRAUERT, [14]).

c. Nous poserons les définitions suivantes.

Un espace complexe X est dit *fortement q-pseudoconvexe* s'il existe un compact $K \subset X$ et une fonction φ continue sur X et fortement q-pseudoconvexe en dehors de K telle que les ensembles

$$B_c = \{ x \in X \mid \varphi(x) < c \}$$

pour $c \in \mathbf{R}$ soient relativement compacts.

On convient de dire qu'un espace compact est *o-pseudoconvexe*. Tout espace fortement q-pseudoconvexe est aussi fortement $(q+1)$-pseudoconvexe. Si $q > 0$ et $K = \emptyset$, on dit que X est *q-complet*.

([12]) En effet, comme $(d\varphi_{i_0})_{\xi_0} \neq 0$ on peut choisir les coordonnées locales au point ξ_0 de sorte que $(\partial\varphi_{i_0})_{\xi_0} = dz_n$ et que

$$L(\varphi)_{\xi_0} = A \sum_1^{n-1} C_{\alpha\bar\beta}\, dz_\alpha d\bar z_\beta + dz_n \sum_1^{n-1} b_\alpha\, d\bar z_\alpha + d\bar z_n \sum_1^{n-1} \bar b_\alpha\, dz_\alpha$$
$$+ (Bc + k)\, dz_n\, d\bar z_n \qquad \text{avec} \quad A > 0, \qquad B > 0,$$

et

$$\sum_1^{n-q} C_{\alpha\bar\beta}\, dz_\alpha\, d\bar z_\beta > 0.$$

On dit qu'un espace complexe X est *fortement q-pseudoconcave* s'il existe un compact $K \subset X$ et une fonction $\varphi > 0$ continue sur X et fortement q-pseudoconvexe en dehors de K telle que les ensembles

$$B_c = \{ x \in X \mid \varphi(x) > c \} \qquad c \in \mathbf{R}, \quad c > 0$$

soient relativement compacts.

Comme les fonctions fortement q-pseudoconvexes n'admettent pas de maximums relatifs, il n'y a pas lieu de considérer les espaces q-complet dans le cas concave.

17. Théorème de finitude pour les parties B_c.

a. Soit X un espace topologique; soient x_1, X_2 deux parties ouvertes de X telles que $X = X_1 \cup X_2$. On pose

$$X_{12} = X_1 \cap X_2.$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes commutatifs sur X et soit

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \ldots$$

une résolution flasque de $\mathcal{F}$ sur X. Par restriction à X_μ, $\mu = 1, 2, 12$, on obtient des résolutions flasques de $\mathcal{F}|_{X_\mu}$. Comme les faisceaux $\mathcal{C}^q$, $q \geqq 0$, sont flasques, on a des suites exactes

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X_1, \mathcal{C}^q) \oplus \Gamma(X_2, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X_{12}, \mathcal{C}^q) \to 0,$$

où

$$\alpha(s) = s|_{X_1} \oplus s|_{X_2}, \qquad s \in \Gamma(X, \mathcal{C}^q)$$
$$\beta(s_1 \oplus s_2) = s_1|_{X_{12}} - s_2|_{X_{12}}, \qquad s_i \in \Gamma(X_i, \mathcal{C}^q) \quad (i = 1, 2).$$

Donc on a la suite exacte de complexes

$$0 \to \bigoplus_q \Gamma(X, \mathcal{C}^q) \to \bigoplus_q (\Gamma(X_1, \mathcal{C}^q) \oplus \Gamma(X_2, \mathcal{C}^q)) \to \bigoplus_q \Gamma(X_{12}, \mathcal{C}^q) \to 0$$

et de là, en passant à la cohomologie, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X_1, \mathcal{F}) \oplus H^0(X_2, \mathcal{F}) \to H^0(X_{12}, \mathcal{F}) \to \ldots \\ \to H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X_1, \mathcal{F}) \oplus H^q(X_2, \mathcal{F}) \to H^q(X_{12}, \mathcal{F}) \\ \to H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \to \ldots \end{aligned}$$

(*suite exacte de Mayer-Vietoris*)

b. Soit X un espace analytique complexe et soit B un ouvert relativement compact dans X à frontière ∂B fortement q-pseudoconvexe. Nous supposerons qu'il existe un voisinage U de ∂B dans X et une fonction φ q-pseudoconvexe sur U telle que

$$B \cap U = \{ x \in U \mid \varphi(x) < 0 \}.$$

LEMME. — *On peut choisir un recouvrement fini* $\mathfrak{U} = \{U_i\}$, $1 \leq i \leq t$, *de* ∂B *dans* X, *aussi fin qu'on veut, et une suite croissante* $\{B_j\}$, $0 \leq j \leq t$, *d'ouverts relativement compacts dans* X *à frontière fortement* q*-pseudoconvexe tels que :*

(i) $B = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_t$, $B_0 \Subset B_t$, $B_i - B_{i-1} \Subset U_i$ pour $1 \leq i \leq t$;

(ii) *pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* X *on a*

$$H^r(U_i \cap B_j, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{pour } r \geq q \quad (1 \leq i \leq t,\ 0 \leq j \leq t).$$

Preuve. — On peut choisir un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{1 \leq i \leq t}$ de ∂B, $U_i \Subset U$, aussi fin qu'on veut, de sorte que les conditions suivantes soient remplies :

α. pour chaque $i = 1, \ldots, t$, il existe un voisinage ouvert $U_i^* \subset U$ de $\overline{U}_i$ et un isomorphisme ψ_i de U_i^* sur un sous-ensemble analytique V_i d'une boule D_i d'un espace numérique $\mathbf{C}^{\nu_i}$, l'ensemble $\psi_i(U_i)$ étant la partie de $\psi_i(U_i^*)$ contenue dans une boule concentrique;

β. sur chaque D_i, il existe une fonction $\hat{\varphi}_i$ fortement q-pseudoconvexe telle que $\hat{\varphi}_i \circ \psi_i = \varphi|_{U_i^*}$;

γ. les ensembles $\psi_i(U_i^*)$, $\psi_i(U_i)$ satisfont par rapport à la fonction $\hat{\varphi}_i$ les conditions des théorèmes 5 et 6 ([13]).

Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on aura $H^r(U_i \cap B, \mathcal{F}) = 0$ pour $r \geq q$.

Soient ρ_i des fonctions de classe C^∞ sur U telles que

$$\rho_i \geq 0, \qquad \operatorname{Supp} \rho_i \Subset U_i, \qquad \sum \rho_i(\xi_0) > 0 \quad \text{pour tout } \xi_0 \in \partial B.$$

On peut supposer que sur chaque D_j il existe des fonctions $\hat{\rho}_{ij} \geq 0$, à support compact, telles que $\rho_i|_{U_j} = \hat{\rho}_{ij} \circ \psi_i$.

Posons $\varphi_i = \varepsilon_i \rho_i$, les constantes $\varepsilon_i > 0$ étant choisies de sorte que :

α'. les fonctions $h_r = \varphi - \sum_1^r \varphi_i$, pour $1 \leq r \leq t$, soient fortement q-pseudoconvexes;

([13]) Pour appliquer les théorèmes 5 et 6 on demande : 1° par un choix convenable des coordonnées, sur les sections de D_i avec les espaces d'équations $z_1 = \text{cost}, \ldots, z_{q-1} = \text{cost}$, la fonction $\hat{\varphi}$ ait une restriction fortement plurisousharmonique; 2° le faisceau $\hat{\mathcal{F}}$, extension triviale à D_i du faisceau $\mathcal{F}|_{\psi(U)_i}$, ait une résolution avec des faisceaux libres, de longueur finie. Quitte à remplacer les boules D_i par des boules concentriques $D_i \Subset D_i$ on satisfait à la condition 1°. La deuxième condition sera automatiquement remplie en vertu de la proposition 1.

β'. Les ensembles $\psi_i(U_i^*)$, $\psi_i(U_i)$ satisfassent aux conditions des théorèmes 5 et 6 par rapport aux fonctions

$$\hat{\varphi}_i - \sum_1^r \varepsilon_j \hat{\beta}_{ji} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq r \leqq t.$$

Ceci est possible si les ε_i sont suffisamment petites.

