JACQUELINE LELONG-FERRAND

Sur le prolongement des groupes locaux d'homéomorphismes sur un espace localement compact

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 429-450

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__429_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 429 à 450.

SUR LE PROLONGEMENT DES GROUPES LOCAUX D'HOMÉOMORPHISMES SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT ;

PAR

Mme Jacqueline LELONG-FERRAND

(Paris).

Introduction. — Dans un article antérieur [1], nous avons étudié l'opérateur différentiel X (dérivée de Lie) attaché à un champ de vecteurs lipschitzien ξ, à divergence bornée, sur une variété différentiable V portant un élément de volume. Désignant par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions complexes de classe C^1, à support compact dans V, et par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert constitué par les fonctions de carré sommable sur V, on peut considérer X comme un opérateur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$; et $\mathcal{D}$ étant dense dans $\mathcal{H}$, il est possible de définir l'*extension forte* de X dans $\mathcal{H}$, soit X_0. D'autre part, la condition

$$|\operatorname{div}\xi| \leqq k \qquad (k = \text{Cte})$$

entraîne l'existence d'un opérateur $\tilde{X}$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$ satisfaisant à $\|X + \tilde{X}\| \leqq k$ et à $\langle Xf, g\rangle = \langle f, \tilde{X}g\rangle$, quels que soient f, $g \in \mathcal{D}$. Par définition, l'adjoint X_1 de $\tilde{X}$ constitue l'*extension faible* de X.

Cela étant, dans la première partie de [1], nous avons étudié successivement les trois hypothèses suivantes :

a. Le champ ξ engendre un groupe global à un paramètre d'homéomorphismes de V, c'est-à-dire une application φ de $\mathbf{R} \times V$ sur V, satisfaisant à $\varphi(0, x) = x$ et à $\varphi[t + u, x] = \varphi[t, \varphi(u, x)]$.

b. Il existe un groupe S_t d'opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ satisfaisant à

$$\frac{d}{dt}(S_t f) = X_0 S_t f = S_t X_0 f$$

pour tout f appartenant au domaine $\mathcal{D}_0$ de X_0.

c. $X_0 = X_1$.

Dans les paragraphes **6**, **7**, **8** de [**1**], nous avions établi les relations $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (b)$. Mais le raisonnement du paragraphe **9** par lequel nous voulions prouver la relation $(b) \Rightarrow (a)$ est incomplet (1); et les théorèmes **9** a et **10** a de [**1**] sont en fait inexacts, comme le prouve l'exemple suivant : le champ (ξ, η, ζ) défini dans $\mathbf{R}^3$ par

$$\xi = x^2 - y^2, \qquad \eta = 2xy, \qquad \zeta = -4xz,$$

est à divergence nulle; il engendre le groupe local

$$(t, x_0, y_0, z_0) \to [x(t), y(t), z(t)]$$

défini par

$$[x(t) + iy(t)]^{-1} = (x_0 + iy_0)^{-1} - t; \qquad z(t) = \exp\left[-4\int_0^t x(u)\,du\right];$$

l'application $t \to [x(t), y(t), z(t)]$ obtenue en fixant le point (x_0, y_0, z_0) est définie pour tout t réel si l'on suppose $y_0 \neq 0$, et détermine un groupe global dans chacun des demi-espaces $y > 0$ et $y < 0$; on peut en déduire que les extensions faible et forte de l'opérateur X associé coïncident; malgré cela si $y_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$, le point $[x(t), y(t), z(t)]$ tend vers l'infini quand t tend vers $+\dfrac{1}{x_0}$.

Cette lacune a été remarquée par E. Nelson qui, dans un Mémoire [**3**] paru après [**1**], avait établi occasionnellement un résultat équivalent (2) à la proposition suivante :

« Si le champ ξ est à divergence nulle, et s'il engendre un groupe local $(t, x) \to \varphi(t, x)$ tel que, pour presque tout $x \in V$, $\varphi(t, x)$ soit défini quel que soit t, alors iX est autoadjoint » ;

et il affirme, sans démonstration, l'exactitude de la réciproque.

Nous sommes donc amenés à revenir sur les questions exposées dans [**1**], et à poser la définition suivante :

Définition **1**. — Une mesure positive quelconque μ étant donnée sur V, un groupe local $(t, x) \to \varphi(t, x)$ d'homéomorphismes de V sera dit *presque* global si l'ensemble e des points x de V tels que $\varphi(t, x)$ ne soit pas défini pour tout t réel, est de mesure nulle (3).

---

(1) En effet (*voir* bas p. 12) : l'existence d'un ensemble K'' dense dans K' tel que $\varphi(t, x)$ soit prolongeable pour tout $x \in K''$ n'entraîne pas l'existence d'un prolongement de $\varphi(t, x)$ pour tout $x \in K'$; elle entraîne seulement l'existence d'un ouvert $U \supset K''$ tel que $\varphi(t, x)$ soit prolongeable pour tout $x \in U$.

(2) L'étude du groupe local maximal φ^* engendré par ξ permet en effet de montrer que les ensembles E_t de E. Nelson, relatifs à φ^*, sont fermés.

(3) Il est à noter que si φ est un groupe local maximal, l'ensemble exceptionnel e est un F_σ (*voir* note précédente).

Avec cette définition, nous allons pouvoir énoncer :

PROPOSITION 1. — *Chacune des hypothèses* (*b*) *et* (*c*), *précédemment rappelées, est équivalente à l'hypothèse :*

a'. Le champ ξ *engendre un groupe presque global d'homéomorphismes de* V.

L'énoncé 9 *a* de [1] redevient donc correct si l'on remplace les mots « groupe global » par les mots « groupe presque global » ([4]).

Mais au lieu de nous borner à établir la proposition 1, il nous a paru préférable de donner un résultat plus général relatif aux extensions de l'opérateur X dans les espaces $L^p(\mu)$ relatifs à une mesure positive quelconque μ sur V.

D'autre part, la structure de variété de V ne sert en fait qu'à définir le groupe local φ à partir du champ ξ, et nos résultats s'étendent aux espaces localement compacts sur lesquels on a défini un groupe local φ et une mesure positive μ : c'est dans ce cadre général que se situera notre étude, et la proposition 1 apparaîtra comme un cas particulier du théorème I.

1. Forme générale du problème.

DÉFINITIONS. — Soit E un espace localement compact. Un *groupe local* à un paramètre d'homéomorphismes de E est défini par la donnée :

a. d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}\times E$ tel que l'ensemble

$$I_a = \{ t\in\mathbf{R};\ (t,\ a)\in\Omega \}$$

se réduise, pour chaque $a\in E$, à un intervalle contenant l'origine;

b. d'une application φ de Ω dans E, continue, satisfaisant à $\varphi(0,\ x) = x$ quel que soit $x\in E$, et à

$$\varphi[t,\ \varphi(u,\ x)] = \varphi(t+u,\ x) \tag{1.1}$$

pourvu que $(u,\ x)$, $(t+u,\ x)$ et $[t,\ \varphi(u,\ x)]$ appartiennent à Ω.

L'ouvert Ω est appelé *domaine* du groupe local φ; et le groupe local φ^* sera dit *prolonger* φ, si son domaine Ω^* contient Ω, et si l'on a $\varphi^* = \varphi$ sur Ω.

Le groupe local φ sera dit maximal, s'il n'admet pas d'autre prolongement que lui-même; il sera dit *global* si son domaine Ω est l'espace $\mathbf{R}\times E$ tout entier; et, conformément à la définition 1 il sera dit *presque global* pour une

---

([4]) Les énoncés 10 *a* et 14 *a* devront subir la même modification; et les énoncés 14 *b*, 17 *a* et 18 *b* seront valables si l'on retranche de V^n un ensemble fermé convenablement choisi de mesure nulle (pour plus de précision, *voir* § 6).

Par contre, les énoncés de [1] relatifs aux groupes de transformations isométriques ou conformes des variétés riemanniennes n'ont pas à être modifiés : pour le voir, il suffit de se reporter à l'étude directe de [2].

mesure positive μ si le complémentaire de son domaine se projette sur E suivant un ensemble de mesure nulle.

