BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER

Sur un théorème de Snapper

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 333-343

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__333_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 333 à 343.

SUR UN THÉORÈME DE SNAPPER

PAR

PIERRE CARTIER
(Paris).

INTRODUCTION. — Dans deux articles récents ([5] et [6]), E. SNAPPER a étudié des polynomes qui généralisent le classique polynome caractéristique de HILBERT d'une variété algébrique projective. Soient X une variété algébrique projective, irréductible et non singulière, $\mathcal{F}$ un faiscèau cohérent sur X et $D_1, \ldots, D_n$ des diviseurs sur X; alors la caractéristique d'EULER-POINCARÉ $\chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(m_1 D_1 + \ldots + m_n D_n))$ est un polynome en les entiers m_i d'après le résultat central de SNAPPER (1). Nous nous proposons de généraliser ce résultat et d'en donner une démonstration plus simple; d'autre part, nous montrerons comment toutes les identités démontrées par SNAPPER dans le second de ses articles peuvent se déduire aisément d'un formalisme analogue à celui de HIRZEBRUCH (2). On notera par ailleurs que le théorème de SNAPPER est une conséquence immédiate de la formule de RIEMANN-ROCH-HIRZEBRUCH, étendue par GROTHENDIECK au cas des variétés algébriques sur un corps quelconque [1], mais il n'est peut-être pas sans intérêt d'en avoir une démonstration élémentaire n'utilisant pas le théorème profond qu'on vient de citer.

NOTATIONS. — Ce sont en général celles de SERRE [3]. On note K le corps de base, supposé algébriquement clos. On dira faisceau pour faisceau algébrique cohérent, et faisceau de rang 1 pour faisceau localement libre de rang 1. Le signe $\ldots \mid U$ indique l'opération de restriction à U. Le *support* d'un faisceau $\mathcal{F}$ est l'ensemble fermé des points x tels que $\mathcal{F}_x \neq (0)$.

1. Un lemme sur les variétés quasi projectives. — Nous appellerons *variété quasi projective* une variété isomorphe à une sous-variété localement fermée d'un espace projectif convenable.

(1) E. SNAPPER [5], théorème 9.1.
(2) F. HIRZEBRUCH [2], paragraphe 17, p. 130-136.

Lemme 1. — *Soit X une variété quasi projective. Alors pour tout faisceau $\mathcal{L}$ de rang* 1 *sur X, il existe un faisceau $\mathcal{L}'$ de rang* 1 *sur X tel que $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ soient engendrés par leurs sections sur X.*

On peut supposer que X est une sous-variété localement fermée de l'espace projectif $\mathbf{P}_r$ de dimension r; les faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$ introduits par Serre [3] sont engendrés par leurs sections sur X; pour démontrer le lemme 1, il suffit donc de prouver que pour n assez grand, le faisceau $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ est engendré par ses sections sur X [lorsque X est fermée, ce dernier résultat est dû à Serre [4]].

Soient $t_0, \ldots, t_r$ les fonctions coordonnées sur K^{r+1}, et pour $0 \leqq i \leqq r$, soit V_i l'ensemble des points de K^{r+1} où t_i ne s'annule pas. L'ensemble U_i des points de X admettant un représentant dans V_i est ouvert dans X, et X est réunion de $U_0, \ldots, U_r$. Soit P un polynome homogène de degré m en les t_i; la fonction P/t_i^m sur V_i est invariante par homothétie, donc définit par passage au quotient une fonction régulière sur U_i, notée encore P/t_i^m; l'ensemble X_P des points de X admettant un représentant dans $K^{r+1} - \{0\}$ en lequel P ne soit pas nulle, est un ouvert de X, et $X_P \cap U_i$ est l'ensemble des points de U_i où ne s'annule pas la fonction régulière P/t_i^m. Les ouverts X_P forment une base de la topologie de X. Enfin, de la définition du faisceau $\mathcal{O}_X(m)$ par recollement, il résulte que pour $0 \leqq i \leqq r$, il y a une section $s_{i,m}$ de $\mathcal{O}_X(m)$ sur U_i telle que $(s_{i,m})_x$ soit une base du $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{O}_X(m)_x$ pour tout $x \in U_i$; de plus, pour tout polynome P homogène de degré m en les t_i, il existe une section $\iota(P)$ de $\mathcal{O}_x(m)$ sur X définie par la relation