Soit $B_r = \{ x \in U \mid h_r(x) < 0 \}$. A cause de la condition α', ∂B_r est fortement q-pseudoconvexe. Par la condition β' on a

$$H^p(U_i \cap B_r, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{pour} \quad p \geqq q$$

et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X. En plus,

$$B_0 = B \subset B_1 \subset \ldots \subset B_r, \qquad B_i - B_{i-1} \Subset U_i \quad (1 \leqq i \leqq t) \qquad \text{et} \qquad B_0 \Subset B_t$$

Remarque. — Supposons que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ les ensembles

$$B_\varepsilon = B \cup \{ x \in U \mid \varphi(x) < \varepsilon \}$$

soient contenus et relativement compacts dans $B \cup U$. De la construction précédente, il résulte qu'il existe un $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ les ensembles

$$B_{\varepsilon r} = B \cup \{ x \in U \mid h_r(x) < \varepsilon \}$$

vérifient encore les conclusions du lemme

$$B_\varepsilon = B_{\varepsilon 0} \subset B_{\varepsilon 1} \subset \ldots \subset B_{\varepsilon t}, \qquad B_{\varepsilon 0} \Subset B_{\varepsilon t}, \quad B_{\varepsilon i} - B_{\varepsilon i-1} \Subset U_i,$$
$$H^r(U_i \cap B_{\varepsilon j}, \mathcal{F}) = 0.$$

Il est clair que $B_{\varepsilon t} \supseteq B_t$.

c. Supposons que X soit un espace fortement q-pseudoconvexe par rapport à une fonction φ continue et fortement q-pseudoconvexe en dehors d'un compact K.

Les ensembles

$$B_c = \{ x \in X \mid \varphi(x) < c \}$$

sont relativement compacts et à frontière fortement q-pseudoconvexe si $c > c_0 = \sup_K \varphi$.

Proposition 16. — *Soit $c > c_0$; il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'homomorphisme de restriction*

$$H^r(B_{c+\varepsilon}, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$$

soit surjectif pour $r \geqq q$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X.

Preuve. — Appliquons le lemme précédent à l'ouvert $B = B_c$ et soit

$$\xi \in H^r(B, \mathcal{F}), \qquad \text{avec} \quad r \geqq q.$$

Comme $\xi_{B \cap U_1} = 0$, la classe ξ et la classe nulle sur $B_1 \cap U_1$ ont même restriction à $B \cap U_1$. Écrivons $B_1 = B \cup (B_1 \cap U_1)$. De la suite de Mayer-Vietoris, on tire qu'il existe

$$\xi_1 \in H^r(B_1, \mathcal{F}) \qquad \text{telle que} \quad \xi_1|_B = \xi.$$

On opère sur B_1, U_2, B_2 comme sur B, U_1, B_1 et l'on trouve

$$\xi_2 \in H^r(B_2, \mathcal{F}) \qquad \text{telle que} \quad \xi_2|_{B_1} = \xi_1.$$

Ainsi de suite on construit une classe

$$\xi_t \in H^r(B_t, \mathcal{F}) \qquad \text{telle que} \quad \xi_t|_B = \xi.$$

Comme $B \Subset B_t$, il suffit de prendre ε assez petit pour que $B_{c+\varepsilon} \subset B_t$.

d. Soit X un espace fortement q-pseudoconcave par rapport à une fonction $\varphi > 0$ continue et fortement q-pseudoconvexe en dehors d'un compact K. Les ensembles

$$B_c = \{ x \in X \mid \varphi(x) > c \} \qquad (c > 0)$$

sont relativement compacts et à frontière fortement q-pseudoconcave si

$$c < \inf_K \varphi = c_0.$$

On a un lemme analogue au lemme précédent, où l'inégalité $r \geqq q$ est à présent remplacée par $0 < r < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$. En utilisant les théorèmes **9** et **10**, on démontre de la même manière la proposition suivante :

Proposition **17**. — *Soit* $0 < c < c_0$ *; il existe un* $\varepsilon > 0$, *avec* $c - \varepsilon > 0$ *tel que l'homomorphisme de restriction*

$$H^r(B_{c-\varepsilon}, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$$

soit surjectif si $r < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$, $\mathcal{F}$ *étant un faisceau cohérent sur* X.

e. Nous pouvons à présent démontrer le

Théorème **11**. — *Soit* X *un espace fortement*

a. q-pseudoconvexe;

b. q-pseudoconcave.

Soit $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X. *Alors*

$$\dim H^r(B_c, \mathcal{F}) < +\infty,$$

dans le cas a, si $r \geqq q$ *et* $c > c_0$*;*
dans le cas b, si $r < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$ *et* $0 < c < c_0$.

Preuve. — Nous démontrerons que si B est un ouvert de X qui soit relativement compact dans un ouvert $A \subset X$, si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X et si $H^r(A, \mathcal{F}) \to H^r(B, \mathcal{F})$ est surjectif, alors $\dim H^r(B, \mathcal{F}) < +\infty$.

Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de A par des ouverts U_i d'holomorphie. Nous supposerons que $B \cap U_i \neq \emptyset$ pour un nombre fini seulement d'ouverts U_i avec $1 \leq i \leq k$. Dans chaque ouvert U_i pour $1 \leq i \leq k$, choisissons un ouvert $\hat{U}_i \Subset U_i$ de sorte que $B \subset \bigcup_1^k \hat{U}_i$.

Soit $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un recouvrement de B par des ouverts d'holomorphie : $B = \bigcup_{j \in J} V_j$. Nous pouvons supposer que $\mathfrak{V}$ est un raffinement du recouvre- $\{\hat{U}_i \cap B\}_{1 \leq i \leq k}$.

Pour chaque V_j choisissons un ouvert $\hat{U}_{\tau(j)}$ tel que $V_j \subset \hat{U}_{\tau(j)}$. On définit donc une application $\tau : J \to \{1, \ldots, k\}$. Ce n'est pas une restriction de supposer les ensembles I et J dénombrables. Par définition, on a

$$C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0 \ldots i_r)} \Gamma(U_{i_0 \ldots i_r}, \mathcal{F}),$$

$$C^r(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = \prod_{(j_0 \ldots j_r)} \Gamma(V_{j_0 \ldots j_r}, \mathcal{F}).$$

On sait (*cf.* n° 13) que ces espaces sont munis, de manière intrinsèque, d'une structure d'espace de Fréchet. Soient $\tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, $\tilde{C}^r(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ les sous-espaces des cochaînes alternées. Ce sont aussi des espaces de Fréchet et les applications de cobord δ sont des applications continues sur ces espaces.

Envisageons l'application de restriction

$$\tau^* : \quad \tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \tilde{C}^r(\mathfrak{V}, \mathcal{F}).$$

Elle est définie pour $f \in \tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ par la formule

$$\tau^* f(j_0, \ldots, j_r) = f(\tau(j_0), \ldots, \tau(j_r)) |_{V_{j_0 \ldots j_r}}.$$

Cette application est complètement continue ([14]) car d'une part on a

$$V_{j_0} \cap \ldots \cap V_{j_r} \subset \hat{U}_{\tau(j_0)} \cap \ldots \cap \hat{U}_{\tau(j_r)} \Subset U_{\tau(j_0)} \cap \ldots \cap U_{\tau(j_r)}$$

et, d'autre part, il n'y a qu'un nombre fini de facteurs du type

$$\Gamma(U_{\tau(j_0)} \cap \ldots \cap U_{\tau(j_r)}, \mathcal{F}) \qquad \text{dans} \quad \tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

([14]) C'est-à-dire qu'elle transforme un voisinage convenable de o en un ensemble relativement compact; on emploie aussi aujourdhui la locution « application linéaire compacte » dans ce sens.

Soit $\tilde{Z}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, l'espace des r-cocycles dans $\tilde{C}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F})$; en tant que sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, c'est un espace de Fréchet. On a le même résultat pour $\mathcal{V}$ au lieu de $\mathcal{U}$.

Soit

$$\mathcal{E} = \tilde{Z}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \oplus \tilde{C}^{r-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

Définissons une application $\alpha : \mathcal{E} \to \tilde{Z}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ comme somme de deux applications $\alpha = t + d$, où :

t est égale à la restriction τ^* sur le premier facteur et égale à o sur le second facteur,

d est nulle sur le premier facteur et égale à

$$\delta : \quad \tilde{C}^{r-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \to \tilde{Z}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

sur le second facteur.

L'hypothèse que $H^r(A, \mathcal{F}) \to H^r(B, \mathcal{F})$ soit surjectif entraîne que α est surjectif en vertu du théorème de Leray sur les recouvrements acycliques. D'autre part, t est complètement continue. En vertu d'un théorème de L. Schwartz [22], l'application $d = \alpha - t$ aura une image fermée et, de codimension finie dans $\tilde{Z}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Donc $\tilde{B}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = d(\mathcal{E})$ est fermé et de codimension finie dans $\tilde{Z}^r(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ et, par conséquent,

$$\dim_{\mathbf{C}} H^r(B, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbf{C}} H^r(\mathcal{V}, \mathcal{F}) < +\infty.$$

On va retenir, pour l'utiliser ensuite, la remarque suivante :

Remarque. — Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement dénombrable de X avec des ouverts d'holomorphie et contenant une base d'ouverts de X. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et tout $c > c_0$ l'espace $B^r(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$ est fermé et de codimension finie dans $Z^r(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$ pour $r \geqq q$.

