

BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER

Sur un théorème de Snapper

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 333-343

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__333_0

© Bulletin de la S. M. F., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME DE SNAPPER

PAR

PIERRE CARTIER

(Paris).

INTRODUCTION. — Dans deux articles récents ([5] et [6]), E. SNAPPER a étudié des polynômes qui généralisent le classique polynôme caractéristique de HILBERT d'une variété algébrique projective. Soient X une variété algébrique projective, irréductible et non singulière, \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X et D_1, \dots, D_n des diviseurs sur X ; alors la caractéristique d'EULER-POINCARÉ $\chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(m_1 D_1 + \dots + m_n D_n))$ est un polynôme en les entiers m_i d'après le résultat central de SNAPPER ⁽¹⁾. Nous nous proposons de généraliser ce résultat et d'en donner une démonstration plus simple; d'autre part, nous montrerons comment toutes les identités démontrées par SNAPPER dans le second de ses articles peuvent se déduire aisément d'un formalisme analogue à celui de HIRZEBRUCH ⁽²⁾. On notera par ailleurs que le théorème de SNAPPER est une conséquence immédiate de la formule de RIEMANN-ROCH-HIRZEBRUCH, étendue par GROTHENDIECK au cas des variétés algébriques sur un corps quelconque [1], mais il n'est peut-être pas sans intérêt d'en avoir une démonstration élémentaire n'utilisant pas le théorème profond qu'on vient de citer.

NOTATIONS. — Ce sont en général celles de SERRE [3]. On note K le corps de base, supposé algébriquement clos. On dira faisceau pour faisceau algébrique cohérent, et faisceau de rang 1 pour faisceau localement libre de rang 1. Le signe $\dots|U$ indique l'opération de restriction à U . Le *support* d'un faisceau \mathcal{F} est l'ensemble fermé des points x tels que $\mathcal{F}_x \neq (0)$.

1. Un lemme sur les variétés quasi projectives. — Nous appellerons *variété quasi projective* une variété isomorphe à une sous-variété localement fermée d'un espace projectif convenable.

⁽¹⁾ E. SNAPPER [5], théorème 9.1.

⁽²⁾ F. HIRZEBRUCH [2], paragraphe 17, p. 130-136.

LEMME 1. — Soit X une variété quasi projective. Alors pour tout faisceau \mathcal{L} de rang 1 sur X , il existe un faisceau \mathcal{L}' de rang 1 sur X tel que \mathcal{L}' et $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ soient engendrés par leurs sections sur X .

On peut supposer que X est une sous-variété localement fermée de l'espace projectif \mathbf{P}_r de dimension r ; les faisceaux $\mathcal{O}_X(n)$ introduits par SERRE ⁽³⁾ sont engendrés par leurs sections sur X ; pour démontrer le lemme 1, il suffit donc de prouver que pour n assez grand, le faisceau $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(n)$ est engendré par ses sections sur X [lorsque X est fermée, ce dernier résultat est dû à SERRE ⁽⁴⁾].

Soient t_0, \dots, t_r les fonctions coordonnées sur K^{r+1} , et pour $0 \leq i \leq r$, soit V_i l'ensemble des points de K^{r+1} où t_i ne s'annule pas. L'ensemble U_i des points de X admettant un représentant dans V_i est ouvert dans X , et X est réunion de U_0, \dots, U_r . Soit P un polynôme homogène de degré m en les t_i ; la fonction P/t_i^m sur V_i est invariante par homothétie, donc définit par passage au quotient une fonction régulière sur U_i , notée encore P/t_i^m ; l'ensemble X_P des points de X admettant un représentant dans $K^{r+1} - \{0\}$ en lequel P ne soit pas nulle, est un ouvert de X , et $X_P \cap U_i$ est l'ensemble des points de U_i où ne s'annule pas la fonction régulière P/t_i^m . Les ouverts X_P forment une base de la topologie de X . Enfin, de la définition du faisceau $\mathcal{O}_X(m)$ par recollement, il résulte que pour $0 \leq i \leq r$, il y a une section $s_{i,m}$ de $\mathcal{O}_X(m)$ sur U_i telle que $(s_{i,m})_x$ soit une base du \mathcal{O}_x -module $\mathcal{O}_X(m)_x$ pour tout $x \in U_i$; de plus, pour tout polynôme P homogène de degré m en les t_i , il existe une section $\iota(P)$ de $\mathcal{O}_X(m)$ sur X définie par la relation

