

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALAIN GUICHARDET

Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 77-101

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__77_0

© Bulletin de la S. M. F., 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTÉRISATION DES ALGÈBRES DE VON NEUMANN DISCRÈTES ;

PAR

ALAIN GUICHARDET.

(Paris).

Le but de ce travail est de démontrer le théorème 1 du paragraphe 7, qui a déjà fait l'objet d'une Note [4]; pour y parvenir, il nous faudra préciser certaines notions relatives aux espaces topologiques mesurés (§§ 1, 2, 3), aux intégrales hilbertiennes (§§ 4, 5) et aux algèbres de von Neumann (§ 6). La proposition 1 du paragraphe 1 est évidemment à rapprocher d'un théorème de J. VON NEUMANN [7], et sa démonstration suit de très près celle de [2. app. IV]. On trouvera des résultats voisins de ceux des paragraphes 5 et 6 respectivement dans [5] et [3].

Les notations utilisées sont celles de [2]; rappelons que si Z est un espace topologique localement compact, $L_\infty(Z)$ désigne l'ensemble des fonctions numériques sur Z continues et tendant vers zéro à l'infini.

1. Homomorphismes d'espaces $L^\infty(Z, \nu)$.

LEMME 1. — Soient Z (resp. Z_1) un espace topologique compact, ν (resp. ν_1) une mesure positive sur Z (resp. Z_1) de support Z (resp. Z_1), Φ un homomorphisme injectif d'algèbres normées de $L^\infty(Z, \nu)$ dans $L^\infty(Z_1, \nu_1)$ tel que :

a. pour toute famille bornée $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $L^\infty(Z, \nu)$

$$\Phi(\sup f_i) = \sup \Phi(f_i) \quad (1).$$

b.

$$\Phi(L_\infty(Z)) \subset L_\infty(Z_1).$$

Il existe une application continue φ de Z_1 sur Z telle que $\varphi(\nu_1)$ soit équivalente à ν et que $(\Phi(f))(\xi_1) = f(\varphi(\xi_1))$ pour $\xi_1 \in Z_1 - X$, $f \in L^\infty(Z, \nu)$, X étant ν_1 -négligeable.

(1) Rappelons que $L^\infty(Z, \nu)$ est complètement réticulé [1], chap. 5, § 5, p. 56.

On sait qu'il existe une application continue φ de Z_1 sur Z telle que $(\Phi(f))(\zeta_1) = f(\varphi(\zeta_1))$ pour $\zeta_1 \in Z_1$ et $f \in L_\infty(Z)$. Soit $g \in L^\infty(Z, \nu)$, g positive, bornée et semi-continue inférieurement; on a $g = \sup f$, f parcourant l'ensemble des fonctions continues sur Z majorées par g , la borne supérieure pouvant être prise au sens ponctuel ou au sens de $L^\infty(Z, \nu)$ (cf. [1], chap. 5, § 5, lemme 1) et par suite,

$$\Phi(g) = \sup \Phi(f) \quad \text{au sens de } L^\infty(Z_1, \nu_1)$$

et

$$g \circ \varphi = \sup f \circ \varphi \quad \text{au sens ponctuel,}$$

d'où

$$\Phi(g) = g \circ \varphi.$$

Soit enfin $h \in L^\infty(Z, \nu)$, $h \geq 0$; on a $h = \inf g$, g parcourant l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement bornées et majorant h , la borne inférieure pouvant encore être prise aux deux sens indiqués ci-dessus et par suite,

$$\Phi(h) = \inf \Phi(g) \quad \text{au sens de } L^\infty(Z_1, \nu_1)$$

et

$$h \circ \varphi = \inf g \circ \varphi \quad \text{au sens ponctuel,}$$

d'où

$$\Phi(h) = h \circ \varphi, \text{ et la deuxième assertion du lemme.}$$

Posons

$$\tilde{\nu} = \varphi(\nu_1),$$

on a

$$\tilde{\nu}(f) = \nu_1(f \circ \varphi) = \nu_1(\Phi(f)) \quad \text{pour } f \in L^\infty(Z, \nu)$$

donc

$$\tilde{\nu}(f) = 0 \Leftrightarrow \nu(f) = 0$$

et $\varphi(\nu_1)$ est équivalente à ν .

LEMME 2. — Soient Z (resp. Z_1) un espace topologique compact à base dénombrable, ν (resp. ν_1) une mesure positive sur Z (resp. Z_1), Φ un homomorphisme injectif de $L^\infty(Z, \nu)$ dans $L^\infty(Z_1, \nu_1)$. Il existe des espaces compacts Z' et Z'_1 , des mesures positives ν' et ν'_1 sur Z' et Z'_1 de supports Z' et Z'_1 , des ensembles $N' \subset Z'$ et $N'_1 \subset Z'_1$, ν' - et ν'_1 -négligeables, des applications bijectives continues θ et θ_1 de $Z' - N'$ sur Z et de $Z'_1 - N'_1$ sur Z_1 transformant ν' en ν et ν'_1 en ν_1 et telles que, en appelant Θ et Θ_1 les isomorphismes correspondant de $L^\infty(Z', \nu')$ sur $L^\infty(Z, \nu)$ et de $L^\infty(Z'_1, \nu'_1)$ sur $L^\infty(Z_1, \nu_1)$, l'homomorphisme injectif $\bar{\Phi} = \Theta_1^{-1} \circ \Phi \circ \Theta$ envoie $L_\infty(Z')$ dans $L_\infty(Z'_1)$.

DÉMONSTRATION. — Voir [2], app. IV.

PROPOSITION 1. — Soient Z (resp. Z_1) un espace topologique localement compact à base dénombrable, ν (resp. ν_1) une mesure positive bornée

sur Z (resp. Z_1), Φ un homomorphisme injectif de $L^\infty(Z, \nu)$ dans $L^\infty(Z_1, \nu_1)$ tel que pour toute famille bornée $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $L^\infty(Z, \nu)$, on ait $\Phi(\sup f_i) = \sup \Phi(f_i)$. Il existe des ensembles $N \subset Z$ et $N_1 \subset Z_1$ respectivement ν - et ν_1 -négligeables et une application φ , ν_1 -mesurable, de $Z_1 - N_1$ sur $Z - N$ telle que $\varphi(\nu_1)$ soit équivalente à ν et que pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$ on ait $(\Phi(f))(\zeta_1) = f(\varphi(\zeta_1))$ pour presque tout $\zeta_1 \in Z_1 - N_1$.

Tout d'abord, on peut supposer Z et Z_1 compacts et égaux aux supports de ν et ν_1 (cf. [2], app. IV). Alors le lemme 2 fournit les diagrammes suivants :

$$\begin{aligned} L^\infty(Z', \nu') &\xrightarrow{\Theta} L^\infty(Z, \nu) \xrightarrow{\Phi} L^\infty(Z_1, \nu_1) \xrightarrow{\Theta_1} L^\infty(Z'_1, \nu'_1), \\ L_\infty(Z') &\rightleftharpoons A \rightarrow A_1 \rightleftharpoons L_\infty(Z'_1), \end{aligned}$$

où $A = \Theta(L_\infty(Z'))$, $A_1 = \Theta_1(L_\infty(Z'_1))$.

Si $\bar{\Phi} = \Theta_1^{-1} \circ \Phi \circ \Theta$, il existe d'après le lemme 1 une application continue $\bar{\varphi}$ de Z'_1 sur Z' telle que $\bar{\varphi}(\nu'_1)$ soit équivalente à ν' et que $\bar{\Phi}(f') = f' \circ \bar{\varphi}$ pour $f' \in L^\infty(Z', \nu')$. Alors $M' = Z' - \bar{\varphi}(Z'_1 - N'_1)$ est ν' -négligeable et $M'_1 = N'_1 \cup \bar{\varphi}^{-1}(M' \cup N')$ est ν'_1 -négligeable.

Définissons $N \subset Z$ et $N_1 \subset Z_1$ respectivement ν - et ν_1 -négligeables par le diagramme suivant :

$$Z_1 - N_1 \xleftarrow{\Theta_1^{-1}} Z'_1 - M'_1 \xrightarrow{\bar{\varphi}} Z' - M' \cup N' \xleftarrow{\Theta} Z - N$$

N , N_1 et $\varphi = \Theta \circ \bar{\varphi} \circ \Theta_1^{-1}$ vérifient la deuxième condition de l'énoncé; enfin si $\tilde{\nu}' = \bar{\varphi}(\nu'_1)$ et $\tilde{\nu} = \Theta(\tilde{\nu}')$, $\tilde{\nu}$ est équivalente à ν et $\tilde{\nu} = \varphi(\nu_1)$.

2. Relation d'équivalence entre permutations d'un espace mesuré.

DÉFINITION. — Soient Z un espace localement compact, ν une mesure positive sur Z ; deux permutations s et t de Z seront dites ν -équivalentes, et nous écrirons $s \sim_\nu t$ (ou simplement $s \sim t$) s'il existe un ensemble $A \subset Z$ de complémentaire localement négligeable tel que $s(A) = t(A) = A$ et $s|_A = t|_A$ ($s|_A$ désigne la restriction de s à A).

On vérifie immédiatement que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence et que la relation d'équivalence induite sur le groupe Γ des permutations laissant ν quasi-invariante est compatible avec la loi de groupe.

Appelons $\hat{\Gamma}$ le quotient de Γ par cette relation d'équivalence et G le groupe des automorphismes (pour la structure d'algèbre normée) de $L^\infty(Z, \nu)$. Tout élément $s \in \Gamma$ définit un élément $S \in G$ de la façon suivante :

$$(S(f))(\zeta) = f(s^{-1}\zeta) \quad \text{pour } \zeta \in Z, f \in L^\infty(Z, \nu)$$

S ne dépend que de la classe \hat{s} de s dans $\hat{\Gamma}$ et l'application $\hat{s} \rightarrow S$ ainsi définie est un homomorphisme α de $\hat{\Gamma}$ dans G .

PROPOSITION 1. — Si Z est à base dénombrable, α est un isomorphisme de $\hat{\Gamma}$ sur G .

Montrons que α est surjectif; soit $S \in G$; d'après [2], app. IV, il existe deux parties A et B de Z de complémentaires négligeables et une bijection s_0 de A sur B laissant ν quasi invariante et telle que pour $f \in L^\infty(Z, \nu)$

$$(S(f))(\zeta) = f(s_0^{-1}\zeta) \quad \text{pour presque tout } \zeta \in B.$$

L'ensemble $C = \bigcap s_0^n(A)$ ($-\infty < n < +\infty$) est de complémentaire négligeable; soit s la permutation de Z obtenue en prolongeant $s_0|_C$ (qui est une permutation de C) par l'identité sur $Z - C$; on a $s \in \Gamma$ et $S = \alpha(\hat{s})$. Montrons ensuite que α est injectif, c'est-à-dire que si $s \in \Gamma$ et $\alpha(\hat{s}) = I$, on a $s \sim I$.