Ceci résulte directement de la fin de la démonstration précédente et tient essentiellement au fait qu'une application linéaire continue d'un espace de Fréchet dans un autre dont l'image est de codimension finie est forcément un homomorphisme (donc l'image est fermée).

18. Quelques remarques encore avant de démontrer les théorèmes de finitude pour les espaces q-pseudoconvexes ou q-pseudoconcaves.

Lemme. — *Soit $\{B_n\}_{n \geqq 0}$ une suite croissante d'ouverts d'un espace topologiqne X tels que $X = \bigcup_n B_n$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes commutatifs sur X et supposons que l'homomorphisme de restriction*

$$H^r(B_{n+1}, \mathcal{F}) \to H^r(B_n, \mathcal{F})$$

soit surjectif, pour tout $n \geqq 0$. *Alors l'homomorphisme de restriction*

$$H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(B_0, \mathcal{F})$$

est surjectif.

Preuve. — Soit

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^r \xrightarrow{\delta} \ldots$$

une résolution flasque du faisceau $\mathcal{F}$.

Posons

$$Z(U, \mathcal{C}^r) = \operatorname{Ker}\{\Gamma(U, \mathcal{C}^r) \xrightarrow{\delta} \Gamma(U, \mathcal{C}^{r+1})\}$$

pour U ouvert dans X.

Le lemme est évident pour $r = 0$. Supposons $r \geqq 1$ et soit $\xi_0 \in H^r(B_0, \mathcal{F})$. Représentons ξ_0 par un élément $\xi_0 \in Z(B_0, \mathcal{C}^r)$. Par hypothèse, on peut trouver un élément $\xi_1 \in Z(B_1 \mathcal{C}^r)$ tel que

$$\xi_1 |_{B_0} = \xi_0 + \delta\eta_0, \qquad \text{avec} \quad \eta_0 \in \Gamma(B_0, \mathcal{C}^{r-1}).$$

Comme $\mathcal{C}^{r-1}$ est flasque on peut trouver un

$$\hat{\eta}_0 \in \Gamma(B_1, \mathcal{C}^{r-1}) \qquad \text{tel que} \quad \hat{\eta}_0 |_{B_0} = \eta_0.$$

Posons

$$\gamma_0 = \xi_0 \quad \text{sur } B_0, \qquad \gamma_1 = \xi_1 - \delta\hat{\eta}_0.$$

On aura $\gamma_1 |_{B_0} = \gamma_0$. On peut trouver un élément $\xi_2 \in Z(B_2, \mathcal{C}^r)$ tel que

$$\xi_2 |_{B_1} = \gamma_1 + \delta\eta_1, \qquad \text{avec} \quad \eta_1 \in \Gamma(B_1, \mathcal{C}^{r-1}).$$

Étendons η_1 en $\hat{\eta}_1 \in \Gamma(B_2, \mathcal{C}^{r-1})$ et posons

$$\gamma_2 = \xi_2 - \delta\hat{\eta}_1.$$

On aura $\gamma_2 |_{B_1} = \gamma_1$, Ainsi de suite on définit des

$$\gamma_n \in Z(B_n, \mathcal{C}^r) \qquad \text{tels que} \quad \gamma_n |_{B_{n-1}} = \gamma_{n-1}.$$

L'ensemble des γ_n définit un élément

$$\gamma \in Z(X, \mathcal{C}^r) \qquad \text{tel que} \quad \gamma |_{B_0} = \gamma_0.$$

Ceci démontre le lemme.

Des propositions 16 et 17 et du lemme précédent on déduit la

Proposition 18. — *Avec les notations du numéro précédent, soit* X *un espace fortement :*

a. q-pseudoconvexe;

b. q-pseudoconcave.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X; alors

$$H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$$

est surjectif si :

a. $r \geqq q$ *lorsque X est fortement q-pseudoconvexe* ($c > c_0$);

b. $r < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$ *lorsque X est fortement q-pseudoconcave* ($0 < c < c_0$).

Preuve. — On va exposer le raisonnement à faire dans le cas *a*. Le cas *b* ne demande que des changements formels. Envisageons l'ensemble Λ des nombres réels $\lambda \geqq c$ tels que

$$H^r(B_\lambda, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F}), \qquad \text{avec} \quad r \geqq q,$$

soit surjectif. Pour démontrer que

$$\Lambda = \{ t \in \mathbf{R} \mid c \leqq \lambda < +\infty \} \qquad \text{et que} \qquad H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$$

est surjectif il suffit de prouver que :

(i) si $\lambda \in \Lambda$ et $c \leqq \lambda' < \lambda$, alors $\lambda' \in \Lambda$;

(ii) si $\lambda_n \nearrow \lambda$ et $\lambda_n \in \Lambda$ pour tout n, alors $\lambda \in \Lambda$;

(iii) si $\lambda \in \Lambda$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon \in \Lambda$.

Or la propriété (i) est banale. La propriété (ii) découle du lemme et la dernière propriété (iii) découle de la proposition **16**.

19. Théorème d'approximation.

a. Soit X un espace fortement q-pseudoconvexe pour lequel nous adopterons les notations du numéro précédent. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et soit $\mathcal{U} = \{ U_\nu \}_{\nu \in \mathbf{Z}}$ un recouvrement adapté à $\mathcal{F}$ (*cf.* n° **13**).

PROPOSITION **19**. — *Soit $c > c_0$; il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $l \geqq q - 1$ l'image de $Z^l(\mathcal{U}|_{B_{c+\varepsilon}}, \mathcal{F})$ dans $Z^l(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$ soit dense dans ce dernier espace.*

Preuve.

α. Soient A, B, V trois ouverts relativement compacts dans X, tels que $A = B \cup V$. Supposons que $(\overline{B - B \cap V}) \cap (\overline{V - B \cap V}) = \emptyset$; alors du recouvrement $\mathcal{U}|_A$ on peut extraire un raffinement $\mathcal{U}' = \{ U'_\nu \}$ tel que pour chaque $U'_{\nu_0 \ldots \nu_q} \neq \emptyset$ l'ensemble $U'_{\nu_0} \cup \ldots \cup U'_{\nu_q}$ est ou bien dans B ou bien dans V ([15]). Si l'on considère les nerfs des recouvrements $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}'|_B$, $\mathcal{U}'|_V$, $\mathcal{U}'|_{B \cap V}$, on aura donc

$$\text{nerf de } \mathcal{U}' = \text{nerf de } \mathcal{U}'|_B \cup \text{nerf de } \mathcal{U}'|_V,$$
$$\text{nerf de } \mathcal{U}'|_B \cap \text{nerf de } \mathcal{U}'|_V = \text{nerf de } \mathcal{U}'|_{B \cap V}.$$

([15]) On fixe, par exemple, une métrique sur X. Si d est la distance de $\overline{B - B \cap V}$ de $\overline{V - B \cap V}$ il suffira de prendre les ouverts $U_\nu \in \mathcal{U}|_A$ dont le diamètre est $< d/2$.

De la suite de Mayer-Vietoris, on déduit la suite exacte

$$\ldots \to H^l(U'|_A, \mathcal{F}) \to H^l(U'|_B, \mathcal{F}) \oplus H^l(\mathcal{U}'|_V, \mathcal{F}) \to H^l(\mathcal{U}'|_{B\cap V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{J^*} \\ \to H^{l+1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F}) \to \ldots.$$

β. Avec les notations du lemme du n° 17, nous désignerons par B l'ouvert B_c, par A l'ouvert désigné par B_1 dans le lemme et par V l'ouvert qu'on avait désigné par $B_1 \cap U_1$. Les conditions précédentes sont satisfaites. Nous démontrerons d'abord que $Z^l(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$ a une image dense dans $Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$.

Définissons une application

$$j: \quad Z^l(\mathcal{U}'|_{B\cap V}, \mathcal{F}) \to Z^{l+1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$$

de la manière suivante. Soit $\gamma \in Z^l(\mathcal{U}'|_{B\cap V}, \mathcal{F})$; désignons par $\alpha \in C^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$ la cochaîne définie par

$$\alpha(\nu_0 \ldots \nu_l) = \begin{cases} \gamma(\nu_0 \ldots \nu_l) & \text{si } U'_{\nu_0}, \ldots, U'_{\nu_l} \in \mathcal{U}'|_{B\cap V}, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On aura $\delta\alpha \in Z^{l+1}(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$. Mais comme $\delta\gamma = 0$, on aura

$$(\delta\alpha)(\nu_0, \ldots, \nu_{l+1}) = 0 \qquad \text{si} \quad U'_{\nu_0}, \ldots, U'_{\nu_{l+1}} \in \mathcal{U}'|_{B\cap V}.$$

On peut donc étendre $\delta\alpha$ en un cocycle $j(\gamma) \in Z^{l+1}(\mathcal{U}|_A, \mathcal{F})$ en posant

$$(j(\gamma))(\nu_0 \ldots \nu_{l+1}) = \begin{cases} (\delta\alpha)(\nu_0 \ldots \nu_{l+1}) & \text{si } U'_{\nu_0}, \ldots, U'_{\nu_{l+1}} \in \mathcal{U}'|_B, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On vérifie que l'application j induit l'homomorphisme j^* de la suite de Mayer-Vietoris,

$$j^*: \quad H^l(B\cap V, \mathcal{F}) \to H^{l+1}(B\cup V, \mathcal{F}) \quad \text{(au signe près).}$$

Remarquons que j est une application linéaire continue d'espaces de Fréchet.