$$(1) \quad \iota(P) | U_i = (P/t_i^m) \cdot s_{i,m} \quad (0 \leq i \leq r).$$

Ceci étant rappelé, soient P un polynôme homogène de degré m en les t_i et s une section de \mathcal{L} sur X_P . Comme le faisceau \mathcal{L} est de rang 1, c'est-à-dire localement isomorphe à \mathcal{O}_X , on peut trouver un recouvrement fini $\{V_\alpha\}$ de X par des ouverts affines, et pour chaque α une section s'_α de \mathcal{L} sur V_α et une fonction régulière f_α sur $V_\alpha \cap X_P$ ayant les propriétés suivantes : on a $s = f_\alpha \cdot s'_\alpha$ sur $V_\alpha \cap X_P$, et pour tout $x \in V_\alpha$, le \mathcal{O}_x -module \mathcal{L}_x admet $(s'_\alpha)_x$ pour base. On peut de plus supposer le recouvrement $\{V_\alpha\}$ plus fin que le recouvrement $\{U_i\}$; soient alors donnés un indice α et un ouvert U_i contenant V_α , de sorte que $V_\alpha \cap X_P$ est l'ensemble des points de l'ouvert affine V_α où ne s'annule pas la fonction régulière P/t_i^m . La fonction régulière f_α étant définie sur $V_\alpha \cap X_P$, on peut trouver ⁽⁵⁾ un entier m'_α et une fonction f'_α régulière sur V tels que $f'_\alpha = (P/t_i^m)^{m'_\alpha} \cdot f_\alpha$ sur $V_\alpha \cap X_P$; alors la section $s \otimes \iota(P^{m'_\alpha}) = (P/t_i^m)^{m'_\alpha} \cdot f_\alpha (s'_\alpha \otimes s_{i,mm'_\alpha})$ de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(mm'_\alpha)$ sur $V_\alpha \cap X_P$ se prolonge en une section t_α de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(mm'_\alpha)$ sur V_α . Comme les indices α sont

⁽³⁾ J.-P. SERRE [3], nos 54 et 55.

⁽⁴⁾ Dans *loc. cit.* en ⁽³⁾, théorème du n° 55.

⁽⁵⁾ Dans *loc. cit.* en ⁽³⁾, lemme 1 du n° 55.

en nombre fini et que $\iota(P^n)$ est une section de $\mathcal{O}_X(mn)$ sur X pour tout entier $n \geq 0$, on peut supposer les m'_α égaux à un même entier m' ; on aura alors $t_\alpha - t_\beta = 0$ sur $(V_\alpha \cap V_\beta) \cap X_P$, mais comme le faisceau $\mathcal{L}(mm')$ est isomorphe à \mathcal{O}_X sur $V_\alpha \cap V_\beta$ et que $(V_\alpha \cap V_\beta) \cap X_P$ est l'ensemble des points de $V_\alpha \cap V_\beta$ où ne s'annule pas la fonction P/t_i^m , on voit immédiatement qu'on a $(t_\alpha - t_\beta) \otimes \iota(P) = 0$ sur $V_\alpha \cap V_\beta$. Il existe donc une section t de $\mathcal{L}(mm') \otimes \mathcal{O}_X(m) = \mathcal{L}(m.(m'+1))$ sur X telle que $t = t_\alpha \otimes \iota(P)$ sur V_α , d'où $t = s \otimes \iota(P^{m'+1})$ sur $V_\alpha \cap X_P$ pour tout α . Comme les V_α recouvrent X , on a donc prouvé que pour toute section s de \mathcal{L} sur X_P , il existe un entier $m'' (= m' + 1)$ tel que la section $s \otimes \iota(P^{m''})$ de $\mathcal{L}(m.m'')$ sur X_P se prolonge en une section de $\mathcal{L}(m.m'')$ sur X .

Soient alors x un point de X et u une base du \mathcal{O}_x -module \mathcal{L}_x ; comme les ouverts X_P forment une base de la topologie de X , on peut trouver un polynôme homogène P en les t_i tel que $x \in X_P$ et une section s de \mathcal{L} sur X_P telle que $(s)_x = u$. Comme $x \in X_P$, le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X(m)_x$ (où m est le degré, de P) admet $\iota(P)_x$ pour base; or d'après ce qui précède, il existe un entier m' tel que la section $s \otimes \iota(P^{m'})$ de $\mathcal{L}(m.m')$ sur X_P se prolonge en une section de $\mathcal{L}(mm')$ sur X . Il en résulte que pour tout $x \in X$, on peut trouver un entier m_x et une section s_x de $\mathcal{L}(m_x)$ sur X engendrant le faisceau $\mathcal{L}(m_x)$ au point x , donc en tout point d'un voisinage U_x de x . Comme X est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts U_{x_1}, \dots, U_{x_p} , et si l'on pose $n = \sup(m_{x_1}, \dots, m_{x_p})$, le faisceau $\mathcal{L}(n)$ est engendré par ses sections sur X .