Soit (Z_i) une suite de compacts dans Z tels que $Z - \bigcup_i Z_i$ soit négligeable et que la restriction de s à chaque Z_i soit continue. Soit Ω_i le plus grand ouvert relativement à Z_i négligeable; la suite $Z'_i = Z_i - \Omega_i$ possède les propriétés de la suite Z_i et aucun ouvert relativement à Z'_i n'est négligeable.

Soit alors $\zeta \in Z'_i$ et $s\zeta \neq \zeta$; ζ possède un voisinage V ouvert relativement à Z'_i tel que $V \cap s(V) = \emptyset$; V et par suite $s(V)$ est mesurable et non négligeable, ce qui est absurde puisque $\alpha(\hat{s}) = I$; s induit donc l'identité sur $\bigcup_i Z'_i$ et $s \sim I$.

3. Relations d'équivalence sur un espace mesuré. — Soient Z un ensemble, \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux relations d'équivalence sur Z ; rappelons que \mathcal{R}' est dite plus fine que \mathcal{R} si $\mathcal{R}'(\zeta, \zeta') \Rightarrow \mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ pour $\zeta \in Z, \zeta' \in Z$; on écrira alors $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$. La relation ainsi définie est une relation d'ordre; toute famille $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ de relations d'équivalence possède une borne supérieure $\mathcal{R} = \sup_{i \in I} \mathcal{R}_i$ définie par

$$\mathcal{R}(\zeta, \zeta') \Leftrightarrow \mathcal{R}_i(\zeta, \zeta') \quad \text{pour tout } i \in I.$$

REMARQUE. — On démontre facilement que si Z est un espace localement compact muni d'une mesure positive ν , la borne supérieure d'une famille dénombrable de relations d'équivalence ν -mesurables est ν -mesurable.

Dans la suite Z désignera un espace localement compact et ν une mesure positive sur Z .

DÉFINITION. — Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux relations d'équivalence sur Z ; on dira que \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont ν -équivalentes et l'on écrira $\mathcal{R} \equiv_\nu \mathcal{R}'$ (ou simplement $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$) s'il existe une partie A de Z de complémentaire localement négligeable telle que $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}'_A$ (\mathcal{R}_A désigne la relation d'équivalence induite par \mathcal{R} sur A).

On voit de suite que la relation \equiv est une relation d'équivalence; on

notera $\hat{\mathcal{R}}$ la classe de \mathcal{R} selon cette relation. Si $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$ les graphes de \mathcal{R} et \mathcal{R}' ne diffèrent que par un ensemble $\nu \otimes \nu$ -négligeable.

PROPOSITION 1. — *Si \mathcal{R} est mesurable et si $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$, \mathcal{R}' est mesurable.*

Soit \mathcal{K} une famille ν -dense de compacts telle que \mathcal{R}_K soit séparée pour $K \in \mathcal{K}$ (cf. [1] chap. 5, § 1, déf. 2); soit A une partie de Z de complémentaire localement-négligeable telle que $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}'_A$, il suffit de montrer que l'ensemble \mathcal{K}' des $K \in \mathcal{K}$ tels que $K \subset A$ est ν -dense; les propriétés PL_1 et PL_2 (loc. cit., prop. 1) sont trivialement vérifiées; démontrons la propriété b_1 : soit K_0 un compact dans Z et soit $\varepsilon > 0$; il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $K \subset K_0$ et $\nu(K_0 - K) \leq \varepsilon/2$ et un compact $K' \subset A \cap K_0$ tel que $\nu(A \cap K_0 - K') \leq \varepsilon/2$; alors $K \cap K' \in \mathcal{K}'$ et $\nu(K_0 - K \cap K') \leq \varepsilon$.

On vérifie immédiatement la

PROPOSITION 2. — *Si $\mathcal{R}_n \equiv \mathcal{R}'_n$ ($n = 1, 2, \dots$), on a*

$$\sup \mathcal{R}_n \equiv \sup \mathcal{R}'_n$$

qui permet de définir $\sup \hat{\mathcal{R}}_n$ -classe de $\sup \mathcal{R}_n$, avec $\mathcal{R}_n \in \hat{\mathcal{R}}_n$ pour tout n .

DÉFINITION. — \mathcal{R} et \mathcal{R}' étant deux relations d'équivalence sur Z , on écrira $\mathcal{R} \prec \mathcal{R}'$ s'il existe une partie A de Z de complémentaire localement négligeable telle que $\mathcal{R}_A \leq \mathcal{R}'_A$. La relation \prec est une relation de préordre et définit par passage au quotient une relation d'ordre sur les classes $\hat{\mathcal{R}}$, relation que nous noterons encore \prec .

DÉFINITION. — Soient \mathcal{R} une relation d'équivalence sur Z et s une application de Z dans Z ; on dira que \mathcal{R} et s sont ν -compatibles si l'on a $\mathcal{R}(\zeta, s\zeta)$ pour tout ζ appartenant à un ensemble de complémentaire localement négligeable.

Considérons maintenant des applications s qui sont des permutations de Z laissant ν quasi invariante; on démontre alors facilement que si s et s' sont ν -compatibles avec \mathcal{R} , ss'^{-1} l'est aussi; et d'autre part que si s est ν -compatible avec \mathcal{R} et si $s \sim s'$ et $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}'$, s' est ν -compatible avec \mathcal{R}' ; on pourra donc dire que \hat{s} est ν -compatible avec $\hat{\mathcal{R}}$. Enfin si \hat{s} est ν -compatible avec $\hat{\mathcal{R}}_n$ pour $n = 1, 2, \dots$, \hat{s} est ν -compatible avec $\sup \hat{\mathcal{R}}_n$.

PROPOSITION 3. — *Soient $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ deux algèbres de von Neumann abéliennes dans un espace hilbertien à base dénombrable, Z un espace topologique localement compact à base dénombrable muni d'une mesure positive bornée ν tel que \mathcal{Z} soit isomorphe à $L^\infty(z, \nu)$. Définissons de même Y et μ tels que \mathcal{Y} soit isomorphe à $L^\infty(Y, \mu)$; l'injection canonique de \mathcal{Y} dans \mathcal{Z} définit un homomorphisme injectif de $L^\infty(Y, \mu)$ dans $L^\infty(z, \nu)$ qui à son tour définit une application φ d'une partie Z_0 de z de complémentaire ν -négligeable dans Y (cf. § 1, prop. 1); soit $\hat{\mathcal{R}}$ la classe de relations*

d'équivalence mesurables sur Z définie par φ . Alors $\hat{\mathcal{R}}$ est indépendante du choix de Y, μ et φ .

Supposons en effet que Y_1, μ_1, φ_1 et Y_2, μ_2, φ_2 répondent à la question; soient Φ_1 et Φ_2 les homomorphismes injectifs de $L^\infty(Y_1, \mu_1)$ et de $L^\infty(Y_2, \mu_2)$ dans $L^\infty(Z, \nu)$; il existe un isomorphisme Ψ de $L^\infty(Y_1, \mu_1)$ sur $L^\infty(Y_2, \mu_2)$ tel que $\Phi_2 \circ \Psi = \Phi_1$, donc (cf. [2], app. IV) une bijection ψ d'une partie Y'_1 de Y_1 de complémentaire négligeable sur une partie Y'_2 de Y_2 de complémentaire négligeable telle que pour $f \in L^\infty(Y_1, \mu_1)$ on ait

$$f(\varphi_1(\zeta)) = f(\psi^{-1}(\varphi_2(\zeta))) \quad \text{pour } \zeta \in Z_f \subset Z,$$

Z_f étant de complémentaire négligeable; appelons (O_n) une base d'ouverts de Y_1 et f_n la fonction caractéristique de O_n ; pour $\zeta \in \bigcap_n Z_{f_n}$ on a $\varphi_1(\zeta) = \psi^{-1}(\varphi_2(\zeta))$ et il existe une partie Z' de Z de complémentaire négligeable telle que pour $\zeta \in Z', \zeta' \in Z'$:

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi_1(\zeta') \Leftrightarrow \varphi_2(\zeta) = \varphi_2(\zeta').$$

Définition. — Nous dirons que $\hat{\mathcal{R}}$ est la classe de relations d'équivalence mesurables sur Z associée à la sous-algèbre \mathcal{Y} de \mathcal{Z} .

PROPOSITION 4. — $\mathcal{Y}, \mathcal{Z}, Z, \nu, \hat{\mathcal{R}}$ étant définis comme précédemment, soient Φ un automorphisme de \mathcal{Z} (pour la structure d'algèbre normée) et \hat{s} la classe de permutations de Z associée à Φ (cf. § 1, prop. 1), alors Φ induit l'identité sur \mathcal{Y} si et seulement si \hat{s} est ν -compatible avec $\hat{\mathcal{R}}$.

La condition est évidemment suffisante; pour montrer qu'elle est nécessaire, définissons Y, μ et φ comme pour la proposition 3, φ étant prolongée arbitrairement dans $Z - Z_0$; soit $\mathcal{R} \in \hat{\mathcal{R}}$ la relation d'équivalence sur Z définie par φ ; appelons (O_n) une base d'ouverts de Y et \mathcal{R}_n la relation d'équivalence sur Z correspondant à la partition $Z = \varphi^{-1}(O_n) \cup (Z - \varphi^{-1}(O_n))$; \hat{s} est ν -compatible avec \mathcal{R}_n pour tout n donc avec $\sup \mathcal{R}_n$ qui n'est autre que \mathcal{R} .

4. Représentation matricielle continue de certains opérateurs unitaires.

PROPOSITION 1. — Soient Z un espace localement compact, ν une mesure positive bornée sur Z , $\mathcal{H} = \int_Z^\oplus \mathcal{H}(\zeta), d\nu(\zeta)$ une intégrale hilbertienne, \mathcal{Z} l'algèbre des opérateurs diagonalisables; soient s une permutation de Z laissant ν quasi invariante et r une fonction mesurable telle que

$$d\nu(s\zeta) = r(\zeta).d\nu(\zeta).$$

Supposons qu'il existe un unitaire U dans \mathcal{H} tel que pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$ on ait $T_{f_s} = U \cdot T_f \cdot U^{-1}$ (T_f désigne l'opérateur diagonalisable défini par f et f_s la fonction $\zeta \rightarrow f_s(\zeta) = f(s^{-1}\zeta)$). Alors il existe des isomorphismes ψ_ζ de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(s\zeta)$ définis pour presque tout ζ et tels que pour tout $x = (x(h)) \in \mathcal{H}$ on ait presque partout

$$(Ux)(\zeta) = (r(s^{-1}\zeta))^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi_{s^{-1}\zeta}(x(s^{-1}\zeta)).$$

Soit $x_i = (x_i(\zeta)) \in \mathcal{H}$ un champ mesurable de bases orthonormales, soit $y_i = Ux_i$, soit $y_i(\zeta)$ une décomposition de y ; soient enfin $z_i = (z_i(\zeta))$ avec $z_i(\zeta) = (r(\zeta))^{\frac{1}{2}} \cdot y_i(\zeta)$ et $\mathcal{H}_1(\zeta)$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(\zeta)$ engendré par les $z_i(\zeta)$.