D'après la remarque faite après le théorème 11 on sait que :

γ. L'espace des cobords $B^{l+1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$ est fermé et de codimension finie dans celui des cocycles $Z^{l+1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$, donc un espace de Fréchet pour la topologie induite.

Nous poserons

$$S^l = \{\gamma \in Z^l(U'|_{B\cap V}, \mathcal{F}) \mid j(\gamma) \in B^{l+1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})\}.$$

Comme j est continue, l'image réciproque S^l par j du fermé $B^{l+1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$ est un sous-espace fermé de $Z^l(\mathcal{U}'|_{B\cap V}, \mathcal{F})$, donc S^l est un espace de Fréchet.

Définissons l'application

$$\rho : \quad Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F}) \oplus Z^l(\mathcal{U}'|_V, \mathcal{F}) \to S^l$$

par

$$\rho(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \gamma_1|_{\mathcal{U}'|_{B\cap V}} - \gamma_2|_{\mathcal{U}'|_{B\cap V}}.$$

A cause de l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris, cette application est bien définie et surjective. De plus, c'est une application continue d'espaces de Fréchet. Donc, par le théorème de Banach, c'est un homomorphisme topologique.

δ. Soit $\xi \in Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$, soit $\rho(\xi)$ sa restriction à $\mathcal{U}'|_{B\cap V}$. En vertu du théorème 6 ([16]), si $l \geqq q-1$, on peut trouver une suite $\eta_n \in Z^l(\mathcal{U}'|_V, \mathcal{F})$, $n = 1, 2, \ldots$, dont la restriction $\rho(\eta_n)$ à $\mathcal{U}'|_{B\cap V}$ converge vers $\rho(\xi)$.

Donc $\rho(\xi) - \rho(\eta_n) \to 0$. Comme $\rho(\xi)$ et $\rho(\eta_n)$ sont dans S^l, en vertu du théorème de Banach on peut trouver

$$\gamma_1(n) \in Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F}) \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(n) \in Z^l(U'|_V, \mathcal{F})$$

tels que

$$\gamma_1(n) \to 0, \qquad \gamma_2(n) \to 0,$$
$$\rho(\gamma_1(n) \oplus \gamma_2(n)) = \rho(\xi) - \rho(\eta_n).$$

Donc

$$\rho\{(\xi - \gamma_1(n)) \oplus (\eta_n - \gamma_2(n))\} = 0,$$

c'est-à-dire que la cochaîne

$$\xi_1(n) = \begin{cases} \xi - \gamma_1(n) & \text{sur } \mathcal{U}'|_B, \\ \eta_n - \gamma_2(n) & \text{sur } \mathcal{U}'|_V \end{cases}$$

est un cocycle sur $\mathcal{U}'|_A$; $\xi_1(n) \in Z^l(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$.

Il est clair que l'image de $\xi_1(n)$ dans $Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$ converge vers ξ. Ceci démontre bien que l'image de $Z^l(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$ dans $Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$ est dense dans cet espace.

ε. Envisageons à présent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^l(\mathcal{U}|_A, \mathcal{F}) & \xrightarrow{r} & Z^l(\mathcal{U}|_B, \mathcal{F}) \\ \downarrow s & & \downarrow \bar{s} \\ Z^l(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F}) & \xrightarrow{r'} & Z^l(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F}), \end{array}$$

les applications étant des applications continues d'espaces de Fréchet. Les applications s et $\bar{s}$ sont surjectives en vertu du théorème de Leray sur les

---

([16]) *Cf.* la démonstration du lemme du n° 17. On avait

$$\psi(U_i^*) = V_i \cap D_i, \qquad \psi(U_i) = V_i \cap D_i',$$

avec (D_i, D_i') d'holomorphie dans $\mathbf{C}^{\nu_i}$ et D_i' de Runge dans D_i (c'était des boules concentriques). On notera que $B \cap V = B \cap U_1$.

recouvrements acycliques et du fait que $\mathcal{U}'$ est un recouvrement extrait de $\mathcal{U}$. Ce sont donc des homomorphismes topologiques.

Soit $\xi \in Z^l(\mathcal{U}|_B, \mathcal{F})$. D'après ce qui précède, on peut trouver une suite

$$\eta_n \in Z^l(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F}) \qquad \text{telle que} \quad r'(\eta_n) \to \bar{s}(\xi).$$

On peut trouver des

$$\xi_1(n) \in Z^l(\mathcal{U}|_A, \mathcal{F}) \qquad \text{tels que} \quad s(\xi_1(n)) = \eta_n.$$

Donc

$$\bar{s}(r(\xi_1(n)) - \xi) = r'(\eta_n) - \bar{s}(\xi) \to 0.$$

Il existe alors des éléments μ_n avec $\bar{s}(\mu_n) = 0$, dans

$$Z^l(\mathcal{U}|_B, \mathcal{F}) \qquad \text{tels que} \quad r(\xi_1(n)) - \xi + \mu_n \to 0.$$

Si $l \geqq 1$, les μ_n sont des cobords

$$\mu_n = \delta\gamma_n, \qquad \gamma_n \in C^{l-1}(\mathcal{U}|_B, \mathcal{F}).$$

On peut trouver des cochaînes $\hat{\gamma}_n \in C^{l-1}(\mathcal{U}|_A, \mathcal{F})$ telles que leurs restrictions à $\mathcal{U}|_B$ soient les γ_n.

Alors $r(\xi_1(n) + \delta\hat{\gamma}_n) \to \xi$. Donc on a démontré que l'image de $Z^l(\mathcal{U}|_A, \mathcal{F})$ dans $Z^l(\mathcal{U}|_B, \mathcal{F})$ est dense dans cet espace.

Le même résultat vaut aussi si $l = 0$, car alors les homomorphismes s étant biunivoques sont des isomorphismes.

ξ. Pour terminer la démonstration on doit appliquer un nombre fini de fois le résultat précédent compte tenu du lemme du n° 17 et de la note ([13]).

b. Proposition 20. — *Soit X un espace complexe, soit $\{B_n\}_{n \geqq 0}$ une suite croissante d'ouverts tels que $X = \bigcup B_n$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $\mathcal{U}$ un recouvrement de X adapté à $\mathcal{F}$.*

Supposons que pour chaque n

$$Z^l(\mathcal{U}|_{B_{n+1}}, \mathcal{F}) \to Z^l(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$$

ait une image dense dans le second espace.

Alors aussi

$$Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to Z^l(\mathcal{U}|_{B_0}, \mathcal{F})$$

a une image dense dans $Z^l(\mathcal{U}|_{B_0}, \mathcal{F})$.

Cet énoncé découle du lemme suivant :

Lemme. — *Soit $\{F_n\}_{n \geqq 0}$ une suite d'espaces de Fréchet et $f_n : F_n \to F_{n-1}$ pour $n \geqq 1$ une suite d'applications linéaires continues entre eux à image dense.*

Soit

$$F = \varprojlim_{n \geqq 0} F_n = \{ \{ x_n \} \in \Pi F_n \mid f_n(x_n) = x_{n-1} \text{ pour } n \geqq 1 \},$$

et soit π_n la projection naturelle de F dans F_n.

Alors pour tout n l'image de π_n est dense dans F_n.

En effet, il suffira de prendre pour F_n l'espace $Z^l(\mathfrak{U}|_{B_n}, \mathfrak{F})$ et pour f_n l'application de restriction dans $Z^l(\mathfrak{U}|_{B_{n-1}}, \mathfrak{F})$ pour $n \geqq 1$. Alors F s'identifie à l'espace $Z^l(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ (même du point de vue topologique si l'on munit F de sa topologie de limite inverse).

Démonstration du lemme. — Comme toute suite $\{ x_n \}_{n \geqq n_0} \in \varprojlim_{n \geqq n_0} F_n$ se prolonge en une suite $\{ x_n \}_{n \geqq 0} \in F$ en posant

$$x_{n_0-1} = f_{n_0}(x_{n_0}), \qquad x_{n_0-2} = f_{n_0-1}(x_{n_0-1}), \qquad \ldots, \qquad x_0 = f_1(x_1),$$

il suffit de démontrer le lemme pour la projection π_0.

Soit d_n une distance invariante par translations sur F_n apte à définir la topologie de F_n. Soit $x \in F_0$ et $\varepsilon > 0$.