C. Q. F. D.

2. Faisceau associé à un diviseur. — Soit X une variété irréductible et non singulière de dimension r . On note F le corps des fonctions rationnelles sur X , et \mathfrak{P} l'ensemble des sous-variétés irréductibles de dimension $r-1$ de X . Le groupe abélien libre $\mathbf{Z}(\mathfrak{P})$ de base \mathfrak{P} , muni de la relation d'ordre naturelle, est un groupe abélien réticulé, dont les éléments sont appelés *diviseurs*. On dira qu'un diviseur $D = \sum_Y n_Y \cdot Y$ est positif (resp.

nul) sur une partie A de X si l'on a $n_Y \geq 0$ (resp. $n_Y = 0$) pour tout $Y \in \mathfrak{P}$ tel que $Y \cap A \neq \emptyset$. De plus, à toute fonction $f \in F$ non nulle est associé un diviseur (f) ; si $f, f' \in F$ sont non nulles, on a $(f.f') = (f) + (f')$; pour que le diviseur (f) soit positif sur une partie A de X , il faut et il suffit que f soit régulière en tout point de A ; enfin, la traduction géométrique du fait que l'anneau local d'un point sur une variété non singulière est factoriel, est que pour tout diviseur D et tout point x de X , on peut trouver une fonction $f \in F$ non nulle telle que $D + (f)$ soit nul en x .

Si un diviseur $D = \sum_Y n_Y \cdot Y$ est nul en un point $x \in X$, il est nul en tous les points d'un voisinage de x puisque tout $Y \in \mathfrak{P}$ est fermé et qu'un nombre fini de n_Y seulement sont non nuls. D'après la remarque précédente, on peut donc trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X et pour chaque i une

fonction non nulle $f_i \in F$ telle que $D + (f_i)$ soit nul dans U_i ; il en résulte que le diviseur $(f_i) - (f_j) = (f_i/f_j)$ est nul dans $U_i \cap U_j$, c'est-à-dire que f_i/f_j est régulière dans $U_i \cap U_j$; et l'on peut choisir le recouvrement $\{U_i\}$ plus fin qu'un recouvrement ouvert donné. Réciproquement, soient $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert fini de X ; et pour tout i , soit f_i une fonction rationnelle non nulle sur X ; on suppose que f_i/f_j est régulière sur $U_i \cap U_j$. Alors, le diviseur (f_i/f_j) est positif sur $U_i \cap U_j$; échangeant i et j , on voit que (f_i/f_j) est négatif sur $U_i \cap U_j$, donc nul sur $U_i \cap U_j$; par suite, si $Y \in \mathfrak{P}$ rencontre U_i et U_j , donc $U_i \cap U_j$, le coefficient de Y dans les diviseurs (f_i) et (f_j) est le même, et comme le nombre des indices i est fini, on peut définir un diviseur D par la condition que $Y \in \mathfrak{P}$ a même coefficient dans D et dans $-(f_i)$ si Y rencontre U_i ; et alors $D + (f_i)$ est nul dans U_i .

Soit D un diviseur sur X . On note $\mathcal{L}(D)$ l'ensemble des couples (x, f) avec $x \in X$ et $f \in F$ tels que $f = 0$ ou $D + (f)$ soit positif en x . Si D est associé à une famille (U_i, f_i) comme plus haut, pour $x \in U_i$, le diviseur $D + (f_i)$ est nul en x , et par suite $(x, f) \in \mathcal{L}(D)$ équivaut à « $f = 0$ ou $(f) - (f_i)$ est positif en x », soit à « $f \in f_i \cdot \mathcal{O}_x$ ». Il en résulte que $\mathcal{L}(D)$ est un sous-faisceau du faisceau constant de \mathcal{O}_X -modules $X \times F$ et qu'on a

$$\mathcal{L}(D)|U_i = f_i \cdot \mathcal{O}_X|U_i.$$

LEMME 2. — Soient D et D' deux diviseurs sur X . Alors les faisceaux $\mathcal{L}(D + D')$ et $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(D')$ sont isomorphes.

On peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X et des fonctions non nulles f_i et f'_i de F telles que $D + (f_i)$ et $D' + (f'_i)$ soient nuls sur U_i pour tout i . Soit α l'application de $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(D')$ dans $\mathcal{L}(D + D')$ qui pour chaque $x \in X$, se réduit à l'application \mathcal{O}_x -linéaire α_x de $\mathcal{L}(D)_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{L}(D')_x$ dans $\mathcal{L}(D + D')_x$ définie par $\alpha_x(f \otimes f') = f \cdot f'$. Mais le diviseur

$$(D + D') + (f_i \cdot f'_i)$$

est nul sur U_i , et l'on a donc $\mathcal{L}(D + D')|U_i = f \cdot f'_i \cdot \mathcal{O}_X|U_i$; comme on a par ailleurs $\mathcal{L}(D)|U_i = f_i \cdot \mathcal{O}_X|U_i$ et $\mathcal{L}(D')|U_i = f'_i \cdot \mathcal{O}_X|U_i$, on voit que pour chaque i , α induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{L}(D')$ sur $\mathcal{L}(D + D')$ au-dessus de U_i , et comme X est réunion des U_i , α est l'isomorphisme cherché.

C. Q. F. D.

Pour tout diviseur D , on a vu avant le lemme 2 que le faisceau $\mathcal{L}(D)$ est localement isomorphe à \mathcal{O}_X . Réciproquement, on a le résultat suivant.

LEMME 3. — Soit \mathcal{L} un faisceau de rang 1 sur X . Pour tout $x \in X$, il existe un diviseur D nul en x et un isomorphisme de \mathcal{L} sur $\mathcal{L}(D)$.

Comme le faisceau \mathcal{L} est localement isomorphe à \mathcal{O}_X , on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}$ de X , et pour tout i une section s_i de \mathcal{L} sur

U_i telle que $(s_i)_y$ soit une base du \mathcal{O}_y -module \mathcal{L}_y pour tout $y \in U_i$; de plus, il existe quels que soient i et j une fonction f_{ij} régulière sur $U_i \cap U_j$ telle que $s_i = f_{ij} \cdot s_j$ sur $U_i \cap U_j$. On peut supposer les U_i non vides, et comme X est irréductible, il en résulte que les ouverts $U_i \cap U_j \cap U_k$ sont non vides; alors l'égalité $f_{ij} \cdot f_{jk} = f_{ik}$ a lieu sur $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, donc reste valable comme identité dans le corps F des fonctions rationnelles sur X . Soit o un indice tel que $x \in U_o$; on a $f_{io} = f_{ij} \cdot f_{jo}$, ce qui prouve que f_{io}/f_{jo} est régulière sur $U_i \cap U_j$. Il existe par suite un diviseur D sur X tel que $D + (f_{io})$ soit nul sur U_i ; et comme $f_{oo} = 1$, on voit que D est nul en $x \in U_o$; de plus, on a $\mathcal{L}(D)|_{U_i} = f_{io} \cdot \mathcal{O}_X|_{U_i}$ pour tout i , et l'on peut donc trouver des isomorphismes $\alpha_i: \mathcal{L}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{L}(D)|_{U_i}$ déterminés par la condition de transformer s_i en la section constante f_{io} de $\mathcal{L}(D)$ sur U_i . Les relations $s_i = f_{ij} \cdot s_j$ et $f_{io} = f_{ij} \cdot f_{jo}$ sur $U_i \cap U_j$ montrent immédiatement que α_i et α_j coïncident sur $U_i \cap U_j$; par suite, il existe un isomorphisme α de \mathcal{L} sur $\mathcal{L}(D)$ dont la restriction à U_i soit α_i pour tout i . C. Q. F. D.

3. Fonctions additives de faisceaux. — Soit X une variété. On appelle fonction additive de faisceaux sur X une application λ qui, à tout faisceau \mathcal{F} sur X , fait correspondre un élément $\lambda(\mathcal{F})$ d'un groupe abélien G , de sorte que, pour toute suite exacte

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}' \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

de faisceaux sur X , on ait

$$(3) \quad \lambda(\mathcal{F}') = \lambda(\mathcal{F}) + \lambda(\mathcal{F}'').$$

Par exemple, si X est complète, on sait ⁽⁶⁾ que les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie sur le corps K , et nuls pour $i > \dim X$; la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$ est bien

définie, et la suite exacte de cohomologie montre que χ est une fonction additive de faisceaux.