On a pour presque tout ζ

$$(z_i(s\zeta), z_j(s\zeta)) = (x_i(\zeta), x_j(\zeta)) \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } j;$$

en effet pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$

$$\begin{aligned} & U \cdot T_f \cdot x_i = T_{f_s} \cdot y_i, \\ (1) \quad T_f \cdot x_j &= (U \cdot T_f \cdot x_i, U \cdot T_f \cdot x_j) = (T_{f_s} \cdot y_i, T_{f_s} \cdot y_j), \\ & \int |f(\zeta)|^2 \cdot (x_i(\zeta), x_j(\zeta)) \cdot d\nu(\zeta) \\ &= \int |f(s^{-1}\zeta)|^2 \cdot (y_i(\zeta), y_j(\zeta)) \cdot d\nu(\zeta) \\ &= \int r(s\zeta) \cdot |f(\zeta)|^2 \cdot (y_i(s\zeta), y_j(s\zeta)) \cdot d\nu(\zeta), \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée pour presque tout ζ , soit pour $\zeta \in Z'$ de complémentaire négligeable. Appelons ψ_ζ ($\zeta \in Z'$) l'isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}_1(s\zeta)$ défini par

$$\psi_\zeta(x_i(\zeta)) = z_i(s\zeta).$$

Montrons que $\mathcal{H}_1(\zeta) = \mathcal{H}(\zeta)$ pour presque tout ζ ; supposons le contraire : il existe alors un élément $u = (u(\zeta)) \in \mathcal{H}$, $u \neq 0$ tel que $u(\zeta)$ soit orthogonal à $z_i(\zeta)$ pour tout ζ et tout i ; soit $v = (v(\zeta)) = U^{-1}u$; pour toute $f \in L^\infty(Z, \nu)$,

$$\begin{aligned} (T_f \cdot x_i, T_f \cdot v) &= (U \cdot T_f \cdot x_i, U \cdot T_f \cdot v) = (T_{f_s} \cdot y_i, T_{f_s} \cdot u), \\ \int |f(\zeta)|^2 \cdot (x_i(\zeta), v(\zeta)) \cdot d\nu(\zeta) &= \int |f_s(\zeta)|^2 \cdot (y_i(\zeta), u(\zeta)) \cdot d\nu(\zeta) = 0, \end{aligned}$$

donc $(x_i(\zeta), v(\zeta)) = 0$ presque partout, et $v = u = 0$. On a donc bien $\mathcal{H}_1(\zeta) = \mathcal{H}(\zeta)$ pour $\zeta \in Z''$ de complémentaire négligeable.

Posons $Z''' = Z' \cap s^{-1}(Z'')$ et $\tilde{Z} = \bigcap s^n(Z''')$ ($-\infty < n < +\infty$); nous remplacerons dans la suite Z par \tilde{Z} qui est de complémentaire négligeable;

ψ_ζ est alors, pour tout ζ , un isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(s\zeta)$ et $z_i = (z_i(\zeta))$ est un champ mesurable de bases orthonormales.

Considérons un élément $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{H}$ et posons

$$y(\zeta) = (r(s^{-1}\zeta))^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi_{s^{-1}\zeta}(x(s^{-1}\zeta)).$$

Le champ $\zeta \rightarrow y(\zeta)$ est mesurable car

$$(y(\zeta), z_i(\zeta)) = (x(s^{-1}\zeta), x_i(s^{-1}\zeta)) \cdot (r(s^{-1}\zeta))^{-\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } i,$$

est une fonction mesurable. Puis

$$\int |y(\zeta)|^2 \cdot d\nu(\zeta) = \int |x(\zeta)|^2 \cdot d\nu(\zeta)$$

et le champ $\zeta \rightarrow y(\zeta)$ définit un élément y de \mathcal{H} tel que $\|y\| = \|x\|$ et qui ne dépend pas de la décomposition $x = (x(\zeta))$. Posons $y = U_1 \cdot x$; U_1 est un opérateur linéaire, donc unitaire et l'on vérifie de suite que

$$U_1 \cdot T_f \cdot U_1^{-1} = T_f, \quad \text{pour toute } f \in L^\infty(Z, \nu).$$

De plus, $U_1 \cdot x_i = U \cdot x_i = y_i$ pour tout i , et pour $f \in L^\infty(Z, \nu)$,

$$U_1 \cdot T_f \cdot x_i = T_{f_i} \cdot U_1 \cdot x_i = T_{f_i} \cdot U \cdot x_i = U \cdot T_f \cdot x_i$$

et comme les éléments de la forme $T_f \cdot x_i$ sont partout denses dans \mathcal{H} , on a $U_1 = U$.

5. Intégrales superposées d'espaces hilbertiens.

LEMME 1. — Soient Z et X deux espaces compacts à bases dénombrables, ν et μ deux mesures positives sur Z et X , φ une application ν -mesurable de Z sur X telle que $\varphi(\nu)$ existe et que $\varphi(\nu) = \mu$, $\nu = \int \nu_\eta d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ (cf. [1, chap. 6, § 3]). Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{F} \subset L^\infty(Z, \nu)$ partout dense dans $L^2(Z, \nu_\eta)$ pour presque tout $\eta \in X$.

Il existe une partie ν -négligeable N de Z et une partition de $Z - N$ en compacts Z_n ($n = 1, 2, \dots$) sur chacun desquels φ est continue. Soit X_0 l'ensemble, de complémentaire μ -négligeable, des $\eta \in X$ tels que N soit ν_η -négligeable. Soit \mathcal{F}_n un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathcal{C}(Z_n)$ pour la topologie de la convergence uniforme; soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions f définies sur Z telles que :

1° $f = 0$ sauf sur une réunion finie de compacts Z_n , soit $n \in A$,

2° pour tout $n \in A$ il existe $j_n \in \mathcal{F}_n$ telle que

$$f_n(\zeta) = f(\zeta) \quad \text{pour } \zeta \in Z_n.$$

\mathcal{F} est dénombrable et $\mathcal{F} \subset L^\infty(z, \nu)$; il reste donc à démontrer que pour $\eta \in X_0$ toute fonction g_0 définie sur $\varphi^{-1}(\eta)$, nulle en dehors d'une réunion finie d'ensembles $\varphi^{-1}(\eta) \cap Z_n$, soit $n \in B$, et continue sur chacun d'eux, est limite uniforme de restrictions de fonctions de \mathcal{F} . Pour tout $n \in B$, $\varphi^{-1}(\eta) \cap Z_n$ est fermé dans Z_n et il existe $g_n \in \mathcal{C}(Z_n)$ coïncidant avec g_0 sur $\varphi^{-1}(\eta) \cap Z_n$. Puis pour tout $n \in B$, il existe $f_n \in \mathcal{F}_n$ telle que

$$|f_n(\zeta) - g_n(\zeta)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } \zeta \in Z_n.$$

Alors si f est définie par les f_n , $f \in \mathcal{F}$,

$$|f(\zeta) - g_0(\zeta)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } \zeta \in \varphi^{-1}(\eta).$$

PROPOSITION 1. — Soient Z et X deux espaces localement compacts à bases dénombrables, ν et μ deux mesures positives bornées sur Z et X , φ une application ν -mesurable de Z sur X telle que $\varphi(\nu)$ existe et que $\varphi(\nu) = \mu$, $\nu = \int \nu_\eta \cdot d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ , $\zeta \rightarrow \mathcal{H}(\zeta)$ un champ ν -mesurable d'espaces hilbertiens, $\zeta \rightarrow x_i(\zeta) \in \mathcal{H}(\zeta)$ une suite fondamentale de champs de vecteurs telle que pour tout i , $x_i(\zeta)$ soit borné en norme. Soient \mathcal{H} l'intégrale $\int^\oplus \mathcal{H}(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ et \mathfrak{H} l'algèbre des opérateurs diagonalisables.

Il existe une partie X_0 de X de complémentaire μ -négligeable telle que pour tout $\eta \in X_0$ la suite de champs $\zeta \rightarrow x_i(\zeta)$ définisse (au sens de [2], p. 144, prop. 4) sur le champ $\zeta \rightarrow \mathcal{H}(\zeta)$ une structure de champ ν_η -mesurable. Pour $\eta \in X_0$ soient $\mathcal{K}(\eta)$ l'intégrale $\int^\oplus \mathcal{H}(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta)$ et $\mathfrak{K}(\eta)$ l'algèbre des opérateurs diagonalisables.

Il existe une suite de champs ν -mesurables de vecteurs $\tilde{x}_i = (\tilde{x}_i(\zeta)) \in \mathcal{H}$ telle que la suite de champs $\eta \rightarrow y_i(\eta) = \int^\oplus \tilde{x}_i(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta)$ définisse sur le champ $\eta \rightarrow \mathcal{K}(\eta)$ ($\eta \in X_0$) une structure de champ μ -mesurable. Alors le champ d'algèbres de von Neumann $\eta \rightarrow \mathfrak{K}(\eta)$ est μ -mesurable. Soient $\mathcal{K} = \int^\oplus \mathcal{K}(\eta) \cdot d\mu(\eta)$ et $\mathfrak{K} = \int^\oplus \mathfrak{K}(\eta) \cdot d\mu(\eta)$. Il existe un isomorphisme Ω de \mathcal{H} sur \mathcal{K} transformant \tilde{x}_i en $y_i = (y_i(\eta))$ pour tout i et \mathfrak{H} en \mathfrak{K} .

Tout d'abord on peut se ramener au cas où Z et X sont compacts et égaux aux supports de ν et μ .

L'ensemble X_0 de l'énoncé peut être pris égal à l'ensemble des $\eta \in X$ pour lesquels les fonctions $\zeta \rightarrow (x_i(\zeta), x_j(\zeta))$ sont ν_η -mesurables.