Enfin nous poserons $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$; et l'*orbite* de a sera l'ensemble $\varphi(I_a, a)$.

Opérateurs linéaires associés à un groupe local. — Soit φ un groupe local opérant sur E et soit K un compact de E; d'après la définition des groupes locaux, nous savons qu'il existe un voisinage V_K de K et un nombre $a_K > 0$ tels que $\varphi(t, x)$ soit défini pour $|t| < a_K$ et $x \in V_K$. De plus, la continuité de φ entraîne l'existence d'un nombre $b_K (0 < b_K \leqq a_K)$ tel que $|t| < b_K$ entraîne $\varphi_t(K) \subset V_K$,

Si f est une fonction complexe à support dans K, nous désignerons par f_t la fonction complexe, à support dans $\varphi_{-t}(K)$, définie pour $|t| < b_K$ par

$$f_t(x) = f[\varphi(t, x)] \qquad \text{pour} \quad x \in V_K.$$

Sur l'espace des fonctions complexes à support dans K nous définissons ainsi une famille d'opérateurs $\Phi_t : f \to f_t$, définis pour $|t| < b_K$ et satisfaisant à

$$\Phi_0 = I, \qquad \Phi_t \circ \Phi_u = \Phi_{t+u}.$$

Nous désignerons par $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel constitué par les fonctions f complexes, continues et à support compact, telles que

$$Xf(x) = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} [f_u(x) - f(x)]$$

existe en chaque point x et soit *borné* quel que soit $x \in E$. L'opérateur X ainsi défini sur $\mathcal{D}$ (transformation infinitésimale associée à φ) satisfait à

$$X(fg) = f\,Xg + g\,Xf,$$

ce qui montre immédiatement que $\mathcal{D}$ est une algèbre.

D'autre part, si $f \in \mathcal{D}$ a son support dans le compact K, $f_t = \Phi_t f$ appartient encore à $\mathcal{D}$ pour $|t| < b_K$, et l'on a

$$(1.2) \qquad \Phi_t X f = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} [\Phi_{t+u} f - \Phi_t f] = X \Phi_t f.$$

Quels que soient la mesure μ définie sur E et le nombre $p \geqq 1$, $\mathcal{D}$ et $X(\mathcal{D})$ sont des sous-espaces de $L^p(\mu)$. Si E est une variété de classe C_1^1 et si X est l'opérateur défini par un champ de vecteurs lipschitzien, $\mathcal{D}$ contient l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact sur E, ce qui montre que $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(\mu)$. Dans le cas général, pour pouvoir définir l'extension forte de X dans $L^p(\mu)$, nous devrons supposer *a priori* que $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(\mu)$; cette extension étant désignée par X_0^p et son domaine par $\mathcal{D}_0^p$, nous dirons alors qu'un groupe S_t^p d'opérateurs bornés de $L^p(\mu)$ *prolonge* Φ_t s'il satisfait a

$$\frac{d}{dt}(S_t f) = X_0^p S_t^p f = S_t^p X_0^p f, \qquad \forall f \in \mathcal{D}_0^p \tag{1.3}$$

[les dérivées étant prises au sens de la convergence en norme dans $L^p(\mu)$].

Et le problème posé peut s'énoncer ainsi :

L'existence d'un groupe S_t^p d'opérateurs bornés de $L^p(\mu)$ prolongeant Φ_t entraîne-t-elle l'existence d'un groupe presque global prolongeant φ ?

Nous résoudrons le problème pour $p > 1$ dans le cas où la mesure positive μ vérifie une inégalité de la forme

$$|\mu(Xf)| \leqq k\mu(|f|) \qquad (k = \text{Cte}) \tag{1.4}$$

pour tout $f \in \mathcal{D}$; la solution sera fondée, d'une part sur l'existence d'un groupe local maximal φ^* prolongeant φ, d'autre part sur les propriétés de l'opérateur X_0^p et de son extension faible X_1^p qui découlent de l'inégalité (1.4) : cette dernière étude utilise la dualité des espaces $L^p(\mu)$ et $L^q(\mu)$ $\left[\text{où } q = \dfrac{p}{p-1}\right]$ définie par le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \mu(f\bar{g}) \tag{1.5}$$

correspondant aux normes

$$\|f\|_r = [\mu(|f|^r)]^{\frac{1}{r}} \qquad (r \geqq 1).$$

2. Hypothèses et résultats. — Avant d'énoncer les résultats, il convient de préciser les hypothèses et la définition de l'opérateur X_1^p.

a. L'hypothèse « $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(\mu)$ » sera vérifiée quels que soient la mesure μ et le nombre $p \geqq 1$, si le groupe local φ satisfait à la condition suivante :

H$_1$. *Quels que soient le point a de E et le voisinage V de a, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}$, à support dans V, telle que $f(a) \neq 0$.*

Soit, en effet, h un élément de $L^p(\mu)$; et soit g continue à support compact K telle que $\|g - h\|_p < \varepsilon$. Il existe un ouvert U, contenant K, de mesure finie m; et les fonctions réelles de $\mathcal{D}$ à support dans U constituent une algèbre séparant les points de l'espace compact $\tilde{U}$ obtenu par adjonction à U d'un « point à l'infini ». De là résulte (d'après Stone-Weierstrass) l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{D}$, à support dans $\overline{U}$, satisfaisant à

$$|f - g| < \varepsilon m^{-\frac{1}{p}} \quad \text{sur } U.$$

On en déduit les inégalités

$$\|f-g\|_p < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|f-h\|_p < 2\varepsilon.$$

C. Q. F. D.

b. L'inégalité (1.4) est vérifiée avec $k=0$ si le groupe local φ conserve la mesure μ; plus généralement nous allons voir que si l'hypothèse (H_1) est vérifiée, la condition exprimée par l'inégalité (1.4) équivaut à :

H_2. *A chaque compact K correspond un nombre $t_K > 0$ tel que l'inégalité $|t| < t_K$ entraîne*

$$|\mu(\Phi_t f)| \leqq e^{k|t|}\mu(|f|) \tag{2.1}$$

pour toute f continue à support dans K.

Démonstration. — Supposons d'abord l'inégalité (1.4) vérifiée pour $f \in \mathcal{D}$. Par hypothèse, si $f \in \mathcal{D}$, Xf est borné; et il résulte de (1.2) que $X\Phi_t f = \dfrac{\partial}{\partial t}(\Phi_t f)$ a mêmes bornes que Xf. Le support de $\Phi_t f$ restant dans un compact fixe pour $|t|$ assez petit on en déduit (par permutation de μ et de l'intégration en t) l'égalité

$$\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t f) = \mu(X\Phi_t f)$$

pourvu que $\Phi_t f$ soit défini, c'est-à-dire pour $|t| < b_K$, en désignant par K le support de f, et par b_K le nombre défini au paragraphe 1. Si f est positive, l'inégalité (1.4) nous donne

$$\left|\frac{d}{dt}\mu(\Phi_t f)\right| \leqq k\,\mu(\Phi_t f),$$

d'où, par intégration, l'inégalité (2.1) pour $|t| < b_K$ et $f \in \mathcal{D}$ positive.

Il reste à étendre l'inégalité (2.1) au cas où f désigne une fonction continue quelconque à support dans K. L'inégalité

$$|\mu(\Phi_t f)| \leqq \mu(|\Phi_t f|) = \mu(\Phi_t |f|)$$

nous permet de nous limiter au cas où f est positive. Or si C désigne un voisinage compact quelconque de K, il résulte de l'hypothèse (H_1) qu'une telle fonction f peut être considérée comme limite d'une suite uniformément convergente f_n de fonctions positives de $\mathcal{D}$ à support dans C. Pour t fixé, $(|t| < b_C)$, la suite $\Phi_t f_n$ converge uniformément vers $\Phi_t f$ et le support de $\Phi_t f_n$ reste dans le compact $\varphi_{-t}(C)$: donc $\mu(\Phi_t f_n)$ tend vers $\mu(\Phi_t f)$; en particulier, $\mu(f_n)$ tend vers $\mu(f)$; et par passage à la limite, on voit que f satisfait à (2.1) pour $|t| < b_C$.