Un autre exemple est le suivant: soient \mathcal{L} un faisceau de rang 1 sur X , et λ une fonction additive de faisceaux, et posons $\lambda'(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$; alors, comme le faisceau \mathcal{L} est localement isomorphe à \mathcal{O}_X , le \mathcal{O}_x -module \mathcal{L}_x est libre pour tout $x \in X$, et par suite, pour toute suite exacte (2), la suite correspondante obtenue en prenant le produit tensoriel avec \mathcal{L} est exacte. Ceci montre immédiatement que λ' est une fonction additive de faisceaux.

THÉORÈME. — Soit X une variété. On suppose que X est, soit quasi projective, soit irréductible et non singulière. Soient de plus \mathcal{L} un faisceau de rang 1

⁽⁶⁾ Ce résultat est dû à GROTHENDIECK; cf. par exemple: Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents, *Séminaire Cartan*, t. 9, 1956-1957: Quelques questions de topologie, exposé n° 2.

sur X et λ une fonction additive de faisceaux. Si λ est nulle pour tout faisceau dont le support est de dimension $< r$, alors on a

$$(4) \quad \lambda(\mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$$

pour tout faisceau \mathcal{F} dont le support est de dimension $\leq r$.

Soient S un fermé de X et \mathcal{G} un faisceau nul en dehors de S , de sorte que $\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}$ est nul en dehors de S . Si S est de dimension $< r$, il résulte de l'hypothèse faite sur λ qu'on a $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}) = 0$.

Supposons maintenant S irréductible de dimension $\leq r$ et soit x un point de S . Soit de plus \mathcal{M} un faisceau de rang 1 sur X ; nous supposons, soit que X est quasi projective et que \mathcal{M} est engendré par ses sections sur X , soit que X est irréductible et non singulière, et que \mathcal{M} est isomorphe à $\mathcal{L}(D)$ où D est un diviseur positif, nul en x . Dans le second cas, comme D est positif, l'élément 1 de F est une section de $\mathcal{L}(D)$ sur x , et comme D est nul en x , on a $\mathcal{L}(D)_x = \mathcal{O}_x$; dans les deux cas, on voit qu'il existe une section s de \mathcal{M} sur X telle que $(s)_x$ soit une base de \mathcal{M}_x sur \mathcal{O}_x . On définit alors un homomorphisme α de \mathcal{G} dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{M}$ en posant $\alpha(u) = u \otimes (s)_y$, pour $y \in X$ et $u \in \mathcal{G}_y$, et comme $(s)_x$ est une base de \mathcal{M}_x sur \mathcal{O}_x , on voit que α induit un isomorphisme de \mathcal{G}_x sur $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{M})_x$. Soient alors \mathcal{N} et \mathcal{C} respectivement le noyau et le conoyau de α , et soit T la réunion des supports de \mathcal{N} et \mathcal{C} ; vu ce qui précède, on a $x \notin T$, mais comme \mathcal{G} et $\mathcal{G} \otimes \mathcal{M}$ sont nuls en dehors de S , on a $T \subset S$, donc T est un fermé propre de S , d'où $\dim T < \dim S \leq r$ puisque S est irréductible. Il résulte alors de l'hypothèse faite sur λ que $\lambda(\mathcal{N}) = \lambda(\mathcal{C}) = 0$, et la suite exacte

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

démontre l'égalité $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{M})$ puisque λ est additive.

Si X est quasi projective, on peut d'après le lemme 1 trouver un faisceau de rang 1, soit \mathcal{L}' , tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ et \mathcal{L}' soient engendrés par leurs sections; si X est irréductible et non singulière on peut trouver un diviseur D nul en x tel que \mathcal{L} soit isomorphe à $\mathcal{L}(D)$ (lemme 3); mais on peut trouver deux diviseurs positifs D' et D'' nuls en x tels que $D = D'' - D'$; si l'on pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(D')$, alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ sera isomorphe à $\mathcal{L}(D'')$ d'après le lemme 2. Dans les deux cas, on peut appliquer le résultat de l'alinéa précédent aux couples $(\mathcal{G}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')$ et $(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{L}')$ d'où

$$\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \quad \text{et} \quad \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}),$$

et finalement $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L})$.