Soient X_1 une partie de X_0 de complémentaire μ -négligeable et $\mathcal{F} = \{f_i\}$

une partie dénombrable de $L^\infty(Z, \nu)$ partout dense dans $L^2(Z, \nu_\eta)$ pour tout $\eta \in X_1$. La suite \tilde{x}_i de l'énoncé peut être prise égale à la suite double

$$x_{i,j} = (x_{i,j}(\zeta)) \quad \text{où} \quad x_{i,j}(\zeta) = f_i(\zeta) \cdot x_j(\zeta);$$

posons

$$y_{i,j}(\eta) = \int^\oplus x_{i,j}(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta).$$

Soit pour $\eta \in X_1$, $T_i(\eta)$ l'opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\eta))$ défini par f_i ; pour tout i le champ $\eta \rightarrow T_i(\eta)$ est μ -mesurable car les fonctions

$$\eta \rightarrow (T_i(\eta) \cdot y_{j,k}(\eta), y_{l,m}(\eta))$$

sont μ -mesurables; et pour tout $\eta \in X_1$ les $T_i(\eta)$ engendrent $\mathcal{X}(\eta)$; par suite le champ $\eta \rightarrow \mathcal{X}(\eta)$ est μ -mesurable.

Considérons maintenant un élément $x = (x(\zeta))$ de \mathcal{X} ; les fonctions $\zeta \rightarrow (x_i(\zeta), x(\zeta))$ sont ν_η -mesurables pour presque tout η , soit pour $\eta \in X_x$ de complémentaire μ -négligeable, et le champ $\zeta \rightarrow x(\zeta)$ est ν_η -mesurable pour $\eta \in X_x$; posons

$$y(\eta) = \int^\oplus x(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta).$$

Le champ $\eta \rightarrow y(\eta)$ est μ -mesurable car les fonctions $\eta \rightarrow (y(\eta), y_{i,j}(\eta))$ sont μ -mesurables et l'on a

$$\int \|y(\eta)\|^2 \cdot d\mu(\eta) = \int \|x(\zeta)\|^2 \cdot d\nu(\zeta),$$

par suite le champ $\eta \rightarrow y(\eta)$ définit un élément $y \in \mathcal{H}$ tel que $\|y\| = \|x\|$. Posons $y = \Omega x$; Ω est une application linéaire, donc un isomorphisme de \mathcal{X} sur un sous-espace fermé de \mathcal{H} , et l'on a $y_{i,j} = \Omega \cdot x_{i,j}$; $\Omega(\mathcal{X})$ contient les champs $\eta \rightarrow h(\eta) \cdot y_{i,j}(\eta)$ pour $\zeta \in L^\infty(X, \mu)$ et par suite est égal à \mathcal{H} . Il reste à montrer que Ω transforme \mathcal{Y} en \mathcal{X} ; soit $T = T_f \in \mathcal{Y}$, $f \in L^\infty(Z, \nu)$ et soit $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{X}$; on a

$$\Omega \cdot x = (y(\eta)), \quad \text{où} \quad y(\eta) = \int^\oplus x(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta)$$

et

$$\Omega \cdot T \cdot x = (y'(\eta)), \quad \text{où} \quad y'(\eta) = \int^\oplus f(\zeta) \cdot x(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta)$$

donc

$$\Omega \cdot T \cdot \Omega^{-1} \in \mathcal{X}.$$

Inversement soit $S = \int^\oplus S(\eta) \cdot d\mu(\eta) \in \mathcal{X}$, $S(\eta)$ étant défini pour tout $\eta \in X_1$ par une fonction $f_\eta(\zeta)$, $\zeta \in \varphi^{-1}(\eta)$; posons $T = \Omega^{-1} S \cdot \Omega$; quel que

soit le champ $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{X}$, le champ $\zeta \rightarrow f(\zeta).x(\zeta)$ est ν -mesurable et définit T_x , donc $f(\zeta)$ est ν -mesurable, $f \in L^\infty(Z, X)$ et $T = T_f$.

PROPOSITION 2. — Soient \mathcal{X} un espace hilbertien à base dénombrable, $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{Z}$ deux algèbre de von Neumann abéliennes dans \mathcal{X}

$$\mathcal{X} = \int_Y^\oplus \mathcal{X}(\eta).d\mu(\eta) \quad \text{et} \quad \mathcal{X} = \int_Z^\oplus \mathcal{X}(\zeta).d\nu(\zeta)$$

deux décompositions de \mathcal{X} associées à \mathcal{Y} et à \mathfrak{Z} , $\mathfrak{Z} = \int^\oplus \mathfrak{Z}(\eta).d\mu(\eta)$ une décomposition de \mathfrak{Z} sur Y .

1° Il existe des ensembles $M \subset Y$ et $N \subset Z$ respectivement μ - et ν -négligeables et une application φ ν -mesurable de $Z-N$ sur $Y-M$ telle que $\varphi(\nu)$ soit équivalente à μ et que en appelant Φ l'homomorphisme injectif de $L^\infty(Y, \mu)$ dans $L^\infty(Z, \nu)$ correspondant à l'injection canonique de \mathcal{Y} dans \mathfrak{Z} , on ait pour toute $f \in L^\infty(Y, \mu)$

$$(\Phi(f))(\zeta) = f(\varphi(\zeta)) \quad \text{pour presque tout } \zeta \in Z - N.$$

2° Il existe une désintégration $\nu = \int \nu_\eta.d\mu(\eta)$ telle que pour tout η , ν_η soit concentrée sur $\varphi^{-1}(\eta)$.

3° Le champ $\zeta \rightarrow \mathcal{X}(\zeta)$ est ν_η -mesurable pour presque tout η .

4° Pour presque tout η il existe un isomorphisme de $\mathcal{X}(\eta)$ sur $\int^\oplus \mathcal{X}(\zeta).d\nu_\eta(\zeta)$ qui transforme $\mathfrak{Z}(\eta)$ en l'algèbre des opérateurs diagonalisables.

5° Si $T \in \mathfrak{Z}'$ et si $T = \int^\oplus T(\eta).d\mu(\eta)$ et $T = \int^\oplus T(\zeta).d\nu(\zeta)$ sont des décompositions de T sur Y et Z , $T(\eta)$ s'identifie à $\int^\oplus T(\zeta).d\nu(\zeta)$ pour presque tout η .

Le 1° résulte du paragraphe 1, proposition 1.

Le 2° résulte de [1] (*loc. cit.*), et a déjà été utilisé.

Le 3° résulte de la proposition 1.

Démontrons le 4°. Définissons $\mathcal{K}(\eta)$, \mathcal{K} , $\mathcal{X}(\eta)$, \mathcal{X} et Ω comme à la proposition 1 et soit \mathfrak{E} l'algèbre des opérateurs diagonalisables dans \mathcal{K} sur Y soient $g \in L^\infty(Y, \mu)$ et $f = g \circ \varphi$; d'après la fin de la démonstration de la proposition 1, Ω transforme l'opérateur $T_f \in \mathcal{Y}$ en l'opérateur $S_g \in \mathfrak{E}$ défini par g ; d'après ([2], p. 221, th. 3) il existe, après modification éventuelle de $\mathcal{X}(\eta)$ et $\mathcal{K}(\eta)$ sur des ensembles μ -négligeables, un champ μ -mesurable $\eta \rightarrow V(\eta)$ d'isomorphismes de $\mathcal{X}(\eta)$ sur $\mathcal{K}(\eta)$ tel que si $x = (x(\eta)) \in \mathcal{X}$

on ait $\Omega x = (y(\eta))$ où $y(\eta) = V(\eta).x(\eta)$ presque partout. On peut alors identifier les champs $\eta \rightarrow \mathcal{H}(\eta)$ et $\eta \rightarrow \mathcal{K}(\eta)$ ainsi que \mathcal{H} et \mathcal{K} , et l'on a alors $\mathfrak{Y}(\eta) = \mathfrak{X}(\eta)$ presque partout (cf. [2] p. 180, prop. 1).

Enfin pour démontrer le 5°, considérons une suite fondamentale de champ de vecteurs de carrés intégrables $x_i = (x_i(\zeta))$ et posons $y_i = (y_i(\eta))$ où $y_i(\eta) = \int^{\oplus} x_i(\zeta).d\nu_{\eta}(\zeta)$; on a, pour presque tout η ,

$$T(\eta).y_i(\eta) = \int^{\oplus} T(\zeta).x_i(\zeta).d\nu_{\eta}(\zeta) \quad \text{pour tout } i$$

donc pour presque tout η le champ $\zeta \rightarrow T(\zeta)$ est ν_{η} -mesurable et

$$T(\eta) = \int^{\oplus} T(\zeta).d\nu_{\eta}(\zeta).$$

6. Algèbres de von Neumann relativement discrètes et relativement continues.

1° *Définitions et propriétés globales.* — DÉFINITION. — Dans ce qui suit, α désigne une algèbre de von Neumann dans un espace hilbertien \mathcal{H} et \mathfrak{Y} une algèbre de von Neumann contenue dans le centre de α . Le support dans \mathfrak{Y} d'un projecteur $P \in \alpha$ est le plus petit projecteur de \mathfrak{Y} majorant P ; on le notera souvent \bar{P} . P est dit relativement minimal par rapport à \mathfrak{Y} si $P \neq 0$ et si, pour tout projecteur Q de α ,

$$Q \leq P \quad \text{et} \quad \bar{Q} = \bar{P} \Rightarrow Q = P.$$

(Nous emploierons la notation $Q < P$ pour $Q \leq P$ et $Q \neq P$).

LEMME 1. — Si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de projecteurs de α deux à deux permutables,

$$\overline{\sup P_i} = \sup \bar{P}_i.$$

Car si R est un projecteur de \mathfrak{Y} ,

$$\begin{aligned} R \geq \overline{\sup P_i} &\Leftrightarrow R \geq \sup P_i \Leftrightarrow R \geq P_i \quad \text{pour tout } i, \\ &\Leftrightarrow R \geq \bar{P}_i \quad \text{pour tout } i \Leftrightarrow R \geq \sup \bar{P}_i. \end{aligned}$$

LEMME 2. — Soient $P \in \alpha$, $Q \in \mathfrak{Y}$ tels que $Q \leq \bar{P}$, alors $\overline{PQ} = Q$. D'abord, $PQ \leq Q$. Supposons qu'il existe $R \in \mathfrak{Y}$ tel que $PQ \leq R < Q$. On a

$$RP = RQP = QP,$$

d'où $(\bar{P} - Q + R).P = P$ et $P \leq \bar{P} - Q + R < \bar{P}$. Impossible.

LEMME 3. — Si P est relativement minimal, tout projecteur A de \mathfrak{A} , non nul et majoré par P , l'est aussi.