Inversement, supposons l'hypothèse (H_2) vérifiée, et soit f continue à support dans un compact K. Si f est positive, l'inégalité (2.1) entraîne

$$e^{-k|t|}\mu(f) \leqq \mu(\Phi_t f) \leqq e^{k|t|}\mu(f),$$

d'où

$$(2.2) \qquad |\mu(\Phi_t f - f)| \leqq [e^{k|t|} - 1]\,\mu(f).$$

Si f est réelle, de signe quelconque, nous décomposerons f en $f^+ - f^-$, les fonctions positives continues f^+ et f^- ayant leur supports dans K; l'inégalité (2.2) s'appliquant à f^+ et f^- séparément, nous aurons

$$|\mu(\Phi_t f - f)| \leqq (e^{k|t|} - 1)\,[\mu(f^+) + \mu(f^-)],$$

soit

$$(2.3) \qquad |\mu(\Phi_t f - f)| \leqq [e^{k|t|} - 1]\,\mu(|f|),$$

inégalité qui reste valable pour f complexe.

Si $f \in \mathcal{D}$ et si, après division par t, nous faisons tendre t vers zéro dans (2.3), nous obtenons à la limite l'inégalité (1.4).

Remarque. — L'hypothèse (H_2) épuivaut à :

H_2'. A chaque compact K correspond un nombre $t_K > 0$, tel que $|t| < t_K$ entraîne

$$(2.4) \qquad \mu[\varphi_t(e)] \leqq e^{k|t|}\,\mu(e)$$

quel que soit l'ensemble mesurable e contenu dans K.

c. Définition de l'opérateur X_1^p. — D'après Lebesgue-Nikodym, l'hypothèse (1.4) entraîne l'existence d'une fonction mesurable réelle ρ satisfaisant à $\|\rho\|_\infty \leqq k$ et à

$$(2.5) \qquad \mu(Xf) = \mu(\rho f), \qquad \forall f \in \mathcal{D}$$

Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}$ et si nous utilisons le produit scalaire défini par (1.5), nous aurons

$$\langle f, Xg\rangle + \langle Xf, g\rangle = \mu(Xf\bar{g}) = \langle f, \rho g\rangle.$$

Posant $\tilde{X}g = -Xg + \rho g$ la relation précédente s'écrit

$$\langle Xf, g\rangle = \langle f, \tilde{X}g\rangle$$

et montre que $\tilde{X}$ est adjoint de X. On a

$$(2.6) \qquad \|(X + \tilde{X})g\|_r \leqq k\|g\|_r, \qquad \forall r > 1 \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{D};$$

et puisque X et $\tilde{X}$ ont même domaine $\mathcal{D}$, l'inégalité (2.6) montre que leurs extensions fortes respectives dans $L^r(\mu)$, soient X_0^r et $\tilde{X}_0^r$, ont même domaine $\mathcal{D}_0^r$.

Par définition, *l'extension faible* X_1^p de X [resp. l'extension faible $\tilde{X}_1^p$ de $\tilde{X}$] dans $L^p(\mu)$ est l'adjoint de $\tilde{X}_0^q$ [resp. X_0^q], où l'on a posé $q = \dfrac{p}{p-1}$. Les opérateurs X_1^p et $\tilde{X}_1^p$ ont évidemment même domaine $\mathcal{D}_1^p$.

Cela étant, nous allons établir le résultat suivant :

THÉORÈME I. — *E désignant un espace localement compact dénombrable à l'infini, soit* φ *un groupe local d'homéomorphismes de E, tel que l'algèbre* $\mathcal{D}$ *associée vérifie l'hypothèse* (H_1) *et soit* μ *une mesure positive sur E satisfaisant à l'hypothèse* (H_2) *ou à l'inégalité équivalente*

$$|\mu(Xf)| \leq k\mu(|f|) \quad (k = \mathrm{Cte}), \qquad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Alors les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

a. Le groupe local φ *admet un prolongement presque global;*

b. A chaque nombre $r > 1$ *correspond un groupe* S_t^r *d'opérateurs bornés de* $L^r(\mu)$ *satisfaisant aux conditions*

$$(2.7) \qquad \frac{d}{dt}(S_t^r f) = X_0^r S_t^r f = S_t^r X_0^r f, \qquad \forall f \in \mathcal{D}_0^r$$

(2.8) *Si l'on pose* $s = \dfrac{r}{r-1}$ *et si* A_r *désigne l'application de* $L^r(\mu)$ *sur* $L^s(\mu)$ *définie par* $A_r(f) = |f|^r \bar{f}^{-1}$ *on a*

$$S_t^s \circ A_r = A_r \circ S_t^r.$$

b'. Pour une valeur $p > 1$, *il existe un groupe* S_t^p *d'opérateurs bornés de* $L^p(\mu)$ *et un groupe* S_t^q *d'opérateurs bornés de* $L^q(\mu)$, *où* $q = \dfrac{p}{p-1}$, *tels que* (2.7) *soit vérifiée pour* $r = p$ *et* $r = q$ *et que* (2.8) *soit vérifiée pour* $r = p$.

c. $X_0^r = X_1^r$ quel que soit $r > 1$.

c'. Pour une valeur $p > 1$ on a $X_0^p = X_1^p$.

REMARQUES :

1° L'hypothèse « *E* dénombrable à l'infini » servira seulement à établir $(c') \Rightarrow (a)$.

2° La condition (2.8) disparaît si $r = 2$; la proposition 1 est donc un cas particulier du théorème I.

3° Pour $p = 2$, on peut établir directement que $(c') \Rightarrow (b')$: ce résultat, qui a été établi en fait dans [1], apparaît maintenant comme un cas particulier des résultats de R. S. PHILLIPS [5] relatifs aux semi-groupes.

3. Extension maximale d'un groupe local. — Avant d'établir le théorème I, nous allons démontrer l'existence d'un groupe local maximal unique prolongeant φ; nous généralisons ainsi une propriété classique des variétés différentiables.

PROPOSITION 2. — *Soit φ un groupe local sur un espace localement compact E. Alors φ admet un prolongement maximal unique $\varphi^{\star}$; et si $\Omega^{\star}$ désigne le domaine de $\varphi^{\star}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

a. Si $(t, x) \in \Omega^{\star}$ les relations $(t+u, x) \in \Omega^{\star}$ et $[u, \varphi^{\star}(t, x)] \in \Omega^{\star}$ sont équivalentes

b. Si, x restant fixe, le point (t, x) tend vers la frontière de $\Omega^{\star}$, alors $\varphi^{\star}(t, x)$ tend vers l'infini.

Pour établir cette proposition, nous utiliserons la construction qui a servi à R. S. PALAIS ([4], chap. II) dans le cas des variétés.

NOTATIONS. — Ω désignant le domaine de φ, et a un point quelconque de E, posons

$$I_a = \{ t \in \mathbf{R};\ (t, a) \in \Omega \}.$$

D'après les hypothèses, I_a est un intervalle ouvert contenant l'origine; et l'application $t \to [t, \varphi(t, a)]$ de I_a dans $\mathbf{R} \times E$ définit un arc ouvert C_a. Nous désignerons par π_E [resp. $\pi_{\mathbf{R}}$] la projection canonique de $\mathbf{R} \times E$ sur E [resp. $\mathbf{R}$] et par T_u la translation $(t, x) \to (t+u, x)$.

A chaque point (t, a) de $\mathbf{R} \times E$ associons l'arc $\Gamma(t, a)$ déduit de C_a par la translation T_t, et appelons « arc élémentaire » tout sous-arc ouvert de $\Gamma(t, a)$. Il est facile de voir que si deux arcs élémentaires $\gamma_1 \subset \Gamma(u, a)$ et $\gamma_2 \subset \Gamma(v, b)$ ont un point commun (t, c), ils ont en commun un arc élémentaire $\gamma \subset \Gamma(t, c)$. Nous désignerons par $\mathfrak{T}$ la topologie la moins fine sur $\mathbf{R} \times E$ admettant tous les arcs élémentaires pour ensembles ouverts, et par O_a la composante connexe de $(0, a)$ dans cette topologie.