$$\iota(P) \mid U_i = (P/t_i^m) . s_{i,m} \qquad (0 \leqq i \leqq r). \tag{1}$$

Ceci étant rappelé, soient P un polynome homogène de degré m en les t_i et s une section de $\mathcal{L}$ sur X_P. Comme le faisceau $\mathcal{L}$ est de rang 1, c'est-à-dire localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$, on peut trouver un recouvrement fini $\{V_\alpha\}$ de X par des ouverts affines, et pour chaque α une section s'_α de $\mathcal{L}$ sur V_α et une fonction régulière f_α sur $V_\alpha \cap X_P$ ayant les propriétés suivantes : on a $s = f_\alpha . s'_\alpha$ sur $V_\alpha \cap X_P$, et pour tout $x \in V_\alpha$, le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{L}_x$ admet $(s'_\alpha)_x$ pour base. On peut de plus supposer le recouvrement $\{V_\alpha\}$ plus fin que le recouvrement $\{U_i\}$; soient alors donnés un indice α et un ouvert U_i contenant V_α, de sorte que $V_\alpha \cap X_P$ est l'ensemble des points de l'ouvert affine V_α où ne s'annule pas la fonction régulière P/t_i^m. La fonction régulière f_α étant définie sur $V_\alpha \cap X_P$, on peut trouver [5] un entier m'_α et une fonction f'_α régulière sur V tels que $f'_\alpha = (P/t_i^m)^{m'_\alpha} . f_\alpha$ sur $V_\alpha \cap X_P$; alors la section $s \otimes \iota(P^{m'_\alpha}) = (P/t_i^m)^{m'_\alpha} . f_\alpha (s'_\alpha \otimes s_{i,mm'_\alpha})$ de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(mm'_\alpha)$ sur $V_\alpha \cap X_P$ se prolonge en une section t_α de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(mm'_\alpha)$ sur V_α. Comme les indices α sont

(3) J.-P. Serre [3], nos 54 et 55.
(4) Dans *loc. cit.* en (3), théorème du no 55.
(5) Dans *loc. cit.* en (3), lemme 1 du no 55.

en nombre fini et que $\iota(P^n)$ est une section de $\mathcal{O}_X(mn)$ sur X pour tout entier $n \geqq 0$, on peut supposer les m'_α égaux à un même entier m' ; on aura alors $t_\alpha - t_\beta = 0$ sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \cap X_P$, mais comme le faisceau $\mathcal{L}(mm')$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$ sur $V_\alpha \cap V_\beta$ et que $(V_\alpha \cap V_\beta) \cap X_P$ est l'ensemble des points de $V_\alpha \cap V_\beta$ où ne s'annule pas la fonction P/t_i^m, on voit immédiatement qu'on a $(t_\alpha - t_\beta) \otimes \iota(P) = 0$ sur $V_\alpha \cap V_\beta$. Il existe donc une section t de $\mathcal{L}(mm') \otimes \mathcal{O}_X(m) = \mathcal{L}(m.(m'+1))$ sur X telle que $t = t_\alpha \otimes \iota(P)$ sur V_α, d'où $t = s \otimes \iota(P^{m'+1})$ sur $V_\alpha \cap X_P$ pour tout α. Comme les V_α recouvrent X, on a donc prouvé que pour toute section s de $\mathcal{L}$ sur X_P, il existe un entier $m''(= m'+1)$ tel que la section $s \otimes \iota(P^{m''})$ de $\mathcal{L}(m.m'')$ sur X_P se prolonge en une section de $\mathcal{L}(m.m'')$sur X.

Soient alors x un point de X et u une base du $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{L}_x$; comme les ouverts X_P forment une base de la topologie de X, on peut trouver un polynome homogène P en les t_i tel que $x \in X_P$ et une section s de $\mathcal{L}$ sur X_P telle que $(s)_x = u$. Comme $x \in X_P$, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X(m)_x$ (où m est le degré, de P) admet $\iota(P)_x$ pour base ; or d'après ce qui précède, il existe un entier m' tel que la section $s \otimes \iota(P^{m'})$ de $\mathcal{L}(m.m')$ sur X_P se prolonge en une section de $\mathcal{L}(mm')$ sur X. Il en résulte que pour tout $x \in X$, on peut trouver un entier m_x et une section s_x de $\mathcal{L}(m_x)$ sur X engendrant le faisceau $\mathcal{L}(m_x)$ au point x, donc en tout point d'un voisinage U_x de x. Comme X est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts $U_{x_1}, \ldots, U_{x_p}$, et si l'on pose $n = \sup(m_{x_1}, \ldots, m_{x_p})$, le faisceau $\mathcal{L}(n)$ est engendré par ses sections sur X. C. Q. F. D.