Car supposons $Q' \in \mathfrak{A}$, $Q' < Q$, $\overline{Q'} = \overline{Q}$. En posant $P_1 = P - Q$ on a $\overline{P} = \sup(\overline{P_1}, \overline{Q})$ et $\overline{\sup(P_1, Q')} = \overline{P}$, mais $\sup(P_1, Q') < P$. Impossible.

LEMME 4. — Si P est relativement minimal et si $Q \in \mathfrak{A}$, $Q \leq P$, on a $Q = P \cdot \overline{Q}$.

Car $\overline{PQ} = \overline{Q}$, et d'autre part $Q \leq P \cdot \overline{Q}$ et $P\overline{Q}$ est relativement minimal; donc, $Q = P\overline{Q}$.

LEMME 5. — Soit P un projecteur de \mathfrak{A} tel que tout projecteur Q de \mathfrak{A} majoré par P soit de la forme $Q = P \cdot R$, $R \in \mathfrak{F}$. Alors P est nul ou relativement minimal.

En effet supposons $Q \leq P$ et $\overline{Q} = \overline{P}$; en posant $R_1 = R \cdot \overline{P}$, $R_2 = R(I - \overline{P})$, on a $R = R_1 + R_2$, $Q = P \cdot R_1$ et $\overline{Q} = R_1$, par suite $\overline{P} = R_1 \leq R$, $P \leq R$ et $Q = P$.

Nous avons ainsi la

PROPOSITION 1. — Pour qu'un projecteur P non nul de \mathfrak{A} soit relativement minimal, il faut et il suffit que tout projecteur Q de \mathfrak{A} majoré par P soit de la forme $Q = P \cdot R$, $R \in \mathfrak{F}$.

PROPOSITION 2. — Pour qu'un projecteur P non nul de \mathfrak{A} soit relativement minimal, il faut et il suffit que $\mathfrak{F}_P = \mathfrak{A}_P$.

Condition nécessaire : il suffit de montrer que tout projecteur $Q' \in \mathfrak{A}_P$ est de la forme $Q' = R_P$, $R \in \mathfrak{F}$. Or Q' est de la forme Q_P , $Q \in \mathfrak{A}$, $Q \leq P$; posant $Q = P \cdot R$, $R \in \mathfrak{F}$, on obtient $Q' = Q_P = R_P$.

Condition suffisante : soit $Q \in \mathfrak{A}$, $Q \leq P$; Q_P est de la forme R_P , $R \in \mathfrak{F}$ et l'on a $Q_P = (P \cdot R)_P$, d'où $Q = P \cdot R$.

DÉFINITION. — \mathfrak{A} sera dite relativement discrète (resp. relativement continue) par rapport à \mathfrak{F} si tout projecteur non nul de \mathfrak{A} majore un projecteur relativement minimal (resp. si \mathfrak{A} ne contient aucun projecteur relativement minimal). Un projecteur P non nul de \mathfrak{A} sera dit relativement discret (resp. relativement continu) par rapport à \mathfrak{F} si tout projecteur non nul de \mathfrak{A} majoré par P majore un projecteur relativement minimal (resp. si P ne majore aucun projecteur relativement minimal).

LEMME 6. — Si P et Q sont des projecteurs de \mathfrak{A} tels que $Q \leq P$, on a $\overline{(Q_P)} \leq (\overline{Q})_P$ (R étant un projecteur de \mathfrak{A}_P , \overline{R} désigne son support dans \mathfrak{F}_P).

On a d'abord $\overline{(Q_P)} \leq (\bar{Q})_P$. Supposons que pour un projecteur $S_0 \in \mathfrak{F}_P$ on ait $Q_P \leq S_0 \leq (\bar{Q})_P$. Soit $S \in \mathfrak{F}$ tel que $S_0 = S_P$; on a $Q \leq P.S \leq P.\bar{Q}$ et posant $S' = \bar{P}.S$, $S'_P = S_0$ et $Q \leq P.S' \leq P.\bar{Q}$, d'où, d'après le lemme 2, $Q \leq S' \leq \bar{Q}$ et $S' = \bar{Q}$, $S_0 = (\bar{Q})_P$.

LEMME 7. — *Avec les notations précédentes, Q est relativement minimal par rapport à \mathfrak{F} si et seulement si Q_P l'est par rapport à \mathfrak{F}_P .*

Supposons Q relativement minimal et soit $R_0 \in \mathfrak{A}_P$, $R_0 < Q_P$; $R_0 = R_P$ avec $R \in \mathfrak{A}$, $R \leq P$; on a $R < Q$, donc $\bar{R} < \bar{Q}$ et (lemme 2) $P.\bar{R} < P.\bar{Q}$; puis $\bar{R}_0 = (\bar{R})_P < (\bar{Q})_P = \overline{(Q_P)}$.

Supposons maintenant Q non relativement minimal : soit $R \in \mathfrak{A}$ $R < Q$ tel que $\bar{R} = \bar{Q}$: on a $R_P < Q_P$, mais $\overline{(R_P)} = \overline{(Q_P)}$ et Q_P n'est pas relativement minimal.

On a ainsi la

PROPOSITION 3. — *Un projecteur P non nul de \mathfrak{A} est relativement discret (resp. continu) par rapport à \mathfrak{F} si et seulement si \mathfrak{A}_P est relativement discrète (resp. continue) par rapport à \mathfrak{F}_P .*

On vérifie immédiatement la

PROPOSITION 4. — *Soient \mathfrak{F}_i et \mathfrak{A}_i ($i \in I$) deux familles d'algèbres de von Neumann telles que pour tout i $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}'_i$; pour tout projecteur $(P_i) \in \Pi \mathfrak{A}_i$ on a $\overline{(P_i)} = (\bar{P}_i)$ et (P_i) est relativement minimal si et seulement si chaque P_i l'est. $\Pi \mathfrak{A}_i$ est relativement discrète (resp. continue) si et seulement si chaque \mathfrak{A}_i l'est.*

PROPOSITION 5. — *Les notations étant celles du début, il existe dans \mathfrak{F} un plus grand projecteur relativement discret (resp. continu) dans \mathfrak{A} par rapport à \mathfrak{F} ; si E et E' sont ces projecteurs, on a $E.E' = 0$.*

Soit \mathcal{E} (resp. \mathcal{E}') l'ensemble, inductif pour l'inclusion, des familles de projecteurs de \mathfrak{F} relativement discrets (resp. continus) et orthogonaux deux à deux; soit E_i (resp. E'_i) une famille maximale et soit $E = \Sigma E_i$ (resp. $E' = \Sigma E'_i$) E (resp. E') est relativement discret (resp. continu) d'après les propositions 3 et 4 et l'on a évidemment $E.E' = 0$. Enfin on voit de suite que si $P \in \mathfrak{F}$ est relativement discret (resp. continu), $P \leq E$ (resp. $P \leq E'$).

LEMME 8. — *Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de projecteurs de \mathfrak{A} relativement minimaux et tels que les \bar{P}_i soient orthogonaux deux à deux. Alors $P = \Sigma P_i$ est relativement minimal.*

Ceci résulte de la proposition 4.

PROPOSITION 6. — E' étant le projecteur défini à la proposition 5, $I - E'$ est le support d'un projecteur relativement minimal de \mathfrak{A} .

Soit Λ l'ensemble des supports des projecteurs relativement minimaux et soit $P_0 = \sup_{P \in \Lambda} P$. Montrons que $P_0 \in \Lambda$; soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille maximale d'éléments de Λ orthogonaux deux à deux, $\sum P_i \in \Lambda$ (lemmes 1 et 8) et $\sum P_i = P_0$ car tout élément de Λ est majoré par $\sum P_i$; donc $P_0 \in \Lambda$. On vérifie aisément que $P_0 \cdot E' = 0$ et que P_0 ne peut être strictement inférieur à $I - E'$; par suite $P_0 = I - E'$.

REMARQUE. — Si \mathfrak{Z} est le centre de \mathfrak{A} , on retrouve la notion de support central d'un projecteur; d'après la proposition 1 les projecteurs relativement minimaux sont les projecteurs abéliens (cf. [2], p. 123); les algèbres relativement discrètes sont les algèbres discrètes; enfin les algèbres relativement continues sont les algèbres continues d'après la proposition 3.

2° Cas où \mathfrak{A} est abélienne.

PROPOSITION 7. — Il existe dans \mathfrak{A} un plus grand projecteur relativement discret (resp. continu), F (resp. F'); on a $F \cdot F' = 0$, $F + F' = I$. F et F' sont fixes par tout automorphisme de \mathfrak{A} induisant l'identité sur \mathfrak{Z} .

On démontre l'existence de F et F' et l'égalité $F \cdot F' = 0$ par la méthode employée pour la proposition 5. On a $F + F' = I$ parce que $I - F$ ne peut majorer aucun projecteur relativement minimal. Enfin soit Φ un automorphisme de \mathfrak{A} induisant l'identité sur \mathfrak{Z} ; on a $\overline{\Phi(P)} = \overline{P}$ pour tout $P \in \mathfrak{A}$ et $\Phi(P)$ est relativement minimal si et seulement si P l'est; d'où la proposition.

PROPOSITION 8. — Pour que \mathfrak{A} soit relativement discrète par rapport à \mathfrak{Z} , il faut et il suffit qu'elle contienne une famille de projecteurs relativement minimaux, orthogonaux deux à deux et de somme I .

Condition suffisante : si P_i est une telle famille et si $Q \in \mathfrak{A}$, $Q \neq 0$; on a $Q \cdot P_{i_0} \neq 0$ pour au moins un indice i_0 et $Q \cdot P_{i_0}$ est relativement minimal.

Condition nécessaire : il suffit de prendre une famille maximale de projecteurs de \mathfrak{A} relativement minimaux, orthogonaux deux à deux.

3° Réduction des algèbres de von Neumann relativement discrètes et relativement continues. — Dans ce numéro, on considère une intégrale

hilbertienne $\mathfrak{A} = \int_{\mathfrak{Z}}^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ sur un espace Z localement compact à base dénombrable et deux algèbres de von Neumann décomposables

$$\mathfrak{A} = \int_{\mathfrak{Z}}^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta) \cdot d\nu(\zeta), \quad \mathfrak{Z} = \int_{\mathfrak{Z}}^{\oplus} \mathfrak{Z}(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$$

telles que pour tout ζ , $\mathfrak{Z}(\zeta)$ soit contenue dans le centre de $\mathfrak{A}(\zeta)$.

LEMME 9. — Soit $P = \int^{\oplus} P(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ un projecteur de \mathfrak{A} tel que, pour tout ζ , $P(\zeta)$ soit un projecteur de $\mathfrak{A}(\zeta)$. Pour que P soit relativement minimal par rapport à \mathfrak{F} il faut et il suffit que $P(\zeta)$ soit presque partout nul ou relativement minimal par rapport à $\mathfrak{F}(\zeta)$ et ne soit pas nul presque partout.