DÉMONSTRATION. — Par construction, O_a apparaît comme une variété ouverte à une dimension, c'est-à-dire un arc; et la restriction de $\pi_{\mathbf{R}}$ à chacun des arcs élémentaires contenus dans O_a est biunivoque et bicontinue : donc $\pi_{\mathbf{R}}$ établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre O_a et l'intervalle $J_a = \pi_{\mathbf{R}}(O_a)$. Désignant par $[t, \psi(t, a)]$ le point de O_a se projetant au point t de J_a, nous allons voir que l'application ψ définit un groupe local prolongeant φ.

En effet, pour a fixé, $\psi(t, a)$ est défini sur un intervalle J_a contenant I_a; si $b = \psi(u, a)$, O_b se déduit de O_a par la translation T_{-u}, de sorte que $t \in J_b$ équivaut à $t+u \in J_a$ et entraîne $\psi(t, b) = \psi(t+u, a)$; enfin le domaine de ψ est ouvert et ψ est continue : en effet, si $u \in J_a$, le sous-arc de O_a correspondant à l'intervalle [ou] peut être recouvert au moyen d'un nombre fini d'arcs élémentaires; cela permet de mettre $\psi(u, a)$ sous la forme

$$\psi(u, a) = \varphi_{u-t_n} \circ \varphi_{t_n - t_{n-1}} \circ \ldots \circ \varphi_{t_2 - t_1} \circ \varphi_{t_1}(a)$$

et de définir

$$\psi(t, x) = \varphi_{t-u} \circ \varphi_{u-t_n} \circ \ldots \circ \varphi_{t_1}(x)$$

pour t assez voisin de u et x assez voisin de a.

D'autre part, si φ^* est un groupe local quelconque prolongeant φ, l'arc C_a^* correspondant à φ^* est la réunion d'arcs élémentaires; car la relation

$$\varphi^*(t, a) = \varphi[t - t_0, \varphi^*(t_0, a)],$$

valable pour $|t - t_0|$ assez petit, prouve que chaque point $[t_0, b = \varphi^*(t_0, a)]$ de C_a^* appartient à un arc élémentaire commun à C_a^* et à $T_{t_0}(C_b)$. Donc C_a^* est contenu dans O_a, et ψ est un prolongement de φ^* : cela prouve que ψ est maximal et unique.

Il reste à établir que $\psi(t, a)$ tend vers l'infini quand t tend vers l'une des extrémités de J_a.

Si cela n'était pas vrai, il existerait une suite t_n convergeant vers une extrémité θ de J_a (celle de droite pour fixer les idées) telle que $\psi(t_n, a)$ ait une limite α; et il existerait un nombre $h > 0$ tel que $\psi(t, \alpha)$ soit défini pour $|t| < h$. On aurait

$$\psi\left(-\frac{h}{2}, \alpha\right) = \lim \psi\left[-\frac{h}{2}, \psi(t_n, a)\right] = \lim \psi\left(t_n - \frac{h}{2}, a\right) = \psi\left(\theta - \frac{h}{2}, a\right).$$

Les arcs $T_\theta(O_\alpha)$ et O_a auraient en commun le point $\left[\theta - \frac{h}{2}, \psi\left(-\frac{h}{2}, \alpha\right)\right]$ et coïncideraient, de sorte que $J_a = \pi_{\mathbf{R}}(O_a)$ recouvrirait l'intervalle $\left[0, \theta + \frac{h}{2}\right[$, contrairement à l'hypothèse. C. Q. F. D.

APPLICATION. — Nous pouvons prolonger l'opérateur Φ_t, associé à φ, de la façon suivante :

Désignant par φ^* le groupe local maximal prolongeant φ et par Ω^* son domaine, nous associons à chaque compact K de E la borne supérieure c_K des nombres c tels que $[-c, +c] \times K$ soit contenu dans Ω^*; et si f est une fonction complexe à support dans K, nous désignerons par $\Phi_t f = f_t$ la fonction complexe à support dans $\varphi_{-t}(K)$ définie, pour $|t| < c_K$, par

$$f_t(x) = f[\varphi^*(t, x)].$$

4. Démonstration du théorème 1. — Les relations $(b) \Rightarrow (b')$ et $(c) \Rightarrow (c')$ étant évidentes, nous nous bornerons à établir les relations $(a) \Rightarrow (b)$, $(b') \Rightarrow (c')$, $(b) \Rightarrow (c)$ et $(c') \Rightarrow (a)$.

i. $(a) \Rightarrow (b)$. — Soit φ^* un groupe presque global prolongeant φ et soit Ω^* son domaine : par hypothèse Ω^* est ouvert dans $\mathbf{R} \times E$, et $\pi_E(C\Omega^*)$ est de mesure nulle. Désignons par I_n l'intervalle $[-n, +n]$ et posons

$$F_n = C\Omega^* \cap (I_n \times E);$$

F_n étant fermé et I_n compact, $e_n = \pi_E(F_n)$ est fermé; et si $x \in Ce_n$, $\varphi^*(t, x)$ est défini pour $|t| < n$. Donc si f est une fonction continue à support compact dans l'ouvert $\omega_n = Ce_n$, $\Phi_t f$ est, pour $|t| < n$, une fonction continue à support compact dans $\varphi^{\star}_{-t}(\omega_n)$; et cette fonction vérifie l'inégalité (2.1). En appliquant cette inégalité à $|f|^r (r < 1)$, on obtient

$$\|\Phi_t f\|_r^r = \mu(|\Phi_t f|^r) = \mu(\Phi_t |f|^r) \leq e^{k|t|} \mu(|f|^r),$$

soit

$$\|\Phi_t f\|_r \leq e^{\frac{k}{r}|t|} \|f\|_r.$$

e_n étant fermé et de mesure nulle, l'ensemble des fonctions continues à support dans Ce_n est dense dans $L^r(\mu)$; l'opérateur borné Φ_t s'étend donc à $L^r(\mu)$ pour $|t| < n$, et cela quel que soit n. Et si S_t^r désigne ce prolongement, la relation

$$\frac{d}{dt} S_t^r f = S_t^r X_0^r f = X_0^r S_t^r f$$

vraie d'après (1.2) pour $|t| < n$ et $f \in \mathcal{D}$ à support dans Ce_n, s'étend par passage à la limite au cas où $f \in \mathcal{D}_0^r$, quel que soit t. On établirait de même les relations

$$S_0^r f = f \qquad \text{et} \qquad S_{t+u}^r f = S_t^r [S_u^r f]$$

pour tout $f \in L^r(\mu)$.

Enfin, la continuité faible de l'application $A_r : f \to |f|^r \bar{f}^{-1}$ de L^r dans L^s $\left(\text{avec } s = \frac{r}{r-1}\right)$, permet de montrer que la relation $S_t^s(A_r f) = A_r(S_t^r f)$ vraie pour $|t| < n$ et f continue à support dans Ce_n, reste vraie quels que soient $f \in L^r(\mu)$ et $t \in \mathbf{R}$.

Les conditions (2.7) et (2.8) sont donc bien vérifiées.

ii. $(b') \Rightarrow (c')$. — Ce résultat découle des divers lemmes qui suivent, valables sous les hypothèses (b').

Lemme 4′ a. — *Pour $r = p$ et $r = q$, on a*

$$(4.1) \qquad \|S_t^r f\|_r \leq e^{\frac{k}{r}|t|} \|f\|_r, \qquad \forall f \in L^r|\mu|.$$

Démonstration. — Si $f, g \in \mathcal{D}$, on a, d'après (1.4),

$$|\langle Xf, g\rangle + \langle f, Xg\rangle| = |\mu(Xf\bar{g})| \leq k\mu(|f\bar{g}|).$$

Par passage à la limite on en déduit l'inégalité

$$|\langle X_0^p f, g\rangle + \langle f, X_0^q g\rangle| \leq k\|f\|_p \|g\|_q$$

valable pour $f \in \mathcal{D}_0^p$ et $g \in \mathcal{D}_0^q$, avec $q = \frac{p}{p-1}$.