2. **Faisceau associé à un diviseur.** — *Soit X une variété irréductible et non singulière de dimension r.* On note F le corps des fonctions rationnelles sur X, et $\mathfrak{P}$ l'ensemble des sous-variétés irréductibles de dimension $r-1$ de X. Le groupe abélien libre $\mathbf{Z}^{(\mathfrak{P})}$ de base $\mathfrak{P}$, muni de la relation d'ordre naturelle, est un groupe abélien réticulé, dont les éléments sont appelés *diviseurs*. On dira qu'un diviseur $D = \sum_Y n_Y . Y$ est positif (resp. nul) sur une partie A de X si l'on a $n_Y \geqq 0$ (resp. $n_Y = 0$) pour tout $Y \in \mathfrak{P}$ tel que $Y \cap A \neq \emptyset$. De plus, à toute fonction $f \in F$ non nulle est associé un diviseur (f) ; si $f, f' \in F$ sont non nulles, on a $(f.f') = (f) + (f')$; pour que le diviseur (f) soit positif sur une partie A de X, il faut et il suffit que f soit régulière en tout point de A ; enfin, la traduction géométrique du fait que l'anneau local d'un point sur une variété non singulière est factoriel, est que pour tout diviseur D et tout point x de X, on peut trouver une fonction $f \in F$ non nulle telle que $D + (f)$ soit nul en x.

Si un diviseur $D = \Sigma n_Y . Y$ est nul en un point $x \in X$, il est nul en tous les points d'un voisinage de x puisque tout $Y \in \mathfrak{P}$ est fermé et qu'un nombre fini de n_Y seulement sont non nuls. D'après la remarque précédente, on peut donc trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X et pour chaque i une fonction non nulle $f_i \in F$ telle que $D+(f_i)$ soit nul dans U_i; il en résulte que le diviseur $(f_i)-(f_j)=(f_i/f_j)$ est nul dans $U_i \cap U_j$, c'est-à-dire que f_i/f_j est régulière dans $U_i \cap U_j$; et l'on peut choisir le recouvrement $\{U_i\}$ plus fin qu'un recouvrement ouvert donné. Réciproquement, soient $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert fini de X; et pour tout i, soit f_i une fonction rationnelle non nulle sur X; on suppose que f_i/f_j est régulière sur $U_i \cap U_j$. Alors, le diviseur (f_i/f_j) est positif sur $U_i \cap U_j$; échangeant i et j, on voit que (f_i/f_j) est négatif sur $U_i \cap U_j$, donc nul sur $U_i \cap U_j$; par suite, si $Y \in \mathfrak{P}$ rencontre U_i et U_j, donc $U_i \cap U_j$, le coefficient de Y dans les diviseurs (f_i) et (f_j) est le même, et comme le nombre des indices i est fini, on peut définir un diviseur D par la condition que $Y \in \mathfrak{P}$ a même coefficient dans D et dans $-(f_i)$ si Y rencontre U_i; et alors $D+(f_i)$ est nul dans U_i.

Soit D un diviseur sur X. On note $\mathcal{L}(D)$ l'ensemble des couples (x, f) avec $x \in X$ et $f \in F$ tels que $f=0$ ou $D+(f)$ soit positif en x. Si D est associé à une famille (U_i, f_i) comme plus haut, pour $x \in U_i$, le diviseur $D+(f_i)$ est nul en x, et par suite $(x, f) \in \mathcal{L}(D)$ équivaut à « $f=0$ ou $(f)-(f_i)$ est positif en x », soit à « $f \in f_i.\mathcal{O}_x$ ». Il en résulte que $\mathcal{L}(D)$ est un sous-faisceau du faisceau constant de $\mathcal{O}_X$-modules $X \times F$ et qu'on a

$$\mathcal{L}(D) \mid U_i = f_i.\mathcal{O}_X \mid U_i.$$

LEMME 2. — *Soient D et D' deux diviseurs sur X. Alors les faisceaux $\mathcal{L}(D+D')$ et $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(D')$ sont isomorphes.*

On peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X et des fonctions non nulles f_i et f'_i de F telles que $D+(f_i)$ et $D'+(f'_i)$ soient nuls sur U_i pour tout i. Soit α l'application de $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(D')$ dans $\mathcal{L}(D+D')$ qui pour chaque $x \in X$, se réduit à l'application $\mathcal{O}_x$-linéaire α_x de $\mathcal{L}(D)_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{L}(D')_x$ dans $\mathcal{L}(D+D')_x$ définie par $\alpha_x(f \otimes f') = f.f'$. Mais le diviseur

$$(D+D')+(f_i.f'_i)$$

est nul sur U_i, et l'on a donc $\mathcal{L}(D+D') \mid U_i = f.f'_i.\mathcal{O}_X \mid U_i$; comme on a par ailleurs $\mathcal{L}(D) \mid U_i = f_i.\mathcal{O}_X \mid U_i$ et $\mathcal{L}(D') \mid U_i = f'_i.\mathcal{O}_X \mid U_i$, on voit que pour chaque i, α induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(D')$ sur $\mathcal{L}(D+D')$ au-dessus de U_i, et comme X est réunion des U_i, α est l'isomorphisme cherché. C. Q. F. D.

Pour tout diviseur D, on a vu avant le lemme 2 que le faisceau $\mathcal{L}(D)$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Réciproquement, on a le résultat suivant.

LEMME 3. — *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1 sur X. Pour tout $x \in X$, il existe un diviseur D nul en x et un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}(D)$.*

Comme le faisceau $\mathcal{L}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X, et pour tout i une section s_i de $\mathcal{L}$ sur

U_i telle que $(s_i)_y$ soit une base du $\mathcal{O}_y$-module $\mathcal{L}_y$ pour tout $y \in U_i$; de plus, il existe quels que soient i et j une fonction f_{ij} régulière sur $U_i \cap U_j$ telle que $s_i = f_{ij} . s_j$ sur $U_i \cap U_j$. On peut supposer les U_i non vides, et comme X est irréductible, il en résulte que les ouverts $U_i \cap U_j \cap U_k$ sont non vides ; alors l'égalité $f_{ij} . f_{jk} = f_{ik}$ a lieu sur $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, donc reste valable comme identité dans le corps F des fonctions rationnelles sur X. Soit o un indice tel que $x \in U_0$; on a $f_{io} = f_{ij} . f_{jo}$, ce qui prouve que f_{io}/f_{jo} est régulière sur $U_i \cap U_j$. Il existe par suite un diviseur D sur X tel que $D + (f_{io})$ soit nul sur U_i; et comme $f_{oo} = 1$, on voit que D est nul en $x \in U_o$; de plus, on a $\mathcal{L}(D) \mid U_i = f_{io} . \mathcal{O}_X \mid U_i$ pour tout i, et l'on peut donc trouver des isomorphismes $\alpha_i : \mathcal{L} \mid U_i \to \mathcal{L}(D) \mid U_i$ déterminés par la condition de transformer s_i en la section constante f_{io} de $\mathcal{L}(D)$ sur U_i. Les relations $s_i = f_{ij} . s_j$ et $f_{io} = f_{ij} . f_{jo}$ sur $U_i \cap U_j$ montrent immédiatement que α_i et α_j coïncident sur $U_i \cap U_j$; par suite, il existe un isomorphisme α de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}(D)$ dont la restriction à U_i soit α_i pour tout i. C. Q. F. D.

3. **Fonctions additives de faisceaux.** — *Soit X une variété.* On appelle fonction additive de faisceaux sur X une application λ qui, à tout faisceau $\mathcal{F}$ sur X, fait correspondre un élément $\lambda(\mathcal{F})$ d'un groupe abélien G, de sorte que, pour toute suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}' \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \to 0 \tag{2}$$

de faisceaux sur X, on ait

$$\lambda(\mathcal{F}') = \lambda(\mathcal{F}) + \lambda(\mathcal{F}''). \tag{3}$$

Par exemple, si X est complète, on sait [6] que les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie sur le corps K, et nuls pour $i > \dim X$; la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$ est bien définie, et la suite exacte de cohomologie montre que χ est une fonction additive de faisceaux.