Soient maintenant S' le support de \mathcal{F} , S'_i les composantes irréductibles de S' , et T' la réunion des fermés $S'_i \cap S'_j$; alors, comme S' est de dimension $\leq r$ par hypothèse, on a $\dim S'_i \leq r$ et $\dim T' < r$. Par ailleurs il existe ⁽⁷⁾

(7) J. P. SERRE [4], bas de la page 11.

un faisceau \mathcal{G} nul en dehors de T' et des faisceaux \mathcal{G}_i nuls en dehors de S'_i et une suite exacte

$$(6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \sum_i \mathcal{G}_i \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

On a donc $\lambda(\mathcal{F}) = \sum_i \lambda(\mathcal{G}_i) - \lambda(\mathcal{G})$, et d'après la remarque précédant l'énoncé du théorème, on a

$$\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) = \sum_i \lambda(\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{L}) - \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L});$$

mais comme T' est de dimension $< r$ et que \mathcal{G} est nul en dehors de T' , on a $\lambda(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}) = 0$; comme S'_i est irréductible et que \mathcal{G}_i est nul en dehors de S'_i , on a $\lambda(\mathcal{G}_i) = \lambda(\mathcal{G}_i \otimes \mathcal{L})$ d'après la première partie de la démonstration. Finalement, l'égalité (4) est une conséquence immédiate des égalités précédentes.

4. Invariants numériques. — Soient X une variété, qui est soit quasi projective, soit irréductible et non singulière, et λ une fonction additive de faisceaux sur X .

Pour tout entier $n > 0$, nous désignerons par A_n l'anneau des polynômes à coefficients entiers en des variables X_1, \dots, X_n et leurs inverses; nous noterons I_n l'idéal de A_n engendré par les polynômes $1 - X_i$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire le noyau de l'homomorphisme de A_n dans l'anneau des entiers qui applique chaque X_i sur 1; enfin nous noterons I_n^m la puissance $m^{\text{ème}}$ de l'idéal I_n de A_n .

Soit \mathcal{L} un faisceau de rang 1 sur X ; nous poserons $\mathcal{L}^0 = \mathcal{O}_X$, et nous noterons \mathcal{L}^{-1} le faisceau des germes d'homomorphismes de \mathcal{L} dans \mathcal{O}_X ; enfin pour tout entier $m > 0$, nous noterons \mathcal{L}^m le produit tensoriel de m faisceaux égaux à \mathcal{L} et \mathcal{L}^{-m} le produit tensoriel de m faisceaux égaux à \mathcal{L}^{-1} . Alors, pour tout entier m , le faisceau \mathcal{L}^m est de rang 1, et les faisceaux $\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{L}^{m'}$ et $\mathcal{L}^{m+m'}$ sont isomorphes quels que soient les entiers m et m' , ce qui justifie la notation.

Si $P = \sum_{i_1, \dots, i_n} a(i_1, \dots, i_n) X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ est un élément de A_n , si $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ sont des faisceaux de rang 1 sur X , et si \mathcal{F} est un faisceau sur X , nous poserons par convention :

$$(7) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes P(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a(i_1, \dots, i_n) \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^{i_n}).$$

Il résulte de cette définition les formules

$$(8) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes (P + P')(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))$$

$$= \lambda(\mathcal{F} \otimes P(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)) + \lambda(\mathcal{F} \otimes P'(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))$$

$$(9) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes (PQ)(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)) = \lambda(\{\mathcal{F} \otimes Q(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)\} \otimes P(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))$$

si P et P' sont dans A_n et si Q est un monôme. De plus, comme tout faisceau dont le support est de dimension < 0 est nul, on déduit par récurrence sur m la formule suivante du théorème du n° 3 :

$$(10) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes \{(1 - \mathcal{L}_1) \dots (1 - \mathcal{L}_{m+1})\}) = 0$$

lorsque le support de \mathcal{F} est de dimension $\leq m$, et que les \mathcal{L}_i sont de rang 1. Les formules (8), (9) et (10) montrent alors immédiatement que $\lambda(\mathcal{F} \otimes P(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))$ ne dépend que de la classe de P modulo l'idéal I_n^{n+1} lorsque le support de \mathcal{F} est de dimension $\leq m$.