Mais on a alors

$$\langle X_0^p f, g\rangle + \langle f, X_0^q g\rangle = \frac{d}{dt}\langle S_t^p f, S_t^q g\rangle,$$

d'où, pour $v > u$, l'inégalité

$$(4.2) \qquad |\langle S_v^p f, S_v^q g\rangle - \langle S_u^p f, S_u^q g\rangle| \leq k \int_u^v \| S_t^p f \|_p \| S_t^q g \|_q \, dt$$

qui reste valable pour $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$.

Remplaçons, dans (4.2), g par $|f|^p \bar{f}^{-1}$. En tenant compte de (2.8) et en posant $h(t) = \| S_t^p f \|_p^p$ on obtient l'inégalité

$$(4.3) \qquad |h(v) - h(u)| \leq k \int_u^v h(t) \, dt,$$

d'où l'on déduit

$$h(t) \leq h(0) \, e^{k|t|},$$

c'est-à-dire (4.1) pour $r = p$.

Les rôles joués par f et g étant symétriques, on obtient l'inégalité (4.1) pour $r = q$ en échangeant p et q. C. Q. F. D.

Lemme 4.b. — *Soit $\tilde{S}_t^q$ l'opérateur de $L^q(\mu)$ adjoint de S_t^p. Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{D}_1^q$, on a*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}_t^q g - g\rangle = \langle f, \tilde{X}_1^q g\rangle.$$

Démonstration. — Si $f \in \mathcal{D}_0^p$ et $g \in \mathcal{D}_1^q$, nous avons

$$\frac{d}{dt} \langle f, \tilde{S}_t^q g\rangle = \frac{d}{dt} \langle S_t^p f, g\rangle = \langle X_0^p S_t^p f, g\rangle = \langle S_t^p f, \tilde{X}_1^q g\rangle,$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dt} \langle f, \tilde{S}_t^q g\rangle \right| \leq e^{\frac{k}{p}|t|} \| f \|_p \| \tilde{X}_1^q g \|_q$$

et, par intégration,

$$|\langle f, \tilde{S}_t^q g - g\rangle| \leq \frac{p}{k} \left(e^{\frac{k}{p}|t|} - 1 \right) \| f \|_p \| \tilde{X}_1^q g \|_q.$$

Cette dernière inégalité étant vraie $\forall f \in \mathcal{D}_0^p$, et $\mathcal{D}_0^p$ étant dense dans $L^p(\mu)$, on en déduit la majoration

$$(4.4) \qquad \| \tilde{S}_t^q g - g \|_q \leq \frac{p}{k} \left(e^{\frac{k}{p}|t|} - 1 \right) \| \tilde{X}_1^q g \|_q, \qquad \forall g \in \mathcal{D}_1^q.$$

Cela prouve que $\left\| \frac{1}{t} (\tilde{S}_t^q g - g) \right\|$ reste borné quand t tend vers zéro; et comme

$$\frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}_t^q g - g\rangle = \frac{1}{t} \langle S_t^p f - f, g\rangle$$

tend vers

$$\langle X_0^p f, g \rangle = \langle f, \tilde{X}_1^q g \rangle \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{D}_0^p,$$

on en déduit que $\frac{1}{t} \langle f, \tilde{S}_t^q g - g \rangle$ converge encore vers

$$\langle f, \tilde{X}_1^q g \rangle \qquad \text{pour} \quad f \in L^p(\mu).$$

C. Q. F. D.

LEMME 4 *c*. — *Soit B^p l'extension à $L^p(\mu)$ de l'opérateur borné $X + \tilde{X}$; et soit $\tilde{S}_t^p$ l'opérateur de $L^p(\mu)$ adjoint de S_t^q. Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$, on a*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \langle S_t^p f - \tilde{S}_t^p f, g \rangle = \langle B^p f, g \rangle.$$

DÉMONSTRATION. — Si $f \in \mathcal{D}_0^p$ et $g \in \mathcal{D}_0^q$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{S}_t^p S_t^p f, g \rangle &= \frac{d}{dt} \langle S_t^p f, S_t^q g \rangle \\ &= \langle X_0^p S_t^p f, S_t^q g \rangle + \langle S_t^p f, X_0^q S_t^q g \rangle = \langle B^p S_t^p f, S_t^q g \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant (2.6) et (4.1) on obtient

$$\left| \frac{d}{dt} \langle \tilde{S}_t^p S_t^p f, g \rangle \right| \leq k\, e^{k|t|} \|f\|_p \|g\|_q,$$

d'où la majoration

$$\| \tilde{S}_t^p S_t^p f - f \| \leq (e^{k|t|} - 1) \|f\|_p$$

valable $\forall f \in \mathcal{D}_0^p$ donc aussi pour $f \in L^p(\mu)$.

L'opérateur $\Sigma_t = \frac{1}{t} (\tilde{S}_t^p S_t^p - I)$ est donc uniformément borné pour $|t| \leq \alpha$, quel que soit α; et quand t tend vers zéro, $\langle \Sigma_t f, g \rangle$ tend vers $\langle B^p f, g \rangle$ si $f \in \mathcal{D}_0^p$ et $g \in \mathcal{D}_0^q$: on en déduit que $\langle \Sigma_t f, g \rangle$ tend vers $\langle B^p f, g \rangle$ pour $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$. Enfin, puisque $S_t^q g$ converge en norme vers g dans $L^q(\mu)$, on voit que la quantité

$$\langle \Sigma_t f, S_{-t}^q g \rangle = \frac{1}{t} \langle S_t^p f, g \rangle - \frac{1}{t} \langle f, S_{-t}^q g \rangle = \frac{1}{t} \langle S_t^p f - \tilde{S}_{-t}^p f, g \rangle$$

tend vers $\langle B^p f, g \rangle$ si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$.

LEMME 4 *d*. — $X_1^p = X_0^p$.

DÉMONSTRATION. — En remplaçant p par q, f par g et t par $-t$, on déduit du lemme 4 *b* que $\frac{1}{t} \langle \tilde{S}_{-t}^p f - f, g \rangle$ tend vers $-\langle \tilde{X}_1 f, g \rangle$ quand t tend vers zéro. En comparant ce résultat à celui du lemme 4 c on voit que $\frac{1}{t}\langle S_t^p f - f, g\rangle$ tend vers

$$\langle B^p f, g\rangle - \langle \tilde{X}_1^p f, g\rangle = \langle X_1^p f, g\rangle$$

si $f \in \mathcal{D}_1^p$ et $g \in \mathcal{D}_1^q$. On a donc

$$\langle X_1^p f, g\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\langle S_t^p f - f, g\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\langle f, \tilde{S}_t^q g - g\rangle = \langle f, \tilde{X}_1^q g\rangle$$

pour tout $f \in \mathcal{D}_1^p$ et tout $g \in \mathcal{D}_1^q$. Cette égalité montre que X_1^p et $\tilde{X}_1^q$ sont adjoints l'un de l'autre, autrement dit que $X_0^p = X_1^p$.

iii. $(b) \Rightarrow (c)$. — En donnant à p toutes les valeurs possibles dans la proposition $(b') \Rightarrow (c')$, on obtient la proposition $(b) \Rightarrow (c)$.

5. **Fin de la démonstration du théorème I.** — Il nous reste à établir la proposition $(c') \Rightarrow (a)$.

Désignons par $\varphi^\star$ l'extension maximale du groupe local φ, dont l'existence a été établie au paragraphe 3, et par $\Omega^\star$ le domaine de $\varphi^\star$.