Un autre exemple est le suivant : soient $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1 sur X, et λ une fonction additive de faisceaux, et posons $\lambda'(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$; alors, comme le faisceau $\mathcal{L}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$, le $\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{L}_x$ est libre pour tout $x \in X$, et par suite, pour toute suite exacte (2), la suite correspondante obtenue en prenant le produit tensoriel avec $\mathcal{L}$ est exacte. Ceci montre immédiatement que λ' est une fonction additive de faisceaux.

THÉORÈME. — *Soit X une variété. On suppose que X est, soit quasi projective, soit irréductible et non singulière. Soient de plus $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1*

(6) Ce résultat est dû à GROTHENDIECK; *cf.* par exemple : Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents, *Séminaire Cartan*, t. 9, 1956-1957 : Quelques questions de topologie, exposé n° 2.

sur X et λ une fonction additive de faisceaux. Si λ est nulle pour tout faisceau dont le support est de dimension $< r$, alors on a

$$\lambda(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) \tag{4}$$

pour tout faisceau $\mathcal{F}$ dont le support est de dimension $\leqq r$.

Soient S un fermé de X et $\mathcal{G}$ un faisceau nul en dehors de S, de sorte que $\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}$ est nul en dehors de S. Si S est de dimension $< r$, il résulte de l'hypothèse faite sur λ qu'on a $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}) = 0$.

Supposons maintenant S irréductible de dimension $\leqq r$ et soit x un point de S. Soit de plus $\mathcal{M}$ un faisceau de rang 1 sur X; nous supposerons, soit que X est quasi projective et que $\mathcal{M}$ est engendré par ses sections sur X, soit que X est irréductible et non singulière, et que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(D)$ où D est un diviseur positif, nul en x. Dans le second cas, comme D est positif, l'élément 1 de F est une section de $\mathcal{L}(D)$ sur x, et comme D est nul en x, on a $\mathcal{L}(D)_x = \mathcal{O}_x$; dans les deux cas, on voit qu'il existe une section s de $\mathcal{M}$ sur X telle que $(s)_x$ soit une base de $\mathcal{M}_x$ sur $\mathcal{O}_x$. On définit alors un homomorphisme α de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{M}$ en posant $\alpha(u) = u \otimes (s)_y$ pour $y \in X$ et $u \in \mathcal{G}_y$, et comme $(s)_x$ est une base de $\mathcal{M}_x$ sur $\mathcal{O}_x$, on voit que α induit un isomorphisme de $\mathcal{G}_x$ sur $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{M})_x$. Soient alors $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ respectivement le noyau et le conoyau de α, et soit T la réunion des supports de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$; vu ce qui précède, on a $x \notin T$, mais comme $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \otimes \mathcal{M}$ sont nuls en dehors de S, on a $T \subset S$, donc T est un fermé propre de S, d'où $\dim T < \dim S \leqq r$ puisque S est irréductible. Il résulte alors de l'hypothèse faite sur λ que $\lambda(\mathcal{N}) = \lambda(\mathcal{C}) = 0$, et la suite exacte

$$0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{C} \to 0 \tag{5}$$

démontre l'égalité $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{M})$ puisque λ est additive.

Si X est quasi projective, on peut d'après le lemme 1 trouver un faisceau de rang 1, soit $\mathcal{L}'$, tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}'$ soient engendrés par leurs sections; si X est irréductible et non singulière on peut trouver un diviseur D nul en x tel que $\mathcal{L}$ soit isomorphe à $\mathcal{L}(D)$ (lemme 3); mais on peut trouver deux diviseurs positifs D' et D'' nuls en x tels que $D = D'' - D'$; si l'on pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(D')$, alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ sera isomorphe à $\mathcal{L}(D'')$ d'après le lemme 2. Dans les deux cas, on peut appliquer le résultat de l'alinéa précédent aux couples $(\mathcal{G}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')$ et $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ d'où

$$\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \quad \text{et} \quad \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}),$$

et finalement $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L})$.