Choisissons des $x_n \in F_n$ de proche en proche pour $n \geqq 0$ de sorte à satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
&x_0 = x, \\
&x_1 \in F_1, \qquad d_0(f_1(x_1) - x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \\
&x_2 \in F_2, \qquad d\ (f_2(x_2) - x_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \\
&\qquad\qquad\quad d_0(f_1 f_2(x_2) - f_1(x_1)) < \frac{\varepsilon}{2^2}, \\
&x_3 \in F_3, \qquad d_2(f_3(x_3) - x_2) < \frac{\varepsilon}{2}, \\
&\qquad\qquad\quad d_1(f_2 f_3(x_3) - f_2(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2^2}, \\
&\qquad\qquad\quad d_0(f_1 f_2 f_3(x_3) - f_1 f_2(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2^3},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Ceci est possible, car les applications f_n sont continues et à image dense.

Posons

$$y_n = x_n + (f_{n+1}(x_{n+1}) - x_n) + (f_{n+1} f_{n+2}(x_{n+2}) - f_{n+1}(x_{n+1})) + \ldots.$$

La série est convergente, car telle est la série des distances d_n de ses éléments, donc y_n est un élément bien défini de F_n. De plus, $f_n(y_n) = y_{n-1}$ pour

tout $n \geqq 1$ comme on vérifie aussitôt. Par conséquence, $\{y_n\} \in F$ et $d_0(y_0, x_0) < \varepsilon$ comme il résulte des inégalités précédentes.

Avec le même raisonnement utilisé à la proposition 18, on obtient le

THÉORÈME 12. — *Soit X un espace fortement q-pseudoconvexe. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X adapté à $\mathcal{F}$. Avec les notations usuelles, pour tout $c > c_0$, l'image de $Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dans $Z^l(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$ est dense dans cet espace si $l \geqq q - 1$.*

c. Dans le cas d'un espace X fortement q-pseudoconcave le théorème analogue est une conséquence directe de la proposition 18. En effet, du fait que $H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$ est surjectif pour $r < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$ $(0 < c < c_0)$, on déduit le

THÉORÈME 13. — *Soit X un espace fortement q-pseudoconcave. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X adapté à $\mathcal{F}$. Avec les notations usuelles, pour $0 < c < c_0$, l'application*

$$Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to Z^l(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$$

est surjective pour $0 \leqq l < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$.

Preuve. — Pour $l = 0$ l'espace des cocycles est égal à la cohomologie en dimension 0. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

Soit $0 < l < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$, et soit $\xi \in Z^l(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$. Du fait que

$$H^l(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^l(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F})$$

est surjectif, découle qu'il existe un cocycle $\xi_1 \in Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tel que

$$\xi_1|_{\mathcal{U}|_{B_c}} = \xi + \delta\eta, \qquad \text{avec} \quad \eta \in C^{l-1}(\mathcal{U}|_{B_c}, \mathcal{F}).$$

Envisageons la cochaîne $\hat{\eta} \in C^{l-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ définie de la manière suivante :

$$\hat{\eta}_{\nu_0 \ldots \nu_{l-1}} = \begin{cases} \eta_{\nu_0 \ldots \nu_{l-1}} & \text{si } U_{\nu_0}, \ldots, U_{\nu_{l-1}} \subset B_c, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Le cocycle

$$\hat{\xi} = \xi_1 - \delta\hat{\eta} \in Z^l(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

satisfait alors à la condition $\hat{\xi}|_{\mathcal{U}|_{B_c}} = \xi$. Ceci démontre l'assertion.

20. Théorème de finitude.

a. Soit X un espace fortement q-pseudoconvexe pour lequel nous adopterons les notations usuelles.

PROPOSITION 21. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout $c > c_0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'application*

$$H^r(B_{c+\varepsilon}, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$$

soit un isomorphisme pour $r \geqq q$.

Preuve. — Reprenons les notations de la proposition 19. Il suffit de démontrer que $H^r(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F}) \to H^r(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$ est injectif pour $r \geqq q$ (compte tenu de la proposition 18 et de la remarque au lemme du n° 17). Soit $\xi \in Z^r(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$ et supposons que son image $r_B(\xi)$ dans $Z^r(\mathcal{U}'|_B, \mathcal{F})$ soit un cobord. Comme $H^r(\mathcal{U}'|_V, \mathcal{F}) = 0$ (th. 5), de la suite de Mayer-Vietoris, il résulte que la classe de ξ est dans l'image de j^*. Il existe donc un

$$\eta \in Z^{r-1}(\mathcal{U}'|_{B\cap V}, \mathcal{F}) \qquad \text{et} \qquad \mu \in C^{r-1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$$

tels que $\xi = j(\eta) + \delta\mu$. Approchons η par $\eta'_n \in Z^{r-1}(\mathcal{U}'|_V, \mathcal{F})$, ceci est possible d'après le théorème 12, car $r - 1 \geqq q - 1$. Soit $r_{B\cap V}(\eta'_n)$ l'image de η'_n dans $Z^{r-1}(\mathcal{U}'|_{B\cap V}, \mathcal{F})$. On aura

$$j(r_{B\cap V}(\eta'_n)) = \delta\gamma_n, \qquad \text{avec} \quad \gamma_n \in C^{r-1}(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F}).$$

Donc

$$\xi - \delta\mu - \delta\gamma_n = j(\eta - r_{B\cap V}(\eta'_n)).$$

Ceci nous montre que ξ peut être approché comme on veut par des cobords. On sait que l'espace des cobords $B^r(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$ est fermé dans $Z^r(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$. Comme ce dernier est complet, il résulte que $\xi \in B^r(\mathcal{U}'|_A, \mathcal{F})$.

b. Soit X un espace fortement q-pseudoconcave pour lequel on adopte les notations usuelles. De la suite de Mayer-Vietoris, en vertu des résultats précédents, on obtient de manière analogue la

PROPOSITION 22. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout $0 < c < c_0$ il existe un $\varepsilon > 0$, avec $c - \varepsilon > 0$, tel que l'application*

$$H^r(B_{c-\varepsilon}, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$$

soit un isomorphisme pour $r < \dim(\mathcal{F}) - q$.

c. Nous voulons démontrer le

THÉORÈME 14. — *Avec les notations usuelles, soit X un espace fortement :*

a. q-pseudoconvexe;
b. q-pseudoconcave.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors

$$\dim_{\mathbf{C}} H^r(X, \mathcal{F}) < +\infty;$$

a. si $r \geqq q$ et X est fortement q-pseudoconvexe;
b. si $r < \dim(\mathcal{F}) - q$ et X est fortement q-pseudoconcave.

Ce théorème est une conséquence du lemme suivant :

LEMME. — *Soit X un espace complexe; soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X adapté à $\mathcal{F}$.*

Supposons qu'il existe dans X une suite croissante $\{B_n\}_{n\geqq 0}$ d'ouverts tels que $X=\bigcup_0^\infty B_n$ satisfaisant aux conditions

(i) $H^r(B_{n+1}, \mathcal{F})\to H^r(B_n, \mathcal{F})$ *est un isomorphisme pour* $n\geqq 0$;

(ii) $Z^{r-1}(\mathcal{U}|_{B_{n+1}}, \mathcal{F})$ *a une image dense dans* $Z^{r-1}(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$, *pour* $n\geqq 0$, *Alors l'homomorphisme*

$$H^r(X, \mathcal{F})\to H^r(B_0, \mathcal{F})$$

est bijectif.

Preuve. — On note par r_n l'homomorphisme de restriction de $C^\star(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dans $C^\star(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$, et par r_n^m celui de $C^\star(\mathcal{U}|_{B_m}, \mathcal{F})$ dans $C^\star(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$ pour $m\geqq n$.

D'après le lemme du n° 18 on sait que les homomorphismes

$$r_n^\star : \quad H^r(X, \mathcal{F})\to H^r(B_n, \mathcal{F})$$

sont surjectifs.

Par l'hypothèse (i) $\operatorname{Ker} r_0^\star=\operatorname{Ker} r_n^\star$ pour $n\geqq 0$. On doit démontrer que $\operatorname{Ker} r_0^\star=0$.

Soit $\alpha\in\operatorname{Ker} r_0^\star$. Si $\xi\in Z^r(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un représentant de α on aura

$$r_n(\xi)=\delta\gamma_n, \qquad \gamma_n\in C^{r-1}(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$$

de sorte que

$$r_n^{n+1}(\gamma_{n+1})-\gamma_n\in Z^{r-1}(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F}).$$

Les γ_n pouvant être altérées par l'addition d'un cocycle de $Z^{r-1}(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$, on reconnaît, en vertu de la condition (ii) qu'on peut les choisir de proche en proche de sorte que pour tout $n\geqq 0$, les séries

$$\eta_n=(r_n^{n+1}(\gamma_{n+1})-\gamma_n)+(r_n^{n+1}\, r_{n+1}^{n+2}(\gamma_{n+2})-r_n^{n+1}(\gamma_{n+1}))+\dots$$

soient convergentes dans $Z^{r-1}(\mathcal{U}|_{B_n}, \mathcal{F})$ (*cf.* lemme du n° 19). Posons $\beta_n=\gamma_n+\eta_n$; on a $r_n^{n+1}(\beta_{n+1})=\beta_n$, donc on définit un élément $\beta\in C^{r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ pour lequel $\delta\beta=\xi$. Ceci démontre que $\alpha=0$.