Pour chaque $a \in E$, posons

$$\theta_1(a) = \sup\{t \in \mathbf{R};\ (t, a) \in \Omega^\star\}$$

et

$$\theta_2(a) = \inf\{t \in \mathbf{R};\ (t, a) \in \Omega^\star\};$$

et désignons par E_1 [resp. E_2] l'ensemble des points a tels que $\theta_1(a) < +\infty$ [resp. $\theta_2(a) > -\infty$]. $\Omega^\star$ étant ouvert, $\theta_1(a)$ et $-\theta_2(a)$ sont des fonctions semi-continues inférieurement, et les ensembles E_1, E_2 sont mesurables. Nous allons montrer que si l'un de ces ensembles est de mesure non nulle, alors on a $X_1^p \neq X_0^p$, $\forall p > 1$. La proposition annoncée sera ainsi établie par l'absurde.

Supposons E_1 de mesure non nulle; il existe alors un nombre $T > 0$ tel que l'ensemble $E_1^T = \{x \in E;\ \theta_1(x) \leqq T\}$ soit de mesure non nulle; et la semi-continuité de θ_1 entraîne que E_1^T est fermé. D'autre part, E est supposé être la réunion d'une famille dénombrable de compacts K_n. Il existe donc une valeur de n tel que le compact $A = E_1^T \cap K_n$ soit de mesure non nulle, et, sur A, on a $\theta_1(x) \leqq T$.

A étant compact, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $\varphi^\star(t, x)$ soit défini pour tout $x \in A$ et $|t| < 2\alpha$. Nous poserons

$$A_\alpha = \{x = \varphi^\star(t, a);\ a \in A,\ 0 \leqq t \leqq \alpha\},$$
$$B = \{x = \varphi^\star(t, a);\ a \in A,\ 0 \leqq t < \theta_1(a)\}$$

et nous allons montrer que B est de mesure finie. En effet, si e désigne un compact et si l'on pose

$$\varphi_t^\star(e) = \{x = \varphi^\star(t, a);\ a \in e,\ \theta_1(a) > t\}$$

on voit, par une extension facile de l'inégalité (2.4), que $\varphi_t^\star(e)$ est de mesure finie. Or ici, si n désigne la partie entière de $\frac{T}{\alpha}$, on voit que B est contenu dans l'ensemble $\bigcup_{s=0}^{s=n} \varphi_{s\alpha}^\star(A_\alpha)$ dont la mesure est finie puisque A_α est compact.

A chaque $x \in E$ faisons correspondre l'ensemble S_x des valeurs de t telles que $\varphi^\star(t, x) \subset B$.

Si S_x est non vide, nous désignerons par $u(x)$ sa borne inférieure et poserons

$$h(x) = 1 \quad \text{si } u \leqq 0; \qquad h(x) = 0 \quad \text{si } u \geqq \alpha;$$
$$h(x) = 1 - \frac{3u^2}{\alpha^2} + 2\frac{u^3}{\alpha^3} \quad \text{si } 0 < u < \alpha.$$

Si S_x est vide, nous poserons $u(x) = +\infty$ et $h(x) = 0$. Il est facile de voir que la fonction $u(x)$ est semi-continue inférieurement, donc que $h(x)$ est mesurable; d'autre part, h est bornée et s'annule hors de l'ensemble de mesure finie

$$B' = \{x = \varphi^\star(t, a);\ a \in A,\ -\alpha \leqq t < \theta_1(a)\}.$$

Donc $h \in L^p(\mu)$, $\forall p \geqq 1$; et l'on a $h(x) = 1$ sur B.

Cela étant, nous allons montrer que, pour $p > 1$, h appartient à $\mathcal{D}_1^p$ mais n'appartient pas à $\mathcal{D}_0^p$: nous aurons ainsi prouvé que $X_0^p \neq X_1^p$.

a. $h \in \mathcal{D}_1^p$. — Si $\varphi^\star(t, x)$ est défini, on a

$$u_t(x) = u[\varphi^\star(t, x)] = u(x) - t;$$

on en déduit facilement que le rapport $\frac{1}{t}[h_t(x) - h(x)]$ a une limite $\xi(x)$ quand t tend vers zéro, quel que soit $x \in E$. La fonction $\xi(x)$ est mesurable; elle s'annule sur B, et satisfait à $0 \leqq \xi(x) \leqq \frac{3}{2\alpha}\cdot$ Ayant son support dans le compact

$$A'_\alpha = \{x = \varphi^\star(t, a);\ a \in A,\ -\alpha \leqq t \leqq 0\},$$

elle appartient à $L^p(\mu)$ quel que soit $p > 1$;

Si g désigne une fonction sommable quelconque ayant son support dans un compact K, $\langle h_t, g\rangle = \mu(h_t \bar{g})$ est défini pour $|t| < c_K$, où c_K est le nombre défini à la fin du paragraphe 3; et, si $t \to 0$, $\frac{1}{t}\langle h_t - h, g\rangle$ tend vers $\langle \xi, g\rangle$. Admettant provisoirement le lemme suivant (5 *a*), on en déduit que

$$\langle \xi, g\rangle = \langle h, \tilde{X} g\rangle \quad \text{quel que soit } g \in \mathcal{D};$$

autrement dit, $h \in \mathcal{D}_1^p$ quel que soit $p > 1$, et $X_1^p h = \xi$.

LEMME 5 *a*. — *Si* $g \in \mathcal{D}$ et $f \in L^1(\mu)$, *alors* $\frac{1}{t}\langle f_t - f, g\rangle$ *tend vers* $\langle f, \tilde{X} g\rangle$ *quand* $t \to 0$.

Désignons par g un élément fixe de $\mathcal{D}$ et par K son support. Alors $A_t(f) = \langle f_t, g\rangle$ est défini, $\forall f \in L^1(\mu)$, pour $|t| < c_K$; et si $f \in \mathcal{D}$ on a

$$\frac{d}{dt} A_t(f) = \langle X f_t, g\rangle = \langle f_t, \tilde{X} g\rangle, \tag{5.1}$$

avec

$$|\langle f_t, \tilde{X} g\rangle| \leq e^{k|t|} \|f\|_1 \|\tilde{X} g\|_\infty. \tag{5.2}$$

Si $f \in L^1(\mu)$ nous désignerons par f_n une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant en norme vers f dans $L^1(\mu)$; les relations (5.1) et (5.2) prouvent que la suite $\frac{d}{dt} A_t(f_n)$ converge uniformément vers $\langle f_t, \tilde{X} g\rangle$ pour $|t|$ borné; à la limite on a encore

$$\frac{d}{dt}\langle f_t, g\rangle = \langle f_t, \tilde{X} g\rangle \qquad \text{pour} \quad |t| < c_K,$$

ce qui prouve le lemme 5 *a*.

b. *h n'appartient pas à* $\mathcal{D}_0^p$.

Si h appartenait à $\mathcal{D}_0^p$, on aurait $X_0^p h = \xi$; et à chaque nombre $\varepsilon > 0$ on pourrait faire correspondre un élément g de $\mathcal{D}$ satisfaisant à

$$\|g - h\|_p < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|Xg - \xi\|_p < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Nous allons voir que pour $\varepsilon > 0$ assez petit ces hypothèses aboutissent à une contradiction.

En effet, la fonction ξ s'annulant sur B, la seconde des relations (5.3) entraîne

$$\int_B |Xg|^p \, d\mu < \varepsilon^p. \tag{5.4}$$

Soit, d'autre part, $x \in B$ quelconque; on sait (conséquence de la proposition 2) que $\varphi^\star(t, x)$ tend vers l'infini quand $t \to \theta_1(x)$; g étant à support compact, il existe donc un nombre $\tau_1(x) < \theta_1(x)$ tel que $g[\varphi^*(\tau_1, x)] = 0$. On en déduit

$$g(x) = -\int_0^{\tau_1(x)} \frac{\partial}{\partial t}[g_t(x)]\, dt = -\int_0^{\tau_1(x)} X g_t(x)\, dt.$$

L'inégalité $\theta_1(x) \leq T$ sur B entraîne donc

$$\int_B |g|^p\, d\mu \leq T^{p-1} \int_B \int_0^{\theta_1(x)} |X g_t|^p\, d\mu\, dt.$$

Désignons par B_t l'ensemble des points de B où l'on a $\theta_1(x) > t$; la dernière inégalité s'écrit

$$\int_B |g|^p\, d\mu \leq T^{p-1} \int_0^{\mathrm{T}} dt \int_{B_t} |X g_t(x)|^p\, d\mu(x)$$

et entraîne par application de (2.1) et (5.4)

$$\int_B |g|^p\, d\mu \leq T^p e^{kT} \int_B |X g|^p\, d\mu \leq \varepsilon^p T^p e^{kT} \tag{5.5}$$

si l'on remarque que $\varphi^*(t, B_t)$ est contenu dans B.