Supposons en effet $P \neq 0$, donc $P(\zeta)$ non nul presque partout; on a [2], p. 188],

$$\alpha_P = \int^{\oplus} \alpha(\zeta)_{P(\zeta)} \cdot d\nu(\zeta),$$

$$\mathfrak{F}_P = \int^{\oplus} \mathfrak{F}(\zeta)_{P(\zeta)} \cdot d\nu(\zeta)$$

et le lemme résulte de la proposition 2.

PROPOSITION 9. — Si \mathfrak{A} est abélienne et relativement discrète par rapport à \mathfrak{F} , $\alpha(\zeta)$ est relativement discrète par rapport à $\mathfrak{F}(\zeta)$ pour presque tout ζ .

Soit P_i ($i = 1, 2, \dots$) une suite de projecteurs de \mathfrak{A} relativement minimaux, orthogonaux deux à deux et de somme I (cf. prop. 8) et soient

$$P_i = \int^{\oplus} P_i(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$$

des décompositions telles que pour tout ζ et tout i $P_i(\zeta)$ soit un projecteur de $\mathfrak{A}(\zeta)$; pour presque tout ζ les $P_i(\zeta)$ sont relativement minimaux et orthogonaux deux à deux; de plus le champ $\zeta \rightarrow \sum_i P_i(\zeta)$ est mesurable

et $\sum_i P_i(\zeta) = I$ pour presque tout ζ ; la proposition résulte alors de la proposition 8.

PROPOSITION 10. — Si \mathfrak{A} est relativement continue par rapport à \mathfrak{F} , $\alpha(\zeta)$ est relativement continue par rapport à $\mathfrak{F}(\zeta)$ pour presque tout ζ .

On peut se ramener au cas où $\mathfrak{H}(\zeta)$ est le champ constant correspondant à un espace \mathfrak{H}_0 et où il existe des applications fortement continues de Z dans la boule unité \mathcal{L}_1 de $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$, $\zeta \rightarrow T_i(\zeta)$, $\zeta \rightarrow T'_j(\zeta)$, $\zeta \rightarrow T''_k(\zeta)$ telles que pour tout ζ les opérateurs $T_i(\zeta)$ (resp. $T'_j(\zeta)$, $T''_k(\zeta)$) engendrent $\mathfrak{A}(\zeta)$ (resp. $\mathfrak{A}'(\zeta)$, $\mathfrak{F}'(\zeta)$). On peut supposer de plus que les ensembles $\{T_i(\zeta)\}$ et $\{T''_k(\zeta)\}$ sont, pour tout ζ , stables par adjonction et multiplication.

Appelons \mathcal{R}_ζ l'ensemble des propriétés suivantes relatives à un élément T de \mathcal{L}_1 :

- a. T est un projecteur;
- b. $T \cdot T'_i(\zeta) = T'_i(\zeta) \cdot T$ pour tout i ;
- c. $T_i(\zeta)_T \cdot T''_j(\zeta)_T = T''_j(\zeta)_T \cdot T_i(\zeta)_T$ pour tout i et tout j ;
- d. $T \neq 0$.

Les opérateurs $T_i(\zeta)_T$ (resp. $T'_j(\zeta)_T$, $T''_k(\zeta)_T$) engendrent $\mathcal{A}(\zeta)_T$ (resp. $\mathcal{A}'(\zeta)_T$, $\mathcal{A}''(\zeta)_T$) [2, p. 18]; par suite $\mathcal{R}_\zeta(T)$ signifie : T est un projecteur de $\mathcal{A}(\zeta)$, relativement minimal par rapport à $\mathcal{A}'(\zeta)$ (cf. prop. 2). Soit Y l'ensemble des ζ pour lesquels il existe un $T \in \mathcal{L}_1$ vérifiant \mathcal{R}_ζ . Soit \mathcal{M} l'ensemble des couples $(\zeta, T) \in Z \times \mathcal{L}_1$ tels qu'on ait $\mathcal{R}_\zeta(T)$. (a) et (b) définissent dans $Z \times \mathcal{L}_1$ des ensembles fermés; montrons qu'il en est de même de (c).

Supposons que $(\zeta_\alpha, T_\alpha) \rightarrow (\zeta, T)$ et que

$$T_i(\zeta_\alpha)_{T_\alpha} \cdot T''_j(\zeta_\alpha)_{T_\alpha} = T''_j(\zeta_\alpha)_{T_\alpha} \cdot T_i(\zeta_\alpha)_{T_\alpha}.$$

Il faut montrer que pour tout $x \in T(\mathcal{H}_0)$ on a

$$(1) \quad T \cdot T_i(\zeta) \cdot T \cdot T''_j(\zeta) \cdot x = T \cdot T''_j(\zeta) \cdot T \cdot T_i(\zeta) \cdot x.$$

Or

$$(2) \quad T_\alpha \cdot T_i(\zeta_\alpha) \cdot T_\alpha \cdot T''_j(\zeta_\alpha) \cdot T_\alpha \cdot x = T_\alpha \cdot T''_j(\zeta_\alpha) \cdot T_\alpha \cdot T_i(\zeta_\alpha) \cdot T_\alpha \cdot x$$

et $T_\alpha \cdot x \rightarrow x$; le premier et le deuxième membre de (2) convergent respectivement vers le premier et le deuxième membre de (1); d'où (1). Comme (d) définit dans $Z \times \mathcal{L}_1$ un ensemble ouvert, \mathcal{M} est borélien. D'après [2], app. V), il existe un ensemble X mesurable et contenant Y et une application mesurable $\zeta \rightarrow S(\zeta)$ de x dans \mathcal{L}_1 telle que $(\zeta, S(\zeta)) \in \mathcal{M}$ pour $\zeta \in X$.

Pour $\zeta \notin X$ posons $S(\zeta) = 0$. Le champ $\zeta \rightarrow S(\zeta)$ est mesurable et (lemme 9) $\int^\oplus S(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ est relativement minimal ou nul, donc nul; par suite Y est négligeable.

REMARQUE. — Les propositions 9 et 10 admettent des réciproques.

7. Caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes.

LEMME 1. — Soient \mathcal{H} un espace hilbertien à base dénombrable, \mathfrak{A} une algèbre de von Neumann abélienne maximale dans \mathcal{H} , \mathfrak{Y} une sous-algèbre de von Neumann de \mathfrak{A} telle que \mathfrak{Y}' soit homogène (cf. [2] p. 251) et que \mathfrak{A} soit relativement discrète (resp. continue) par rapport à \mathfrak{Y} . Il existe deux espaces hilbertiens \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , une algèbre de von Neumann \mathfrak{Y}_1 abélienne maximale dans \mathcal{H}_1 , une algèbre de von Neumann \mathfrak{Y}_2 abélienne maximale

dans \mathcal{H}_2 et relativement discrète (resp. continue) par rapport à $C_{\mathcal{H}_2}$, et un isomorphisme de \mathcal{H} sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ transformant \mathcal{Y} en $\mathcal{Y}_1 \otimes C_{\mathcal{H}_2}$ et \mathcal{Z} en $\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$.

Soit $\mathcal{H} = \int_Y^\oplus \mathcal{H}(\eta) \cdot d\mu(\eta)$ une décomposition associée à \mathcal{Y} , Y étant à base dénombrable et $\mathcal{H}(\eta)$ de dimension constante; soit $\mathcal{Z} = \int_Y^\oplus \mathcal{Z}(\eta) \cdot d\mu(\eta)$ une décomposition de \mathcal{Z} ; pour presque tout η , soit pour $\eta \in Y_0$ de complémentaire négligeable, $\mathcal{Z}(\eta)$ est abélienne maximale et relativement discrète (resp. continue) par rapport à $C_{\mathcal{H}(\eta)}$ (cf. § 6, prop. 9 et 10); les algèbres $\mathcal{Z}(\eta)$ ($\eta \in Y_0$) sont deux à deux isomorphes (ce fait est trivial dans le cas discret; dans le cas continue il résulte de [6]), donc spatialement isomorphes; par suite, si $\eta_0 \in Y_0$, il existe pour tout $\eta \in Y_0$ un isomorphisme de $\mathcal{H}(\eta_0)$ sur $\mathcal{H}(\eta)$ transformant $\mathcal{Z}(\eta_0)$ en $\mathcal{Z}(\eta)$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= L^2(Y, \mu), & \mathcal{H}_2 &= \mathcal{H}(\eta_0); \\ \mathcal{Y}_1 &= \text{algèbre des opérateurs diagonalisables dans } L^2(Y, \mu); \\ \mathcal{Y}_2 &= \mathcal{Z}(\eta_0). \end{aligned}$$

D'après ([2], p. 187, prop. 4) il existe un isomorphisme de \mathcal{H} sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ transformant \mathcal{Z} en $\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$; cet isomorphisme transforme évidemment \mathcal{Y} en $\mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$.

LEMME 2. — Soit Y_1 un espace localement compact muni d'une mesure positive μ_1 telle que $\|\mu_1\| = 1$; soient Y_2 le segment $[0, 1]$ (resp. un espace fini ou dénombrable) et μ_2 la mesure de Lebesgue (resp. la masse + 1 en chaque point), soient $Z = Y_1 \times Y_2$, $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$, \mathcal{R}_0 la relation d'équivalence sur Z définie par la première projection, Γ le groupe des classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante et conservant les ensembles $\text{pr}_1^{-1}(\eta_1)$, $\eta_1 \in Y_1$. $\hat{\mathcal{R}}_0$ est la plus fine des classes de relations d'équivalence à graphes mesurables ν -compatible avec Γ .

Il suffit de montrer que toute relation d'équivalence \mathcal{R} à graphe mesurable plus fine que \mathcal{R}_0 et ν -compatible avec Γ est ν -équivalente à \mathcal{R}_0 .

Notons $Y_1 \times Y_2 \times Y_1' \times Y_2'$ l'espace $Z \times Z$ et $(\eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2')$ l'un quelconque de ses éléments; soit \mathcal{X} la diagonale de $Y_1 \times Y_1'$. Le graphe \mathcal{G}_0 de \mathcal{R}_0 est $\mathcal{X} \times Y_2 \times Y_2'$; nous noterons (x, η_2, η_2') l'un quelconque de ses éléments; si \mathcal{G} est le graphe de \mathcal{R} , $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$.