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème on a en particulier si X est q-complet*

$$H^r(X, f)=0 \qquad \textit{pour} \quad r\geqq q.$$

Car on peut prendre dans ce cas $B_0=\emptyset$

21. Cohomologie avec supports.

a. Soit X un espace topologique, soient X_1, X_2 deux parties ouvertes de X telles que $X = X_1 \cup X_2$. On pose $X_{12} = X_1 \cap X_2$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes commutatifs sur X et soit $\mathcal{F}_\mu$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ égal à $\mathcal{F}$ sur X_μ et nul sur $X - X_\mu$. On a la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}_{12} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0,$$

où

$$\alpha(\sigma) = \sigma \oplus \sigma, \qquad \beta(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Soit Φ une famille paracompactifiante sur X ([17]). Par passage à la suite exacte de cohomologie, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_{\Phi_{12}}(X_{12}, \mathcal{F}) \to H^0_{\Phi_1}(X_1, \mathcal{F}) \oplus H^0_{\Phi_2}(X_2, \mathcal{F}) \to H^0_{\Phi}(X, \mathcal{F}) \to \dots \\ &\to H^q_{\Phi_{12}}(X_{12}, \mathcal{F}) \to H^q_{\Phi_1}(X_1, \mathcal{F}) \oplus H^q_{\Phi_2}(X_2, \mathcal{F}) \to H^q_{\Phi}(X, \mathcal{F}) \\ &\to H^{q+1}_{\Phi_{12}}(X_{12}, \mathcal{F}) \to \dots, \end{aligned}$$

où Φ_μ désigne la famille des éléments de Φ contenu dans X_μ.

b. Soit X un espace complexe sur lequel il existe une fonction $\varphi > 0$ fortement q-pseudoconvexe telle que les ensembles

$$X_{\varepsilon, c} = \{ x \in X \mid \varepsilon < \varphi(x) < c \}$$

soient relativement compacts pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $c > 0$. Soit

$$B_c = \{ x \in X \mid \varphi(x) < c \} \qquad (c > 0.$$

La frontière ∂B_c de B_c est compacte et fortement q-pseudoconvexe.

Lemme 1. — *On peut choisir un recouvrement fini* $\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{1 \leq i \leq t}$ *de* ∂B_c *dans* X, *aussi fin qu'on veut, et une suite décroissante* $\{ B^j \}_{0 \leq j \leq t}$ *d'ouverts à frontière fortement q-pseudoconvexe dans* X *tels que*

(i) $B_c = B^0 \supset B^1 \supset \dots \supset B^t$, $B^0 \supset \overline{B}^t$, $B^i - B^{i+1} \Subset U_i$ *pour* $0 \leq i \leq t-1$.

(ii) *pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* X *on a*

$$H^r_k(U_i \cap B_j, \mathcal{F}) = 0 \quad \textit{pour } 0 \leq r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q \qquad (1 \leq i \leq t,\ 0 \leq j \leq t),$$

et

$$H^r_k(U_i \cap B_j, \mathcal{F}) \to H^r_k(U_i \cap B_{j-1}, \mathcal{F}) \quad \textit{est injectif pour } r = \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q + 1.$$

([17]) Pour la définition de famille paracompactifiante on peut se référer au livre de Godement [10], p. 150. Il suffit de retenir pour la suite que telle est la famille de tous les fermés d'un espace paracompact.

La démonstration se fait avec le même raisonnement qu'au lemme du n° 17 en utilisant les théorèmes 7 et 8 au lieu du théorème 5. Une remarque analogue à celle faite à la fin du lemme cité s'applique aussi dans ce cas.

PROPOSITION 23. — *Pour tout* $c > 0$ *il existe un* $\varepsilon_0 > 0$, *avec* $c - \varepsilon_0 > 0$ *tel que pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* X *et* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *l'application*

$$H^r_\Phi(B_{c-\varepsilon}, \mathcal{F}) \to H^r_\Phi(B_c, \mathcal{F})$$

soit un isomorphisme pour $0 \leq r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$, Φ *étant la famille des fermés de* X *contenus respectivement dans* $B_{c-\varepsilon}$ et B_c.

Preuve. — Soit $A = B_c$, $B = B^1$, $V = A \cap U_1$. On peut écrire $A = B \cup V$ et $B \cap V = B \cap U_1$. Il suffit de démontrer que l'application

$$H^r_\Phi(B, \mathcal{F}) \to H^r_\Phi(A, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme pour $r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$ En effet, par itération du procédé, on démontrera que $H^r_\Phi(B_l, \mathcal{F}) \to H^r(B_c, \mathcal{F})$ est un isomorphisme et, en vertu de la remarque à la fin du lemme précédent, on aura le résultat cherché.

Or de la suite exacte établie en a on déduit une suite exacte

$$\begin{aligned} \ldots \to H^r_\Phi\ (B \cap V, \mathcal{F}) &\to H^r_\Phi(B, \mathcal{F}) \oplus H^r_\Phi(V, \mathcal{F}) \to H^r_\Phi(A, \mathcal{F}) \\ &\to H^{r+1}_\Phi(B \cap V, \mathcal{F}) \to \ldots . \end{aligned}$$

Des hypothèses, on déduit que

$$\begin{aligned} H^r_\Phi(B \cap V, \mathcal{F}) &= H^r_k(B \cap V, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour } r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q, \\ H^r_\Phi(V, \mathcal{F}) \quad &= H^r_k(V, \mathcal{F}) \quad = 0 \quad \text{pour } r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q \end{aligned}$$

et que

$$H^{r+1}_\Phi(B \cap V, \mathcal{F}) \to H^{r+1}_\Phi(V, \mathcal{F}) \quad \text{est injectif si } r = \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q.$$

De là résulte bien que l'homomorphisme

$$H^r_\Phi(B, \mathcal{F}) \to H^r_\Phi(A, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme pour $r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$.

De la même façon on démontre la

PROPOSITION 24. — *Pour tout* $c > 0$ *il existe un* $\varepsilon_1 > 0$, *tel que pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* X *et* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *l'application*

$$H^r_\Phi(B_c, \mathcal{F}) \to H^r_\Phi(B_{c+\varepsilon}, \mathcal{F})$$

soit un isomorphisme pour $0 \leq r \leq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$, Φ *étant la famille des fermés de* X *contenus respectivement dans* B_c et $B_{c+\varepsilon}$.

c. Soit $\varepsilon_0(c)$ la borne supérieure des ε_0 de la proposition 23 et soit $\varepsilon_1(c)$ la borne supérieure des ε_1 de la proposition 24. Posons

$$\varepsilon(c) = \inf\{\varepsilon_0(c), \varepsilon_1(c)\}.$$

Des propositions précédentes il résulte que $\varepsilon(c)$ est une fonction de c semi-continue inférieurement. On peut donc trouver une suite

$$c_0 > c_1 > c_2 > \ldots, \qquad c_\nu \to 0, \qquad c_\nu > 0,$$

telle que l'application

$$H^r_{\Phi_\nu}(B_{c_\nu}, \mathcal{F}) \to H^r_{\Phi_{\nu-1}}(B_{c_{\nu-1}}, \mathcal{F})$$

soit un isomorphisme pour $r \leqq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$, pour $\nu = 1, 2, \ldots$, Φ_ν étant la famille des fermés de X contenus dans B_{c_ν}. On aura

$$\bigcap_\nu \overline{B}_{c_\nu} = \emptyset.$$

Proposition 25. — *Soit X un espace complexe satisfaisant aux hypothèses énoncées en b, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour tout $c > 0$, on a*

$$H^r_\Phi(B_c, \mathcal{F}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad r \leqq \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q,$$

Φ étant la famille des fermés de X contenus dans B_c.

Preuve. — Dans la suite précédente $\{c_\nu\}$ on peut supposer $c = c_0$. Soit

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2 \to \ldots$$

une résolution flasque de $\mathcal{F}$.