Soient maintenant S' le support de $\mathcal{F}$, S'_i les composantes irréductibles de S', et T' la réunion des fermés $S'_i \cap S'_j$; alors, comme S' est de dimension $\leqq r$ par hypothèse, on a $\dim S'_i \leqq r$ et $\dim T' < r$. Par ailleurs il existe [7]

[7] J. P. Serre [4], bas de la page 11.

un faisceau $\mathcal{G}$ nul en dehors de T' et des faisceaux $\mathcal{G}_i$ nuls en dehors de S'_i et une suite exacte

$$(6) \qquad 0 \to \mathcal{G} \to \sum_i \mathcal{G}_i \to \mathcal{F} \to 0.$$

On a donc $\lambda(\mathcal{F}) = \sum_i \lambda(\mathcal{G}_i) - \lambda(\mathcal{G})$, et d'après la remarque précédant l'énoncé du théorème, on a

$$\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) = \sum_i \lambda(\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{L}) - \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L});$$

mais comme T' est de dimension $< r$ et que $\mathcal{G}$ est nul en dehors de T', on a $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}) = 0$; comme S'_i est irréductible et que $\mathcal{G}_i$ est nul en dehors de S'_i, on a $\lambda(\mathcal{G}_i) = \lambda(\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{L})$ d'après la première partie de la démonstration. Finalement, l'égalité (4) est une conséquence immédiate des égalités précédentes.

4. Invariants numériques. — *Soient X une variété, qui est soit quasi projective, soit irréductible et non singulière, et λ une fonction additive de faisceaux sur X.*

Pour tout entier $n > 0$, nous désignerons par A_n l'anneau des polynomes à coefficients entiers en des variables $X_1, \ldots, X_n$ et leurs inverses; nous noterons I_n l'idéal de A_n engendré par les polynomes $1 - X_i$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire le noyau de l'homomorphisme de A_n dans l'anneau des entiers qui applique chaque X_i sur 1; enfin nous noterons I_n^m la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'idéal I_n de A_n.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de rang 1 sur X; nous poserons $\mathcal{L}^0 = \mathcal{O}_X$, et nous noterons $\mathcal{L}^{-1}$ le faisceau des germes d'homomorphismes de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{O}_X$; enfin pour tout entier $m > 0$, nous noterons $\mathcal{L}^m$ le produit tensoriel de m faisceaux égaux à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{-m}$ le produit tensoriel de m faisceaux égaux à $\mathcal{L}^{-1}$. Alors, pour tout entier m, le faisceau $\mathcal{L}^m$ est de rang 1, et les faisceaux $\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{L}^{m'}$ et $\mathcal{L}^{m+m'}$ sont isomorphes quels que soient les entiers m et m', ce qui justifie la notation.

Si $P = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a(i_1, \ldots, i_n) X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$ est un élément de A_n, si $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ sont des faisceaux de rang 1 sur X, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X, nous poserons par convention :

$$(7) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes P(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a(i_1, \ldots, i_n) \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_n^{i_n}).$$

Il résulte de cette définition les formules

$$(8)\qquad \lambda(\mathcal{F}\otimes(P+P')(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)) = \lambda(\mathcal{F}\otimes P(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)) + \lambda(\mathcal{F}\otimes P'(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n))$$

$$(9)\quad \lambda(\mathcal{F}\otimes(PQ)(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)) = \lambda(\{\mathcal{F}\otimes Q(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)\}\otimes P(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n))$$

si P et P' sont dans A_n et si Q est un monôme. De plus, comme tout faisceau dont le support est de dimension < 0 est nul, on déduit par récurrence sur m la formule suivante du théorème du n° **3** :

$$(10)\qquad \lambda(\mathcal{F}\otimes\{(1-\mathcal{L}_1)\ldots(1-\mathcal{L}_{m+1})\}) = 0$$

lorsque le support de $\mathcal{F}$ est de dimension $\leqq m$, et que les $\mathcal{L}_i$ sont de rang 1. Les formules (8), (9) et (10) montrent alors immédiatement que $\lambda(\mathcal{F}\otimes P(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n))$ *ne dépend que de la classe de* P *modulo l'idéal* I_n^{m+1} *lorsque le support de* $\mathcal{F}$ *est de dimension* $\leqq m$.

Avec ces notations, nous pouvons facilement démontrer toutes les identités de Snapper. Nous donnerons encore une définition :

$$(11)\quad p_a(\mathcal{L}_1^{[m_1]}, \ldots, \mathcal{L}_n^{[m_n]}; \mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F}\otimes\{(1-\mathcal{L}_1^{-1})^{m_1}\ldots(1-\mathcal{L}_n^{-1})^{m_n}\})$$

pour des entiers $m_i \geqq 0$, ce qui est nul lorsque $m_1+\ldots+m_n$ est strictement plus grand que la dimension du support de $\mathcal{F}$.