Or on a $h(x) = 1$ sur B; la première des inégalités (5.3) entraîne donc

$$\left[\int_B |g|^p\, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left[\int_B |h|^p\, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} - \varepsilon = \mu(B) - \varepsilon,$$

inégalité incompatible avec (5.5) si

$$\varepsilon\left[1 + T e^{\frac{kT}{p}}\right] < \mu(B).$$

On a donc nécessairement $\mu(B) = 0$, ce qui entraîne $\mu(A) = 0$; donc $\mu(E_1) = 0$.

On établirait de même que les hypothèses $\mu(E_2) \neq 0$ et $X_0 = X_1^p$, avec $p > 1$, sont incompatibles.

6. Résultats complémentaires.

PROPOSITION 3. — *Si pour chaque mesure invariante* μ (5) *le groupe local* φ *admet un prolongement presque global, alors* φ *admet un prolongement global.*

DÉMONSTRATION. — De la proposition 2 et des hypothèses, il résulte que le groupe local maximal φ^* engendré par φ est presque global pour chaque

(5) μ est invariante si elle vérifie (1.4) ou (2.1) avec $k = 0$. L'opérateur iX_0^2 est alors symétrique.

mesure invariante μ. Désignons par e l'ensemble des points x de E tels que $\varphi^*(t; x)$ ne soit pas défini pour toute valeur de t. Si $a \in e$ et si $I =]t_1 t_2[$ désigne l'intervalle maximal sur lequel $\varphi^*(t, a)$ est défini, l'ensemble $O_a = \varphi(I, a)$ est tout entier contenu dans e. On définit une mesure invariante μ en posant

$$\mu(f) = \lim_{\substack{u \to t_1 \\ v \to t_2}} \frac{1}{v - u} \int_u^v f[\varphi^*(t, a)]\, dt$$

pour chaque fonction f continue et à support compact. Cette mesure satisfait à $\mu(O_a) = 1$; donc si e n'était pas vide, il existerait une mesure invariante μ pour laquelle φ^* ne serait pas presque global.

Proposition 4 ([6]). — *Soit μ une mesure positive sur E telle que tout ensemble ouvert de E ait une mesure strictement positive* ([7]), *et soit φ un groupe local d'homéomorphismes de E conservant la mesure μ, tel que l'hypothèse* (H_1) *du paragraphe* 2 *soit vérifiée. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

α. *φ admet un prolongement presque global de φ^* ; l'ensemble de mesure nulle e formé des points $x \in E$ tels que $\varphi^*(t, x)$ ne soit pas défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, est fermé; les orbites des points de Ce sont fermées et les périodes correspondantes sont bornées par un même nombre T.*

β. *Si $\mathcal{H}'$ désigne l'ensemble des $f \in \mathcal{D}_1^2$ satisfaisant à $X_1^2 f = 0$, et si $\mathcal{H}''$ est le sous-espace de $L^2(\mu)$ complètement orthogonal à $\mathcal{H}'$, il existe une constante k telle que*

$$\|f\|_2 \leq k \|X_0^2 f\|_2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}'' \cap \mathcal{D}_0. \tag{6.1}$$

i. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. — Supposons la condition (α) vérifiée et soit $x \in Ce$. Si l'orbite de x n'est pas réduite à un point, sa période est le plus petit nombre $\tau > 0$ satisfaisant à $\varphi^*(\tau, x) = x$. Si x est un point fixe, nous poserons $\tau(x) = 0$. La fonction $\tau(x)$ ainsi définie sur Ce est invariante et semi-continue inférieurement; et elle satisfait à $0 \leq \tau(x) < T$.

A chaque fonction f continue à support dans Ce, faisons correspondre la fonction $\tilde{f}$ à support dans Ce définie par

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\tau(x)} \int_0^{\tau(x)} f[\varphi^*(t, x)]\, dt \qquad \text{si} \quad \tau(x) \neq 0;$$

$$\tilde{f}(x) = f(x) \qquad \text{si} \quad \tau(x) = 0.$$

On voit immédiatement que $\tilde{f}$ est invariante et continue. Si, de plus, f est à support compact, alors $\tilde{f} \in \mathcal{D}$ et $\tilde{X} f = 0$, de sorte que $\tilde{f} \in \mathcal{H}'$: montrons qu'alors $f - \tilde{f} \in \mathcal{H}''$.

([6]) Cette proposition précise et généralise le lemme (14 *b*) de [1].

([7]) Cette hypothèse servira seulement à établir $\beta \to \alpha$.

En effet, si $g \in \mathcal{H}'$, on a, presque partout sur Ce, $g_t(x) = g(x)$; d'où, en posant $E_t = \{ x \in Ce;\ \tau(x) \geqq t \}$ et en utilisant l'invariance de τ et de μ,

$$\int_E \tilde{f}.\bar{g}\, dx = \int_0^T dt \int_{E_t} \frac{1}{\tau} f_t \bar{g}\, d\mu = \int_0^T dt \int_{E_t} \frac{1}{\tau} f\bar{g}_{-t}\, d\mu$$
$$= \int_0^T dt \int_{E_t} \frac{1}{\tau} f\bar{g}\, d\mu = \int_E f\bar{g}\, d\mu.$$

Et la relation $\langle \tilde{f}, g \rangle = \langle f, g \rangle$, vraie $\forall g \in \mathcal{H}'$, montre que $f - \tilde{f} \in \mathcal{H}''$.

Donc, si f est continue et à support compact dans Ce, $\tilde{f}$ est la projection de f sur $\mathcal{H}'$. L'ensemble e étant fermé et de mesure nulle, l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues à support compact dans Ce est dense dans $L^2(\mu)$; l'opérateur $P : f \to \tilde{f}$ se prolonge donc à $L^2(\mu)$ de telle sorte que $f \in \mathcal{H}'' \Leftrightarrow Pf = 0$, et que $f \in \mathcal{H}' \Leftrightarrow Pf = f$.

Si $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}''$, on a $\tilde{f}(x) = 0$, $\forall x$; on en déduit l'existence d'un nombre $t_0(x)$ $[0 \leqq t_0 \leqq \tau(x)]$ tel que $f_{t_0}(x) = 0$. On a donc

$$|f(x)|^2 \leqq t_0(x) \int_0^{t_0(x)} \left| \frac{\partial}{\partial u} f_u(x) \right|^2 du \leqq T \int_0^{T} |Xf_u(x)|^2\, du,$$

d'où

$$\|f\|_2^2 \leqq T \int_0^T \int_{Ce} |Xf_u(x)|^2\, du\, d\mu(x) = T^2 \|Xf\|_2^2.$$

Si $f \in \mathcal{H}'' \cap \mathcal{D}_0^2$ il existe une suite $f_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ telle que $f_n \to f$ et $Xf_n \to X_0^2 f$ dans $L^2(\mu)$. On a $0 = Pf = \lim Pf_n$, de sorte que $f_n - Pf_n \to f$; et puisque $f_n - Pf_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}''$, on a

$$\|f_n - Pf_n\|_2 \leqq T \|Xf_n\|_2$$

de sorte qu'à la limite f vérifie l'inégalité (6.1) avec $k = T$.