Avec ces notations, nous pouvons facilement démontrer toutes les identités de SNAPPER. Nous donnerons encore une définition :

$$(11) \quad p_a(\mathcal{L}_1^{[m_1]}, \dots, \mathcal{L}_n^{[m_n]}; \mathcal{F}) = \lambda(\mathcal{F} \otimes \{(1 - \mathcal{L}_1^{-1})^{m_1} \dots (1 - \mathcal{L}_n^{-1})^{m_n}\})$$

pour des entiers $m_i \geq 0$, ce qui est nul lorsque $m_1 + \dots + m_n$ est strictement plus grand que la dimension du support de \mathcal{F} .

Soit s la dimension du support de \mathcal{F} ; alors d'après la congruence

$$(12) \quad (1 - X_1)^t \equiv \sum_{i \leq j \leq s} (-1)^i \binom{j-1}{i-1} (1 - X_1^{-1})^i \pmod{I_1^{s+1}},$$

on a la formule

$$(13) \quad p_a((\mathcal{L}^{-1})^{[i]}; \mathcal{F}) = \sum_{i \leq j \leq s} (-1)^i \binom{j-1}{i-1} p_a(\mathcal{L}^{[j]}; \mathcal{F}),$$

où l'on définit les coefficients binomiaux $\binom{m}{i}$ pour $i \geq 0$ et m de signe quelconque par $\binom{m}{i} = m(m-1) \dots (m-i+1)/1.2 \dots i$ pour $i > 0$ et $\binom{m}{0} = 1$. D'autre part, en explicitant la définition (11) au moyen de la formule du binôme, on obtient

$$(14) \quad p_a(\mathcal{L}_1^{[m_1]}, \dots, \mathcal{L}_n^{[m_n]}; \mathcal{F}) = \sum (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \binom{m_1}{i_1} \dots \binom{m_n}{i_n} \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{-i_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^{-i_n}),$$

où la sommation est étendue aux systèmes d'entiers (i_1, \dots, i_n) tels que $0 \leq i_\alpha \leq m_\alpha$ pour $1 \leq \alpha \leq n$. D'après la formule (14), les valeurs de la fonction p_a s'expriment au moyen des valeurs de la fonction λ ; réciproquement, nous allons exprimer la fonction λ au moyen de la fonction p_a . En effet, d'après la formule du binôme, on a la congruence

$$(15) \quad X_1^m = \sum_{0 \leq i \leq s} \binom{m+i-1}{i-1} (1 - X_1^{-1})^i \pmod{I_1^{s+1}}$$

dans l'anneau A_1 ; remplaçant successivement X_1 par chacun des X_i , et multipliant membre à membre les congruences ainsi obtenues dans A_n modulo I_n^{s+1} , on obtient alors l'égalité

$$(16) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^{m_n}) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} p_a(\mathcal{L}_1^{[i_1]}, \dots, \mathcal{L}_n^{[i_n]}; \mathcal{F}) \binom{m_1+i_1-1}{i_1-1} \dots \binom{m_n+i_n-1}{i_n-1}$$

puisque $\lambda(\mathcal{F} \otimes P(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))$ ne dépend que de la classe de P modulo I_n^{s+1} . On a vu que les coefficients $p_a(\mathcal{L}_1^{[i_1]}, \dots, \mathcal{L}_n^{[i_n]}; \mathcal{F})$ sont nuls lorsque $i_1 + \dots + i_n > s$; il résulte donc de la formule (16) que $\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{m_1} \dots \otimes \mathcal{L}_n^{m_n})$ est un polynôme de degré $\leq s$ en les entiers m_1, \dots, m_n (en un sens évident si λ prend ses valeurs dans un groupe abélien G arbitraire); en particulier, si X est irréductible et non singulière, si l'on pose $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(D_i)$, le lemme 2 montre que $\lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}(m_1 D_1 + \dots + m_n D_n))$ est un polynôme en les entiers m_i quels que soient les diviseurs D_i .

Pour un entier $m \geq 0$, on peut développer $X_1^{-m} = (1 - (1 - X_1^{-1}))^m$ par la formule usuelle du binôme; remplaçant successivement X_1 par $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$, et faisant le produit des identités obtenues, on trouve alors

$$(17) \quad \lambda(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^{-m_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_n^{-m_n}) = \sum (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \binom{m_1}{i_1} \dots \binom{m_n}{i_n} p_a(\mathcal{L}_1^{[i_1]}, \dots, \mathcal{L}_n^{[i_n]}; \mathcal{F})$$

avec la même règle de sommation que dans (14).