Une bijection s de Z sur Z conservant les ensembles $\text{pr}_1^{-1}(\eta_1)$ est de la forme $(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (\eta_1', \eta_2')$, où

$$\eta_1' = \eta_1, \quad \eta_2' = \eta_2'(\eta_1, \eta_2)$$

et son graphe g_s est dans \mathcal{G}_0 . Si s laisse ν quasi invariante, la projection h_s de $\mathcal{G} \cap g_s$ sur $\mathcal{X} \times Y_2$ est de complémentaire négligeable pour la mesure $dx \cdot d\eta_2$

(dx désigne la mesure sur X qui se projette sur Y_1 suivant μ_1) car on a $\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), s(\eta_1, \eta_2))$ pour presque tout $(\eta_1, \eta_2) \in Z$.

Supposons d'abord $Y_2 = [0, 1]$ et considérons les bijections s_α .

$$\eta'_1 = \eta_1, \quad \eta'_2 = \eta_2^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

On peut définir l'élément de volume $d\nu$ dans \mathcal{G}_0 par

$$d\nu = -\eta_2^\alpha \cdot \log \eta_2 \cdot d\eta_2 \cdot dx \cdot d\alpha.$$

Alors

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{G}) &= -\int_0^\infty d\alpha \cdot \iint_{h_\alpha} \eta_2^\alpha \cdot \log \eta_2 \cdot d\eta_2 \cdot dx \\ &= -\int_0^\infty d\alpha \cdot \int_X dx \cdot \int_0^1 \eta_2^\alpha \cdot \log \eta_2 \cdot d\eta_2 = 1 \end{aligned}$$

donc \mathcal{G} est de complémentaire négligeable dans \mathcal{G}_0 .

Dans le cas où Y_2 est fini à n éléments (resp. infini dénombrable) on aboutit au même résultat en identifiant Y_2 à $\mathbf{Z}/(n)$ (resp. à \mathbf{Z}) (\mathbf{Z} désigne l'ensemble des entiers) et en considérant les bijections

$$\eta'_1 = \eta_1, \quad \eta'_2 = \eta_2 + \alpha \quad [(\bmod n) \text{ (resp. } \eta_2 + \alpha)],$$

où $\alpha \in \mathbf{Z}$.

Par suite pour presque tout $(\eta_2)_0 \in Y_2$, l'ensemble des (η_1, η_2) tels qu'on ait $\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), (\eta_1, (\eta_2)_0))$ est de complémentaire ν -négligeable; choisissons $(\eta_2)_0$ pour qu'il en soit ainsi et soit A l'ensemble des (η_1, η_2) correspondant. On a $\mathcal{R}_A = (\mathcal{R}_0)_A$, car si $(\eta_1, \eta_2) \in A$ et $(\eta_1, \eta'_2) \in A$ on a

$$\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), (\eta_1, (\eta_2)_0)) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}((\eta_1, \eta'_2), (\eta_1, (\eta_2)_0))$$

et par suite

$$\mathcal{R}((\eta_1, \eta_2), (\eta_1, \eta'_2)).$$

LEMME 3. — Soient \mathcal{A} une algèbre de von Neumann, \mathcal{Y} son centre, \mathcal{Z} une sous-algèbre abélienne maximale de \mathcal{A} . Tout projecteur P de \mathcal{Z} relativement minimal par rapport à \mathcal{Y} est relativement minimal dans \mathcal{A} par rapport à \mathcal{Y} (i. e. abélien).

Soient Q un projecteur de \mathcal{A} majoré par P et P' un projecteur de \mathcal{Z} . On a $P' = P' \cdot P + P' \cdot (I - P)$ et $P'P = PR$ avec $R \in \mathcal{Y}$ (cf. § 6, prop. 1), d'où

$$\begin{aligned} P' &= P \cdot R + P' \cdot (I - P), \\ P' \cdot Q &= PRQ = PQR = QR, \\ QP' &= QPR = QR, \end{aligned}$$

Q permute à \mathcal{Z} et par suite $Q \in \mathcal{Z}$ et son support dans \mathcal{Y} est strictement inférieur à celui de P .

LEMME 4. — Soient $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ une intégrale hilbertienne sur un espace Z localement compact à base dénombrable, $T_i = \int_Z^{\oplus} T_i(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ une suite d'opérateurs décomposables. Considérons sur Z la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par $\mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ si et seulement si il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(\zeta')$ transformant $T_i(\zeta)$ en $T_i(\zeta')$ pour tout i . Le graphe \mathcal{G} de \mathcal{R} est $\nu \otimes \nu$ -mesurable.

Soit d'abord Z'_m ($m = 1, 2, \dots, \infty$) le sous-ensemble mesurable de Z sur lequel $\dim \mathcal{H}(\zeta) = m$. On a

$$\mathcal{G} \subset \bigcup_m (Z'_m \times Z'_m)$$

et il suffit de démontrer que $\mathcal{G} \cap (Z'_m \times Z'_m)$ est mesurable pour tout m . On est donc ramené au cas d'un champ constant $\mathcal{H}(\zeta) = \mathcal{H}'$.

On considère $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ comme muni de la topologie forte et l'on note \mathcal{L}_1 sa boule unité et \mathcal{L}_u l'ensemble des unitaires. Il existe un ensemble négligeable $N \subset Z$ et une partition de $Z - N$ en parties compactes Z_n ($n = 1, 2, \dots$) telles que les restrictions des $T_i(\zeta)$ à chaque Z_n soient continues.

Considérons pour tout couple (n, n') l'espace $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_u$; nous noterons (ζ, ζ', U) l'un quelconque de ses éléments. Soit A le sous-ensemble formé des éléments qui vérifient

$$T_i(\zeta) \cdot U = U \cdot T_i(\zeta') \quad \text{pour tout } i.$$

A est fermé, car les deux membres de (1) sont des fonctions continues de (ζ, ζ', U) .

D'autre part \mathcal{L}_u est l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles Ω_i ouverts dans \mathcal{L}_1 ([2], p. 170); par suite $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_u$ est l'intersection des ensembles $Z_n \times Z_{n'} \times \Omega_i$ ouverts dans $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_1$ qui est complet et séparable. Donc A est borélien dans $Z_n \times Z_{n'} \times \mathcal{L}_1$ et sa projection sur $Z_n \times Z_{n'}$ est analytique dans $Z_n \times Z_{n'}$, donc aussi dans $Z \times Z$, donc $\nu \otimes \nu$ -mesurable; or, elle n'est autre que $\mathcal{G} \cap (Z_n \times Z_{n'})$. Comme

$$\bigcup_{n, n'} Z_n \times Z_{n'} \text{ est de complémentaire négligeable, } \mathcal{G} \text{ est mesurable.}$$

NOTATIONS. — Dans la suite \mathcal{H} désigne un espace hilbertien à base dénombrable; \mathcal{A} une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} ; \mathcal{Y} son centre; \mathfrak{Z} une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale de \mathcal{A} ; Z un espace localement compact à base dénombrable et ν une mesure positive bornée sur Z tels que \mathfrak{Z} soit isomorphe à $L^\infty(Z, \nu)$, $\hat{\mathcal{R}}_0$ la classe de relations d'équivalence mesurables sur Z associée à \mathcal{Y} (cf. § 3, prop. 3); F (resp. F') le plus grand projecteur de \mathfrak{Z} relativement discret (resp. continu) par rapport à \mathcal{Y} ; M et

M' des sous-ensembles mesurables de Z définis par F et F' et tels que $M \cap M' = \emptyset$, $M \cup M' = Z$; \mathcal{R}_1 la relation d'équivalence sur Z correspondant à la partition $Z = M \cup M'$; G le groupe des automorphismes Φ de \mathfrak{Z} pour lesquels il existe un unitaire U de \mathfrak{A} tel que

$$\Phi(T) = U \cdot T \cdot U^{-1} \quad \text{pour tout } T \in \mathfrak{Z}.$$

Γ le groupe des classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante correspondant aux éléments de G . Le groupe Γ est ν compatible avec $\hat{\mathcal{R}}_0$ (cf. § 3, prop. 4) et avec \mathcal{R}_1 (cf. § 6, prop. 7), donc avec $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$.

THÉOREME 1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathfrak{A} est discrète.
- (ii) Il existe une sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{Z} telle que tout automorphisme de \mathfrak{Z} induisant l'identité sur \mathfrak{Y} appartienne à G .
- (ii)' Pour toute sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{Z} , tout automorphisme de \mathfrak{Z} induisant l'identité sur \mathfrak{Y} appartient à G ⁽²⁾.
- (iii) Il existe une sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{Z} telle que $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ soit la plus fine des classes de relations d'équivalence à graphes $\nu \otimes \nu$ -mesurables ν -compatibles avec Γ .
- (iii)' Pour toute sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{Z} , $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ est la plus fine des classe de relations d'équivalence à graphes $\nu \otimes \nu$ -mesurables ν -compatibles avec Γ .

Les implications (ii)' \Rightarrow (ii) et (iii)' \Rightarrow (iii) sont évidentes.

(i) \Rightarrow (ii)' (démonstration valable sans hypothèses de dénombrabilité sur \mathcal{H}) ; il existe un isomorphisme Ω de \mathfrak{A} sur une algèbre de von Neumann \mathcal{B} telle que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$; $\Omega(\mathfrak{Z})$ est abélienne maximale et tout automorphisme Ψ de $\Omega(\mathfrak{Z})$ est défini par un opérateur unitaire V ([2], p. 253, prop. 3); si Ψ induit l'identité sur \mathcal{B}' , $V \in \mathcal{B}$.

(ii) \Rightarrow (iii) et (ii)' \Rightarrow (iii)', tout revient à démontrer ce qui suit : \mathfrak{Y} et \mathfrak{Z} étant définies comme précédemment, Γ étant le groupe de toutes les classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante et ν -compatibles avec $\hat{\mathcal{R}}_0$, $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ est la plus fine des classes de relations d'équivalence à graphes mesurables ν -compatibles avec Γ ; c'est-à-dire encore : toute classe de relations d'équivalence à graphes mesurables ν -compatibles avec Γ et plus fine que $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$ est égale à $\sup(\hat{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_1)$; on est ainsi ramené à étudier séparément les cas de \mathfrak{Z} relativement discrète (resp. continue) par rapport

⁽²⁾ L'idée de l'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) revient à J. DIXMIER.

à \mathcal{Y} et l'on a $\sup(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1) = \hat{\alpha}_0$. De plus, on peut supposer \mathfrak{Z} abélienne maximale dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Soit (F_i) une suite de projecteurs de \mathcal{Y} orthogonaux deux à deux, de somme I et tels que \mathcal{Y}'_{F_i} soit homogène pour tout i et soit Z_i le sous espace de Z correspondant à F_i ; il suffit de démontrer la proposition pour chaque Z_i , c'est-à-dire dans le cas où \mathcal{Y}' est homogène.