Soit s la dimension du support de $\mathcal{F}$; alors d'après la congruence

$$(12)\qquad (1-X_1)^i \equiv \sum_{i\leqq j\leqq s} (-1)^i \binom{j-1}{i-1} (1-X_1^{-1})^j \qquad (\mathrm{mod}\, I_1^{s+1}),$$

on a la formule

$$(13)\qquad p_a((\mathcal{L}^{-1})^{[i]}; \mathcal{F}) = \sum_{i\leqq j\leqq s} (-1)^i \binom{j-1}{i-1} p_a(\mathcal{L}^{[j]}; \mathcal{F}),$$

où l'on définit les coefficients binomiaux $\binom{m}{i}$ pour $i \geqq 0$ et m de signe quelconque par $\binom{m}{i} = m(m-1)\ldots(m-i+1)/1.2\ldots i$ pour $i > 0$ et $\binom{m}{0} = 1$. D'autre part, en explicitant la définition (11) au moyen de la formule du binôme, on obtient

$$(14)\quad p_a(\mathcal{L}_1^{[m_1]}, \ldots, \mathcal{L}_n^{[m_n]}; \mathcal{F}) = \sum (-1)^{i_1+\ldots+i_n} \binom{m_1}{i_1}\cdots\binom{m_n}{i_n} \lambda(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}_1^{-i_1}\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}_n^{-i_n}),$$

où la sommation est étendue aux systèmes d'entiers $(i_1, \ldots, i_n)$ tels que $0 \leqq i_\alpha \leqq m_\alpha$ pour $1 \leqq \alpha \leqq n$. D'après la formule (14), les valeurs de la fonction p_a s'expriment au moyen des valeurs de la fonction λ; réciproquement, nous allons exprimer la fonction λ au moyen de la fonction p_a. En effet, d'après la formule du binome, on a la congruence

$$(15) \qquad X_1^m = \sum_{0 \leqq i \leqq s} \binom{m+i-1}{i-1} (1 - X_1^{-1})^i \qquad (\mathrm{mod}\, I_1^{s+1})$$

dans l'anneau A_1; remplaçant successivement X_1 par chacun des X_i, et multipliant membre à membre les congruences ainsi obtenues dans A_n modulo I_n^{s+1}, on obtient alors l'égalité

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{m_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_n^{m_n}) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_n \geqq 0} p_a(\mathcal{L}_1^{[i_1]}, \ldots, \mathcal{L}_n^{[i_n]}; \mathcal{F}) \binom{m_1+i_1-1}{i_1-1} \cdots \binom{m_n+i_n-1}{i_n-1} \end{aligned}$$

puisque $\lambda(\mathcal{F} \otimes P(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n))$ ne dépend que de la classe de P modulo I_n^{s+1}. On a vu que les coefficients $p_a(\mathcal{L}_1^{[i_1]}, \ldots, \mathcal{L}_n^{[i_n]}; \mathcal{F})$ sont nuls lorsque $i_1 + \ldots + i_n > s$; il résulte donc de la formule (16) que $\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{m_1} \ldots \otimes \mathcal{L}_n^{m_n})$ est un polynome de degré $\leqq s$ en les entiers $m_1, \ldots, m_n$ (en un sens évident si λ prend ses valeurs dans un groupe abélien G arbitraire); en particulier, si X est irréductible et non singulière, si l'on pose $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(D_i)$, le lemme 2 montre que *$\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(m_1 D_1 + \ldots + m_n D_n))$ est un polynome en les entiers m_i quels que soient les diviseurs D_i.*

Pour un entier $m \geqq 0$, on peut développer $X_1^{-m} = (1 - (1 - X_1^{-1}))^m$ par la formule usuelle du binôme; remplaçant successivement X_1 par $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$, et faisant le produit des identités obtenues, on trouve alors

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{-m_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_n^{-m_n}) \\ &= \sum (-1)^{i_1+\ldots+i_n} \binom{m_1}{i_1} \cdots \binom{m_n}{i_n} p_a(\mathcal{L}_1^{[i_1]}, \ldots, \mathcal{L}_n^{[i_n]}; \mathcal{F}) \end{aligned}$$

avec la même règle de sommation que dans (14).