Nous omettrons les entiers m_i dans la notation de p_a lorsqu'ils seront tous égaux à 1. Alors, si dans l'identité

$$(18) \quad (1 - XY) = (1 - X) + (1 - Y) - (1 - X)(1 - Y)$$

on remplace X par $\mathcal{L}_n'^{-1}$ et Y par $\mathcal{L}_n''^{-1}$, on obtient la relation

$$(19) \quad \begin{aligned} p_a(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n; \mathcal{F}) \\ = p_a(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n'; \mathcal{F}) + p_a(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n''; \mathcal{F}) \\ - p_a(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n-1}, \mathcal{L}_n', \mathcal{L}_n''; \mathcal{F}) \end{aligned}$$

lorsque $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}'_n \otimes \mathcal{L}''_n$. Nous ferons deux remarques sur cette formule; tout d'abord, on peut omettre le dernier terme lorsque $n = s$; de plus on notera que p_a est symétrique en les arguments \mathcal{L}_i .

Pour terminer, donnons quelques applications du théorème de dualité de SERRE⁽⁸⁾. On supposera X projective et non singulière de dimension r , on posera $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ et $\lambda = \chi$, et l'on omettra \mathcal{O}_X dans les notations. Il existe alors un faisceau \mathcal{K} de rang 1, jouant le rôle de la classe canonique, et tel que les espaces vectoriels $H^i(X, \mathcal{L})$ et $H^{r-i}(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{K})$ aient même dimension pour $0 \leq i \leq r$; on en déduit $\chi(\mathcal{L}) = (-1)^r \chi(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{K})$; par linéarité, on en déduit $\chi(P(\mathcal{L})) = (-1)^r \chi(\mathcal{K} \otimes P(\mathcal{L}^{-1}))$ pour tout polynôme $P \in A_1$. Remplaçant P par le polynôme $(1 - X_1)^i$, et substituant \mathcal{K} à X_1 dans la congruence

$$(20) \quad X_1 = \sum_{0 \leq j \leq s} (1 - X_1^{-1})^j \pmod{I_1^{s+1}},$$

on en déduit alors immédiatement la formule

$$(21) \quad p_a((\mathcal{L}^{-1})^{[i]}) = (-1)^r \sum_{0 \leq j \leq r-i} p_a(\mathcal{L}^{[i]}, \mathcal{K}^{[j]}).$$

Enfin, faisant $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ dans les formules (13) et (21), on démontre immédiatement la relation suivante entre les nombres $p_a(\mathcal{K}^{[i]})$:

$$(22) \quad \sum_{1 \leq j \leq r} \{(-1)^{r+1} \binom{j-1}{i-1} - 1\} p_a(\mathcal{K}^{[j]}) = 0$$

pour $r \geq 3$ et $2 \leq i \leq r-1$.

5. Remarques finales. — D'après la formule (16), notre définition de la fonction p_a est identique à celle de SNAPPER lorsque $\lambda = \chi$. Nos formules (13), (14), (16), (17), (21) et (22) correspondent respectivement aux théorème 5.1, corollaire 3.2, théorème 3.1, théorème 3.2, théorème 6.1 et théorème 6.2 de SNAPPER [6], tandis que la formule (19) lorsque $n = s$ redémontre le lemme 4.1 de SNAPPER. Nous renvoyons à l'article de SNAPPER [6] pour l'explicitation d'un certain nombre de cas particuliers, et pour la justification géométrique des définitions des invariants p_a .

(8) O. ZARISKI [7], p. 136-140.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.). — Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. math. Fr.* t. 86, 1958, p. 97-136.
- [2] HIRZEBRUCH (F.). — *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*. Berlin, Springer-Verlag, 1956 (*Ergebnisse der Mathematik*, 9).
- [3] SERRE (J.-P.). — Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.
- [4] SERRE (J.-P.). — Sur la cohomologie des variétés algébriques, *J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 36, 1957, p. 1-16.
- [5] SNAPPER (E.). — Multiples of divisors, *J. of Math. and Mech.*, t. 8, 1959, p. 967-992.
- [6] SNAPPER (E.). — Polynomials associated with divisors, *J. of Math. and Mech.*, t. 9, 1960, p. 123-129.
- [7] ZARISKI (O.). — Algebraic sheaf theory, Scientific report on the Second summer Institute : Several complex variables [1954, Boulder (Col.)], Part III., *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 62, 1956, p. 117-141.

(Manuscrit reçu le 10 avril 1960.)

Pierre CARTIER,
Chargé de Recherches au C.N.R.S.,
57, La Résidence,
Orsay (Seine-et-Oise).