Soit $\xi_0 \in Z^r_{\Phi_0}(B_{c_0}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker}(\Gamma_{\Phi_0}(B_{c_0}, \mathcal{C}^r) \xrightarrow{\delta} \Gamma_{\Phi_0}(B_{c_0}, \mathcal{C}^{r+1}))$.
Soit i_ν l'homomorphisme de restriction

$$Z^r_{\Phi_\nu}(B_{c_\nu}, \mathcal{F}) \to Z^r_{\Phi_{\nu-1}}(B_{c_{\nu-1}}, \mathcal{F}).$$

On peut trouver $\xi_1 \in Z^r_{\Phi_1}(B_{c_1}, \mathcal{F})$ tel que

$$i_1(\xi_1) = \xi_0 + \delta\gamma_0, \qquad \text{avec} \quad \gamma_0 \in \Gamma_{\Phi_0}(B_{c_0}, \mathcal{C}^{r-1}).$$

De même, on peut trouver $\xi_2 \in Z^r_{\Phi_2}(B_{c_2}, \mathcal{F})$ tel que

$$i_2(\xi_2) = \xi_1 + \delta\gamma_1, \qquad \text{avec} \quad \gamma_1 \in \Gamma_{\Phi_1}(B_{c_1}, \mathcal{C}^{r-1}).$$

Ainsi de suite, on aura

$$\xi_0 = \xi_1 - \delta\gamma_0 = \xi_2 - \delta\gamma_0 - \delta\gamma_1 = \ldots = \xi_\nu - \delta(\gamma_0 + \ldots + \gamma_\nu),$$

avec

$$\operatorname{Supp}\xi_\nu \subset B_{c_\nu}, \qquad \operatorname{Supp}\gamma_\nu \subset B_{c_\nu}.$$

La série $\sum_0^\infty \gamma_\nu$ est localement finie, car $\bigcap_\nu \overline{B}_{c_\nu} = \emptyset$. Donc elle représente un élément $\gamma \in \Gamma_{\Phi_0}(B_{c_0}, \mathcal{C}^{r-1})$. Le support de $\xi_0 - \delta\gamma$ est nul, car contenu dans $\bigcap_\nu \overline{B}_{c_\nu}$. Donc $\xi_0 = \delta\gamma$. Ceci démontre que $H^r_{\Phi_0}(B_{c_0}, \mathcal{F}) = 0$ pour $r \geqq 1$. Pour $r = 0$, la proposition est évidente.

Théorème 15. — *Soit X un espace complexe sur lequel il existe une fonction $\varphi > 0$, fortement q-pseudoconvexe telle que les ensembles*

$$X_{\varepsilon,c} = \{ x \in X \mid \varepsilon < \varphi(x) < c \}$$

soient relativement compacts pour $\varepsilon > 0$ et $c > 0$. Soit

$$B_c = \{ x \in X \mid \varphi(x) < c \} \qquad \textit{pour} \quad c < 0.$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, l'homomorphisme

$$H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(X - B_c, \mathcal{F})$$

est bijectif si $r < \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$,
injectif si $r = \operatorname{dih}(\mathcal{F}) - q$.

Preuve. — On a la suite exacte de cohomologie relative au sous-espace B_c.

$$\begin{aligned} \ldots \to H^r_\Phi\ (B_c, \mathcal{F}) &\to H^r(X, \mathcal{F}) \to H^r(X - B_c, \mathcal{F}) \\ &\to H^{r+1}_\Phi\ (B_c, \mathcal{F}) \to \end{aligned}$$

où Φ désigne la famille des fermés dans X contenus dans B_c.

Le théorème est alors conséquence immédiate de la proposition 25. En particulier, les hypothèses précédentes sont vérifiées si X est un espace q-complet.

Remarque. — Le procédé de démonstration suivi est inspiré d'une idée due à Ehrenpreis [8].

6. Applications.

22. Filtration de la cohomologie sur un fibré.

a. Soient X un espace complexe et $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X de fibre $\mathbf{C}^r$. Soit $\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts d'holomorphie de sorte que sur chaque U_i le fibré E soit trivial. Si

$\Phi_i : U_i \times \mathbf{C}^r \to E$ sont les cartes ainsi obtenues, nous désignerons par $g_{ij} : U_{ij} \to GL(r, \mathbf{C})$ le cocycle défini par les relations

$$\Phi_j^{-1} \Phi_i(z, \xi_i) = (z, g_{ji} \circ \xi_i)$$

ξ_i désignant les coordonnées en fibre au-dessus de U_i.

Envisageons E comme espace complexe et sur E le recouvrement

$$\hat{\mathfrak{U}} = \{ \pi^{-1}(U_i) \}_{i \in I}.$$

Les ouverts de $\hat{\mathfrak{U}}$ sont des ouverts d'holomorphie.

Soit U un ouvert de X contenu dans U_i. Toute fonction holomorphe f sur $\pi^{-1}(U)$ peut être développée en série de puissances en les coordonnées en fibre ξ_i :

$$f = \sum c^i_{\nu_1 \ldots \nu_r}(z) \, \xi_{i1}^{\nu_1} \ldots \xi_{ir}^{\nu_r},$$

les $c^i_{\nu_1 \ldots \nu_r}(z)$ étant des fonctions holomorphes sur U. Il résulte que l'anneau $A(U) = \Gamma(\Pi^{-1}(U), \mathcal{O})$ est filtré par les puissances de l'idéal $A(U)(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{ir})$. Autrement dit, f sera de degré filtrant $\geqq k$ si elle s'annule à l'ordre $\geqq k$ sur la section nulle du fibré $E|_U$.

Si $U \subset U_i \cap U_j$, on peut aussi développer f par rapport aux coordonnées en fibre ξ_j sur U_j :

$$f = \sum_{\mu_i \geqq 0} c^j_{\mu_1 \ldots \mu_r}(z) \, \xi_{j1}^{\mu_1} \ldots \xi_{jr}^{\mu_r}.$$

Comme $\xi_i = g_{ij}(z) \xi_j$ on voit d'abord que la filtration choisie sur $A(U)$ ne dépend pas du choix des coordonnées en fibre, ce qui était aussi évident *a priori* d'après la signification géométrique.

Désignons par X_i^k le vecteur de composantes $\xi_{i1}^{\nu_1} \ldots \xi_{ir}^{\nu_r}$, $\nu_1 + \ldots + \nu_r = k$. Si $P_k(g)$ désigne la puissance tensorielle symétrique $k^{\text{ième}}$ de l'endomorhisme $g \in GL(r, \mathbf{C})$ des relations précédentes on tire que $X_i^k = P_k(g_{ij}) X_j^k$. Désignons par $C_k^i(z)$ le vecteur de composantes $c^i_{\nu_1, \ldots, \nu_r}(z)$, $\nu_1 + \ldots + \nu_r = k$. De ce qui précède, il résulte que $C_k^i(z) = P_k({}^t g_{ij}^{-1}) C_k^j(z)$, c'est-à-dire $C_k^i(z)$ représente sur U une section du fibré $E^{\star(k)}$ puissance tensorielle symétrique $k^{\text{ième}}$ du fibré $E^\star$ dual de E. De plus, notons $A_k(U)$ l'ensemble des éléments de $A(U)$ de degré filtrant $\geqq k$; alors $A_k(U)$ est somme directe de $A_{k+1}(U)$ et de l'espace des sections de $E^{\star(k)}$ sur U.

b. Envisageons le groupe $C^i(\hat{\mathfrak{U}}, \mathcal{O})$ des i-cochaînes de $\hat{\mathfrak{U}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}$. D'après ce qu'on vient de dire, ce groupe est filtré, et la filtration est compatible avec l'opération δ de cobord. Ceci nous donne une filtration sur la cohomologie $H^i(\hat{\mathfrak{U}}, \mathcal{O})$. Soit $GH^i(\hat{\mathfrak{U}}, \mathcal{O})$ le groupe gradué associé à cette filtration. De la remarque faite tout à l'heure, nous déduisons la proposition suivante :

PROPOSITION 26. — *Soit $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X. Il existe une filtration naturelle sur les groupes de cohomologie $H^i(E, \mathcal{O})$. Le gradué associé est isomorphe à la somme directe des groupes de cohomologie en dimension i de X à valeurs dans les puissances tensorielles symétriques du fibré E^* dual de E*

$$GH^i(E, \mathcal{O}) \simeq \bigoplus_k H^i(X, E^{*(k)}).$$

23. Théorèmes d'annulation de la cohomologie.

a. Supposons que le fibré dual E^*, en tant qu'espace complexe, soit (*a*) fortement q-convexe, (*b*) fortement q-concave. Alors on sait que

$$\begin{array}{lll} (a) & \dim_{\mathbf{C}} H^i(E^*, \mathcal{O}) < \infty & \text{si } i \geqq q \text{ dans le cas convexe;} \\ (b) & \dim_{\mathbf{C}} H^i(E^*, \mathcal{O}) < \infty & \text{si } i < \operatorname{dih}(X) + r - q \\ & & \text{dans le cas concave.} \end{array}$$

Appliquons la proposition précédente au fibré E^* et remarquons que

$$\dim_{\mathbf{C}} GH^i(E^*, \mathcal{O}) \leqq \dim_{\mathbf{C}} H^i(E^*, \mathcal{O}).$$

Nous en déduisons la

PROPOSITION 27. — *Si le fibré E^* est (a) fortement q-convexe, (b) fortement q-concave, alors il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geqq k_0$ on ait*

$$\begin{array}{lll} (a) & H^i(X, E^{(k)}) = 0 & \textit{pour } i \geqq q \textit{ dans le cas } q\textit{-convexe;} \\ (b) & H^i(X, E^{(k)}) = 0 & \textit{pour } i < \operatorname{dih}(X) + r - q \\ & & \textit{dans le cas } q\textit{-concave,} \end{array}$$

$E^{(k)}$ désignant la puissance tensorielle symétrique $k^{\text{ième}}$ du fibré E.

b. Nous voulons terminer en donnant un critère pratique de calcul de la convexité d'un fibré E dans le cas où X est une variété complexe compacte de dimension n.