On peut alors écrire (lemme 1) $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \otimes C_{\mathcal{X}_2}$, $\mathfrak{Z} = \mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2$, \mathcal{Y}_1 et \mathcal{Y}_2 étant abéliennes maximales et \mathcal{Y}_2 relativement discrète (resp. continue) par rapport à $C_{\mathcal{X}_2}$. Soit $\mathcal{X}_1 = L^2(Y_1, \mu_1)$ une décomposition de \mathcal{X}_1 associée à Y_1 , Y_1 étant localement compact et $\|\mu_1\| = 1$; il existe une décomposition $\mathcal{X}_2 = L^2(Y_2, \mu_2)$ associée à \mathcal{Y}_2 où Y_2 est le segment $[0, 1]$ (resp. un espace dénombrable) et μ_2 la mesure de Lebesgue (resp. la masse + 1 en chaque point). On peut identifier (Z, ν) à $(Y_1 \times Y_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, $\hat{\alpha}_0$ à la classe de relations d'équivalence définie par pr_1 et Γ au groupe des classes de bijections de Z sur Z laissant ν quasi invariante et conservant chaque ensemble $\text{pr}_1^{-1}(\eta_1)$ $\eta_1 \in Y_1$; la proposition résulte alors du lemme 2.

(iii) \Rightarrow (i). Soit E le plus grand projecteur de \mathcal{Y} relativement continu dans \mathfrak{Z} par rapport à \mathcal{Y} (§ 6, prop. 5); on a $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_E \times \mathcal{Y}_{I-E}$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_E \times \mathfrak{Z}_{I-E}$, $\alpha = \alpha_E \times \alpha_{I-E}$. \mathfrak{Z}_{I-E} contient un projecteur P relativement minimal par rapport à \mathcal{Y}_{I-E} et de support $I - E$ (§ 6, prop. 6); P est aussi relativement minimal dans α_{I-E} par rapport à \mathcal{Y}_{I-E} (lemme 3) donc α_{I-E} est discrète ([2], p. 123, théorème 1). On est donc ramené au cas où \mathfrak{Z} est relativement continue par rapport à \mathcal{Y} ; alors $\hat{\alpha}_0 = \sup(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1)$.

Soient $\mathcal{X} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{X}(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ une décomposition de \mathcal{X} associé à \mathfrak{Z} , $\mathcal{X} = \int_Y^{\oplus} \mathcal{X}(\eta) \cdot d\mu(\eta)$ une décomposition de \mathcal{X} associée à \mathcal{Y} (Y étant à base dénombrable) telle que l'injection canonique de \mathcal{Y} dans \mathfrak{Z} définisse une application φ de Z sur Y et que $\mu = \varphi(\nu)$; soit $\nu = \int \nu_\eta \cdot d\mu(\eta)$ une désintégration de ν relative à φ .

D'après le paragraphe 3, proposition 2, on peut supposer de plus que $\mathcal{X}(\eta) = \int^{\oplus} \mathcal{X}(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta)$ pour tout η et il existe une décomposition $\mathfrak{Z} = \int^{\oplus} \mathfrak{Z}(\eta) \cdot d\mu(\eta)$ telle que pour tout η $\mathfrak{Z}(\eta)$ soit l'algèbre des opérateurs diagonalisables pour la décomposition de $\mathcal{X}(\eta)$. Soit

$$\alpha' = \int^{\oplus} \alpha'(\eta) \cdot d\mu(\eta)$$

une décomposition de α' telle que $\alpha'(\eta)$ soit un facteur pour tout η .

Considérons une suite $T_i = \int^\oplus T_i(\eta) \cdot d\mu(\eta) = \int^\oplus T_i(\zeta) \cdot d\nu(\zeta)$ d'élément de \mathcal{A}' telle que pour tout η la suite $(T_i(\eta))$ engendre $\mathcal{A}'(\eta)$ et que

$$T_i(\eta) = \int^\oplus T_i(\zeta) \cdot d\nu_\eta(\zeta) \quad (\S 5, \text{prop. 2}).$$

Définissons sur Z la relation d'équivalence : $\mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ si et seulement si il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(\zeta')$ transformant $T_i(\zeta)$ en $T_i(\zeta')$ pour tout i . Montrons que \mathcal{R} est ν -compatible avec Γ .

Soit s telle que \hat{s} corresponde à un élément Φ de G , et soit U un unitaire de \mathcal{A} tel que $\Phi(T) = U \cdot T \cdot U^{-1}$ pour tout $T \in \mathfrak{F}$; d'après le paragraphe 4, proposition 1 il existe un ensemble $\tilde{Z} \subset Z$ de complémentaire négligeable, stable par s et s^{-1} et un isomorphisme ψ_ζ de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(s\zeta)$ quel que soit $\zeta \in \tilde{Z}$ de façon que pour tout $x = (x(\zeta)) \in \mathcal{H}$ on ait

$$(Ux)(\zeta) = r(s^{-1}\zeta)^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi_{s^{-1}\zeta}(x(s^{-1}\zeta))$$

pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$, r est une fonction telle que

$$d\nu(s\zeta) = r(\zeta) \cdot d\nu(\zeta).$$

Pour un i donné, T_i permute à U , donc pour tout x on a, pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$,

$$T_i(s\zeta) \cdot \psi_\zeta(x(\zeta)) = \psi_\zeta(T_i(\zeta) \cdot x(\zeta)).$$

Soit $x_j = (x_j(\zeta))$ un champ mesurable de bases orthonormales; pour un i donné on a pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$

$$T_i(s\zeta) \cdot \psi_\zeta(x_j(\zeta)) = \psi_\zeta(T_i(\zeta) \cdot x_j(\zeta)) \quad \forall j.$$

Comme il s'agit d'opérateurs continus dans $\mathcal{H}(s\zeta)$, pour un i donné on a pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$

$$T_i(s\zeta) \cdot \psi_\zeta = \psi_\zeta \cdot T_i(\zeta)$$

Enfin on a pour presque tout $\zeta \in \tilde{Z}$

$$T_i(s\zeta) \cdot \psi_\zeta = \psi_\zeta \cdot T_i(\zeta) \quad \text{pour tout } i.$$

c'est-à-dire $\mathcal{R}(\zeta, s\zeta)$. Et \mathcal{R} est ν -compatible avec Γ . \mathcal{R} ayant un graphe mesurable (lemme 4), on a $\mathcal{R} \prec \mathcal{R}_0$; il existe donc un ensemble $A \subset Z$ de complémentaire négligeable tel que $\mathcal{R}_A \leq (\mathcal{R}_0)_A$. Pour presque tout $\eta \in Y$,

soit pour $\eta \in Y'$ de complémentaire μ -négligeable, $A'_\eta = A \cap \varphi^{-1}(\eta)$ est de complémentaire ν_η -négligeable dans $\varphi^{-1}(\eta)$.

D'autre part, pour presque tout $\zeta \in Z$ la suite $T_i(\zeta)$ engendre $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\zeta))$, donc pour presque tout $\eta \in Y$, soit pour $\eta \in Y''$ de complémentaire μ -négligeable, il existe un ensemble $A''_\eta \subset \varphi^{-1}(\eta)$ de complémentaire ν_η -négligeable tel que si $\zeta \in A''_\eta$ la suite $T_i(\zeta)$ engendre $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\zeta))$. Prenons

$$\eta^0 \in Y' \cap Y''$$

et

$$\zeta^0 \in A'''_{\eta^0} = A'_{\eta^0} \cap A''_{\eta^0}.$$

Réduisons $\varphi^{-1}(\eta^0)$ à A'''_{η^0} et posons

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}(\zeta^0), \quad S_i = T_i(\zeta^0).$$

Soit $U(\zeta)$ ($\zeta \in A'''_{\eta^0}$) un isomorphisme (nous savons qu'il en existe) de $\mathcal{H}(\zeta)$ sur $\mathcal{H}(\zeta^0)$ transformant $T_i(\zeta)$ en S_i pour tout i . D'après ([2], p. 173, th. 2) il existe un isomorphisme de $\mathcal{H}(\eta^0)$ sur $L^2(Z, \nu_{\eta^0}) \otimes \mathcal{H}_0$ transformant $T_i(\eta^0)$ en $I \otimes S_i$ pour tout i . Cet isomorphisme transforme $\mathcal{A}'(\eta^0)$ en $I \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ et $\mathcal{A}'(\eta^0)$ est discret; ceci étant vrai pour presque tout $\eta^0 \in Y$, \mathcal{A}' et \mathcal{A} sont discrètes.

C. Q. F. D.

En supposant que \mathcal{A} est un facteur et en se bornant au cas où \mathfrak{Z} est sans projecteurs minimaux, on obtient le

COROLLAIRE.

a. Le facteur \mathcal{A} est discret si et seulement s'il existe une sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{Z} de \mathcal{A} telle que tout automorphisme de \mathfrak{Z} soit défini par un opérateur unitaire de \mathcal{A} ; dans ce cas toute sous-algèbre abélienne maximale possède cette propriété.

b. Le facteur \mathcal{A} est discret si et seulement s'il existe une sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{Z} de \mathcal{A} telle que toute relation d'équivalence sur Z à graphe $\nu \otimes \nu$ -mesurable et ν -compatible avec Γ soit ν -équivalente à la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par « $\mathcal{R}(\zeta, \zeta')$ quels que soient ζ et ζ' »; dans ce cas toute sous-algèbre abélienne maximale sans projecteurs minimaux possède cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI (Nicolas). — Livre 6 : *Intégration*, Chap. 5 et 6. Paris, Hermann, 1956-1960 (*Act. scient. et ind.*, 1244 et 1281; Bourbaki, 21 et 25).
- [2] DIXMIER (Jacques). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Paris, Gauthier-Villars, 1957 (*Cahiers scientifiques*, 25).

- [3] DYE (H. A.). — On groups of measure preserving transformations, *Amer. J. of Math.*, t. 81, 1959, p. 119-159.
- [4] GUICHARDET (Alain). — Une caractérisation des algèbres de von Neumann de type I, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 3398-3400.
- [5] MACKEY (George W.). — Induced representations of locally compact groups, I., *Annals of Math.*, t. 55, 1952, p. 101-139.
- [6] MAHARAM (Dorothy). — On homogeneous measure algebras, *Proc. Nat Acad. Sc. U. S. A.*, t. 28, 1942, p. 108-111.
- [7] VON NEUMANN (John). — Einige Sätze über messbare Abbildungen, *Annals of Math.*, t. 33, 1932, p. 574-586.

(Manuscrit reçu le 29 juillet 1960.)

Alain GUICHARDET,
48, rue Rapatel,
Montreuil (Seine).