(ii). $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. — Il résulte de (β) que l'opérateur symétrique iX_0^2 est auto-adjoint, donc que φ engendre un groupe presque global $\varphi^\star$. A chaque nombre $n > 0$ correspond donc un ensemble e_n, fermé et de mesure nulle, tel que $\varphi^\star(t, x)$ soit défini pour $|t| < n$ et $x \in Ce_n$. Supposons qu'en un point a de Ce_n on ait $\varphi^\star(t, a) \neq a$ pour $0 < t \leqq T$, avec $T < n$. La continuité de $\varphi^\star$ entraîne l'existence d'un voisinage A de a, que nous pouvons supposer compact et contenu dans Ce_n, tel que les relations $0 < t \leqq T$ et $x \in A$ entraînent $\varphi^\star(t, x) \neq x$.

Nous pouvons, d'autre part, supposer A assez petit pour que les relations $x \in A$, $\varphi(t, x) \in A$ et $0 \leqq t \leqq T$ entraînent $0 \leqq t < \frac{T}{2}$: sinon, en effet, chaque voisinage U de $\left[\frac{T}{2}, T\right] \times \{a\}$ dans $\mathbf{R} \times E$ contiendrait un point (t, x)

tel que $[t, \varphi(t, x)] \in U$; à la limite on en déduirait l'existence d'un nombre $\theta \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$ tel que $\varphi(\theta, a) = a$, contrairement à l'hypothèse.

Le compact A étant ainsi choisi, soit O l'orbite d'un point b de A. Si O n'est pas fermée, il existe un point $b_0 \in A \cap O$ et un seul tel que $\varphi^\star(t, b_0) \in A$ entraîne $t \geqq 0$; et si x désigne un point quelconque de O il existe un nombre u, et un seul, tel que $x = \varphi(u, b_0)$.

Si O est fermée, sa période τ est nécessairement supérieure à T; l'application Φ_b: $\exp\left(\frac{2i\pi t}{\tau}\right) \to \varphi(t, b)$ définit un homéomorphisme de la circonférence unité sur O; et d'après les conditious imposées à A on voit que $\Phi_b^{-1}(O \cap A)$ est contenu dans uu arc de longueur inférieure à π. Désignons par $\exp\left(\frac{2i\pi t_0}{\tau}\right)$ et $\exp\left(\frac{2i\pi t_1}{\tau}\right)$ les extrémités du plus petit arc contenant $\Phi_b^{-1}(O \cap A)$ et posons $b_0 = \varphi(t_0, b)$: le point b_0 ne dépend pas du choix de b sur O, et à chaque point x de O correspond un nombre $u \in [0 \tau[$ et un seul tel que $x = \varphi(u, b_0)$.

Nous avons défini ainsi une fonction $u(x)$ sur l'ensemble des points de E dont l'orbite rencontre A; si l'orbite de x ne rencontre pas A nous poserons $u(x) = -\infty$: on verrait facilement que la fonction u ainsi définie est semi-continue supérieurement, donc mesurable; elle satisfait à $u(x) \geqq 0$ sur A; et à chaque valeur $t \in [0\, T]$ correspond un point x, et un seul sur chaque orbite rencontrant A, tel que $u(x) = t$. Enfin, si les nombres $u(x)$ et $u(x) + t$ appartiennent tous deux à $[0\, T]$, on a

$$u[\varphi^\star(t, x)] = u(x) + t. \tag{6.2}$$

Pour chaque $t \in [0\, T]$ nous poserons

$$A_t = \{ x \in E;\ 0 \leqq u(x) \leqq t \}.$$

L'ensemble A_t est mesurable et contenu dans le compact $\varphi^\star([0\, T], A)$, donc de mesure finie. Et si $0 \leqq s \leqq t + s \leqq T$, on a

$$A_{t+s} = A_t \cup \varphi^\star(t, A_s); \qquad A_t \cap \varphi^\star(t, A_s) = \varphi^\star(t, A_0).$$

d'où, puisque la mesure μ est invariante,

$$\mu(A_{t+s}) + \mu(A_0) = \mu(A_t) + \mu(A_s). \tag{6.3}$$

D'autre part, $\varphi^\star(s, A_0) \cap \varphi^\star(t, A_0)$ est vide pour $t \neq s$. Si $\mu(A_0)$ était non nul, on en déduirait que $A_t = \bigcup_{0 \leqq s \leqq t} \varphi^\star(t, A_0)$ est de mesure infinie, ce qui n'est pas. On a donc $\mu(A_0) = 0$, d'où l'on déduit que la fonction $\mu(A_t)$ est continue; et la relation (6.3) entraîne l'existence d'une constante λ telle que $\mu(A_t) = \lambda t$. Si λ était nul, A_t serait de mesure nulle, donc aussi A car les hypothèses faites sur A entraînent $A \subset A_T$. Mais l'ensemble A, contenant un ouvert, ne peut être de mesure nulle : on a donc

$$\mu(A_t) = \lambda t, \qquad \text{avec} \quad \lambda > 0.$$

Désignons maintenant par $\chi(t)$ la fonction de classe C^1 à support dans $[0\,T]$ définie par

$$\chi(t) = 1 - \cos\frac{4\pi t}{T} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq \frac{T}{2}$$

et

$$\chi(T - t) = -\chi(t).$$

Et soit f la fonction mesurable à support dans A_T définie par $f(x) = \chi[u(x)]$. On a d'abord

$$(6.4) \qquad \|f\|_2^2 = \int_0^T \chi^2(t)\, d\mu(A_t) = \lambda \int_0^T \chi^2(t)\, dt = \frac{3\lambda T}{2}.$$

D'autre part, la formule (6.2) montre que $\frac{1}{t}\{f[\varphi^\star(t, x)] - f(x)\}$ tend vers $\chi'[u(x)]$ quand $t \to 0$. Par application du lemme 5 a, on en déduit que $f \in \mathcal{D}_1^2$, avec $X_1^2 f = \chi'[u(x)]$; et l'on a

$$(6.5) \qquad \|X_1^2 f\|_2^2 = \int_0^T \chi'^2(t)\, d\mu(A_t) = \lambda \int_0^T \chi'^2(t)\, dt = \frac{8\lambda\pi^2}{T}.$$

Enfin si g désigne un élément quelconque de $\mathcal{H}'$ et h une fonction continue à support compact, l'intégrale $\mu_g(h) = \langle h, g\rangle$ définit une mesure μ_g invariante sur E ; par un raisonnement analogue au précédent on en déduit l'existence d'une constante $\rho_g \in \mathbf{C}$ (éventuellement nulle, et dépendant de g) telle que $\mu_g(A_t) = \rho_g t$; et l'on a

$$\langle f, g\rangle = \int_0^T \chi(t)\, d\mu_g(A_t) = \rho_g \int_0^T \chi(t)\, dt = 0,$$

ce qui prouve que $f \in \mathcal{H}''$.

Ler relations (6.4) et (6.5) jointes à l'hypothèse (β) entraînent l'inégalité

$$T \leqq \frac{4\pi k}{\sqrt{3}}.$$

Autrement dit, quels que soient $\varepsilon > 0$, $n > \frac{4\pi k}{\sqrt{3}}$ et $x \in Ce_n$, il existe un nombre $\theta \in \left[0, \frac{4\pi k}{\sqrt{3}} + \varepsilon\right]$ tel que $\varphi^\star(\theta, x) = x$. On en déduit que l'orbite de x est fermée, donc que $\varphi^\star(t, x)$ est défini quel que soit t ; et la période $\tau(x)$ correspondante est bornée par $\frac{4\pi k}{\sqrt{3}}$. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 1-26.

[2] LELONG-FERRAND (Jacqueline). — Sur les groupes à un paramètre de transformations des variétés différentiables, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 37, 1958, p. 269-278.

[2] NELSON (Edward). — Analytic vectors, *Annals of Math.*, t. 70, 1959, p. 572-615.

[4] PALAIS (Richard S.). — *A global formulation of the Lie theory of transformation groups.* — Providence, American mathematical Society, 1957 (Memoirs of the American mathematical Society, 22).

[5] PHILLIPS (R. S.). — Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 90, 1958, p. 193-254.

(Manuscrit reçu le 9 mai 1961.)

Mme Jacqueline LELONG-FERRAND,
Professeur à la faculté des Sciences de Paris,
95, boulevard Jourdan
Paris (14e).