Nous omettrons les entiers m_i dans la notation de p_a lorsqu'ils seront tous égaux à 1. Alors, si dans l'identité

$$(18) \qquad (1 - XY) = (1 - X) + (1 - Y) - (1 - X)(1 - Y)$$

on remplace X par $\mathcal{L}_n'^{-1}$ et Y par $\mathcal{L}_n''^{-1}$, on obtient la relation

$$(19) \qquad \begin{aligned} &p_a(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n; \mathcal{F}) \\ &\quad = p_a(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n'; \mathcal{F}) + p_a(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n''; \mathcal{F}) \\ &\quad - p_a(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n', \mathcal{L}_n''; \mathcal{F}) \end{aligned}$$

lorsque $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}''_n$. Nous ferons deux remarques sur cette formule; tout d'abord, on peut omettre le dernier terme lorsque $n = s$; de plus on notera que p_a est symétrique en les arguments $\mathcal{L}_i$.

Pour terminer, donnons quelques applications du théorème de dualité de SERRE [8]. On supposera X projective et non singulière de dimension r, on posera $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ et $\lambda = \chi$, et l'on omettra $\mathcal{O}_X$ dans les notations. Il existe alors un faisceau $\mathcal{K}$ de rang 1, jouant le rôle de la classe canonique, et tel que les espaces vectoriels $H^i(X, \mathcal{L})$ et $H^{r-i}(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{K})$ aient même dimension pour $0 \leqq i \leqq r$; on en déduit $\chi(\mathcal{L}) = (-1)^r \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{K})$; par linéarité, on en déduit : $\chi(P(\mathcal{L})) = (-1)^r \chi(\mathcal{K} \otimes P(\mathcal{L}^{-1}))$ pour tout polynôme $P \in A_1$. Remplaçant P par le polynome $(1 - X_1)^i$, et substituant $\mathcal{K}$ à X_1 dans la congruence

$$X_1 = \sum_{0 \leqq j \leqq s} (1 - X_1^{-1})^j \qquad (\mathrm{mod}\, I_1^{s+1}), \tag{20}$$

on en déduit alors immédiatement la formule

$$p_a((\mathcal{L}^{-1})^{[i]}) = (-1)^r \sum_{0 \leqq j \leqq r-i} p_a(\mathcal{L}^{[i]}, \mathcal{K}^{[j]}). \tag{21}$$

Enfin, faisant $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ dans les formules (13) et (21), on démontre immédiatement la relation suivante entre les nombres $p_a(\mathcal{K}^{[j]})$:

$$\sum_{1 \leqq j \leqq r} \left\{ (-1)^{r+1} \binom{j-1}{i-1} - 1 \right\} p_a(\mathcal{K}^{[j]}) = 0 \tag{22}$$

pour $r \geqq 3$ et $2 \leqq i \leqq r - 1$.

5. **Remarques finales.** — D'après la formule (16), notre définition de la fonction p_a est identique à celle de SNAPPER lorsque $\lambda = \chi$. Nos formules (13), (14), (16), (17), (21) et (22) correspondent respectivement aux théorème **5.1**, corollaire **3.2**, théorème **3.1**, théorème **3.2**, théorème **6.1** et théorème **6.2** de SNAPPER [6], tandis que la formule (19) lorsque $n = s$ redémontre le lemme **4.1** de SNAPPER. Nous renvoyons à l'article de SNAPPER [6] pour l'explicitation d'un certain nombre de cas particuliers, et pour la justification géométrique des définitions des invariants p_a.

---

(8) O. ZARISKI [7], p. 136-140.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). — Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. math. Fr.* t. 86, 1958, p. 97-136.

[2] HIRZEBRUCH (F.). — *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Berlin, Springer-Verlag, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik*, 9).

[3] SERRE (J.-P.). — Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[4] SERRE (J.-P.). — Sur la cohomologie des variétés algébriques, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 36, 1957, p. 1-16.

[5] SNAPPER (E.). — Multiples of divisors, *J. of Math. and Mech.*, t. 8, 1959, p. 967-992.

[6] SNAPPER (E.). — Polynomials associated with divisors, *J. of Math. and Mech.*, t. 9, 1960, p. 123-129.

[7] ZARISKI (O.). — Algebraic sheaf theory, Scientific report on the Second summer Institute : Several complex variables [1954, Boulder (Col.)], Part III., *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 62, 1956, p. 117-141.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1960.)

Pierre CARTIER,
Chargé de Recherches au C.N.R.S.,
57, La Résidence,
Orsay (Seine-et-Oise).