Pour cela, introduisons sur E une métrique hermitienne sur les fibres. Au-dessus de chaque ouvert $U_i \in \mathcal{U}$, elle sera donnée par une forme hermitienne positive non dégénérée ${}^t\bar{\xi}_i h_i \xi_i$, la matrice h_i dépendant différentiablement du point $z \in U_i$. Pour $z \in U_i \cap U_j$ on aura $h_j = {}^t\bar{g}_{ij} h_i g_{ij}$.

Sur l'espace E envisageons la fonction $\varphi = {}^t\xi_i h_i \xi_i$. Comme X est compacte les ouverts $B_c = \{ x \in E \mid \varphi(x) < c \}$ pour $c > 0$ sont relativement compacts.

Pour le calcul de la signature de la forme de Lévi de φ, nous faisons les remarques suivantes. La métrique donnée définit une ∂-connection dans E donnée par les (1, 0)-formes $h_i^{-1} \partial h_i$. L'obstruction à ce que cette connection soit holomorphe est donnée par l'annulation de la forme de courbure

$\Theta_i = \bar{\partial}(h_i^{-1}\,\partial h_i)$. Par un calcul direct ([18]), on trouve qu'en un point $(z, \xi) \in E$ la forme de Lévi $L(\varphi)$ de φ a autant de valeurs propres < 0 que la forme ${}^t\bar{\xi}\, h\Theta\xi$ et r valeurs propres > 0 de plus que ladite forme.

Nous observons encore que ${}^t\bar{\eta}_i\, {}^t h_i^{-1}\, \eta_i$ est une métrique hermitienne sur le fibré dual E^*. Pour cette métrique la forme de courbure est $\Theta_i^* = \bar{\partial}({}^t h_i\, \partial\, {}^t h_i^{-1})$. En posant $\eta_i = {}^t h_i \bar{\xi}_i$ on a une application de E dans E^* et il résulte

$$ {}^t\bar{\eta}\, {}^t h^{-1}\, \Theta^* \eta = -{}^t\bar{\xi}\, \overline{h\Theta}\, \bar{\xi}. $$

Cela dit, envisageons pour chaque $(z_i, \xi_i) \in E$ la forme hermitienne en dz, $d\bar{z}$, donnée localement par

$$ (1) \qquad Q(\xi, dz, d\bar{z}) = {}^t\bar{\xi}_i\, h_i \Theta_i \xi_i. $$

Pour calculer la q-convexité de E utilisons la fonction $\varphi = {}^t\bar{\xi}\, h\xi$ et pour calculer la q-concavité, la fonction $e^{-c\varphi}$ avec $c > 0$ assez grand. De ce qu'on vient de dire il résulte le lemme suivant :

LEMME. — *Supposons que pour chaque $\xi \neq 0$ la forme Q ait $n - q + 1$ valeurs propres > 0 et $n - p + 1$ valeurs propres < 0. Alors le fibré E est fortement q-convexe (par rapport à la fonction φ) et fortement $(p + r - 1)$-concave (par rapport à la fonction $e^{-c\varphi}$). Par correspondance, le fibré dual E^* sera fortement p-convexe (par rapport à la fonction $\varphi^* = {}^t\bar{\eta}\, {}^t h^{-1} \eta$) et fortement $(q + r - 1)$-concave (par rapport à la fonction $e^{-c\varphi^*}$).*

On en conclut le résultat suivant.

PROPOSITION 28. — *Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe compacte X de dimension n. On munit E d'une forme hermitienne h positive non dégénérée, dont la forme de courbure soit Θ, et l'on définit sur E une forme différentielle Q de type $(1, 1)$ en les différentielles de la base X, dont l'expression locale est donnée par la formule (1). Supposons que Q ait t_1 valeurs propres > 0 et $n - t_2$ valeurs propres < 0 pour tout point de E. Il existe alors un entier k_0 tel que*

$$ H^i(X, E^{(k)}) = 0 \qquad si \quad i \notin \{t_1, t_1 + 1, \ldots, t_2\} \quad et \quad k \geqq k_0. $$

En particulier, si la forme Q est non dégénérée $t_2 = t_1 = t$ et l'on a

$$ H^i(X, E^{(k)}) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq t \quad \text{et} \quad k \geqq k_0. $$

On rapprochera ce résultat d'un théorème bien connu de BOTT concernant les espaces homogènes complexes de groupes de Lie [4].

([18]) On se sert du fait qu'en un point $z_0 \in X$, par choix convenable des coordonnées dans les fibres au voisinage de z_0, on aura $(\partial h)_{z_0} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ANDREOTTI (A.). — *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudoconcaves* (à paraître dans ce *Bulletin*).

[2] BEHNKE (H.) et STEIN (K.). — Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen, *Nachr. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.*, 1939, p. 195-202.

[3] BEHNKE (H.) et THULLEN (P.). — *Theorie der Funktionen meherer komplexer Veränderlichen.* — Berlin, Springer, 1934 (*Ergebnisse der Mathematik* ..., Band 3, Heft 3).

[4] BOTT (R.). — Homogeneous vector bundles, *Annals of Math.*, Series 2, t. 66, 1957, p. 203-248.

[5] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). — *Homological algebra.* — Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[6] CARTAN (H.) et SERRE (J.-P.). — Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 128-130.

[7] DOQUIER (F.) et GRAUERT (H). — Levisches Problem und Rungenschenn Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen*, t. 140, 1960, p. 94-123.

[8] EHRENPREIS (L.). — Some applications of the theory of distributions to several complex variables, *Seminar on analytic functions*, t. 1. — Princeton, Institute for advanced Study, 1957.

[9] FRENKEL (J.). — Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 135-230 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1956).

[10] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[11] GRAUERT (H.). — Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen, *Math. Annalen*, t. 133, 1957, p. 450-472.

[12] GRAUERT (H.). — On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, *Annals of Math.*, t. 68, 1958, p. 460-472.

[13] GRAUERT (H.). — Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 87, 1959, p. 341-350.

[14] GRAUERT (H.). — Ueber Modifikationen und exceptionnelle analytische Mengen, *Math. Annalen*, 1962 (à paraître).

[15] GRÖBNER (W.). — *Moderne algebraische Geometrie die idealtheorischen Grundlagen.* — Wien, Springer, 1949.

[16] GROTHENDIECK (A.). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Mem. Amer. math. Soc.*, 16).

[17] KODAIRA (K.). — On a differential geometric method in the theory of analytic stacks, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 39, 1953, p. 1268-1273.

[18] MALGRANGE (B.). — *On the theory of functions of several complex variables.* — Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1958 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 13).

[19] NARASIMHAN (R.). — The Levi problem for complex spaces, *Math. Annalen*, t. 142, 1961, p. 355-365.

[20] REMMERT (R,) — Projektionen analytischer Mengen, *Math. Annalen*, t. 130, 1956, p. 410-441,

[21] ROTHSTEIN (W.). — Zur Theorie der Analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen, *Math Annalen*, t. 129, 1955, p. 96-138.

[22] SCHWARTZ (Laurent). — Homomorphismes et applications complètement continues, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2472-2473.

[23] SCHEYA (J.). — Riemannsche Hebbarkeitssätze für Kohomologie Klassen, *Math. Annalen*, t. 144, 1961, p. 345-360.

[24] SÉMINAIRE CARTAN, t. 4. 1951-1952 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. — Paris. École Normale Supérieure (multigraphié); Cambridge, Math. Department at M. I. T., 1955.

[25] SERRE (J.-P.). — Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[26] SERRE (J.-P.). — Un théorème de dualité, *Comment. Math. Helvet.*, t. 29, 1955, p. 9-26.

[27] THULLEN (Peter). — Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen, *Math. Annalen*, t. 111, 1935, p. 137-157.

(Manuscrit reçu le 1er mars 1962).

A. ANDREOTTI,
Istituto matematico,
Università,
Pisa (Italie).

H. GRAUERT,
Mathematisches Institut,
Universität,
Göttingen (Allemagne occidentale).