

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD CHARLES

Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 217-227

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__217_0

© Bulletin de la S. M. F., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE SUR LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE ABÉLIEN

PAR

BERNARD CHARLES

(Montpellier).

Introduction. — Ce travail est consacré à l'étude des sous-groupes purs d'un groupe abélien G qui contiennent un sous-groupe donné H . Nous recherchons s'il existe des sous-groupes purs minimaux contenant H .

Dans la partie **A** nous montrons que le cas général se ramène à celui des groupes abéliens primaires.

Dans la partie **B** nous nous occupons du cas où G est primaire et nous démontrons le résultat suivant qui donne la solution d'un problème posé par L. FUCHS dans [2] : Si G est primaire et si H est un sous-groupe de G sans élément de hauteur infinie il existe un sous-groupe pur de G contenant H et sans élément de hauteur infinie.

Dans la partie **C** nous nous occupons du cas où G est primaire et sans élément de hauteur infinie. Nous commençons par étudier de façon systématique les sous-groupes purs minimaux de G contenant un élément donné u de G . Cette étude est basée sur la notion d'indicatrice d'un élément de G . La structure des sous-groupes purs minimaux contenant u est déterminée par la connaissance de l'indicatrice de u . Nous démontrons l'existence de sous-groupes purs minimaux contenant H dans les deux cas particuliers suivants :

1. H est contenu dans le socle de G .
2. H possède un sous-groupe qui est pur dans G et dense dans H pour la topologie définie par les $p^n G$.

Nous adoptons de façon générale la terminologie et les notations de [2]. En particulier $\{U, V, \dots\}$ désigne le sous-groupe de G engendré par $U, V, \dots \subset G$. Un sous-groupe $H \subset G$ est dit pur si $nH = H \cap nG$ pour tout entier n . Nous notons toujours les sommes directes de sous-groupes de G

avec le symbole \oplus . Des sous-groupes de G sont dits indépendants si l'on peut former leur somme directe dans G .

Soit maintenant G primaire associé à l'entier premier p c'est-à-dire tel que tout $u \in G$ ait pour ordre une puissance de p . On appelle hauteur de $u \in G$ la borne supérieure (finie ou infinie) de l'ensemble des entiers n tels que l'équation $p^n x = u$ soit résoluble en x dans G . La hauteur de u sera toujours notée $h(u)$. Quand nous disons que G est sans élément de hauteur infinie il est sous-entendu qu'il s'agit des éléments $\neq 0$. Le socle $S(G)$ de G est l'ensemble $G[p]$ des éléments de G annulés par p . Nous désignons toujours par P le socle $S(G)$ de G et nous considérons indifféremment P comme groupe abélien ou comme espace vectoriel sur $Z/(p)$ (Z désigne l'anneau des entiers). P_i désigne toujours le sous-espace de P formé des $u \in G$ tels que $h(u) \geq i$. Nous désignons par $G_n = G[p^n]$ l'ensemble des éléments de G qui sont annulés par p^n .

Un groupe primaire G est dit réduit s'il ne contient pas de sous-groupe du type p^∞ c'est-à-dire isomorphe à Q_p/Z où Q_p est l'ensemble des fractions dont le dénominateur est une puissance de p .

A. — Étude du cas général.

Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G . La méthode suivante de T. Szele permet de construire un sous-groupe pur de G contenant H . Pour chaque équation $nx = u$ (n entier, $u \in H$) résoluble en x dans G on choisit une solution et l'on forme le sous-groupe H_1 engendré par ces solutions. On construit ensuite H_2 à partir de H_1 de façon analogue, etc. La réunion des H_i est un sous-groupe pur, contenant H , et qui a même puissance que H si H est infini.

Si G est un groupe sans torsion, le sous-groupe H_1 construit précédemment est pur et a le même rang que H . On voit facilement que H_1 est le plus petit sous-groupe pur contenant H .

Rappelons le résultat suivant qui est élémentaire : Soient G', G'' deux sous-groupes de G tels que $G'' \subset G'$. Si G'' est pur, et si G'/G'' est pur dans G/G'' , alors G' est pur dans G .

APPLICATION. — Soient T le sous-groupe de torsion de G , H un sous-groupe de G , et T' le sous-groupe de torsion de H . Supposons qu'on ait trouvé G'' , contenant T' , et pur dans T . Comme T est pur dans G , G'' est pur dans G . Posons $H' = \{H, G''\}$, et soit $\overline{G} = G/G''$, $\overline{H'} = H'/G''$. On sait, par la méthode de T. Szele, construire $\overline{G'}$ de même rang que $\overline{H'}$ et pur dans \overline{G} . Si G' est l'image réciproque de $\overline{G'}$ dans G , on voit que G' est pur dans G .

La recherche de sous-groupes purs, contenant un sous-groupe donné, se

ramène donc essentiellement au cas où G est un groupe de torsion. Il en est de même de la recherche des sous-groupes purs minimaux. Si l'on a trouvé G'' pur minimal contenant T' , le sous-groupe G' considéré plus haut est un sous-groupe pur minimal contenant H , et c'est le plus petit sous-groupe pur contenant H et G'' .

Le cas général se ramène donc au cas où G est un groupe de torsion, et ce cas se ramène de façon immédiate à celui des groupes primaires.

Terminons par le théorème suivant qui généralise le fait que la propriété d'être pur est inductive :

THÉORÈME 1. — *Soient Ω un ensemble ordonné filtrant à droite, $H_i (i \in \Omega)$, $G_i (i \in \Omega)$ deux familles croissantes de sous-groupes de G telles que H_i soit pur dans G_i , et $\bigcup_{i \in \Omega} G_i = G$. Alors $H = \bigcup_{i \in \Omega} H_i$ est pur dans G .*

Soient $h \in H$, et $nx = h$ une équation résoluble en x dans G . Soient $g \in G$ tel que $ng = h$, et $i, j \in \Omega$ tels que $h \in H_i$, $g \in G_j$, enfin $k \in \Omega$ tel que $k \geq i$, $k \geq j$. Comme $H_k \supset H_i$, $G_k \supset G_j$, et H_k pur dans G_k , l'égalité $ng = h$ entraîne qu'on peut résoudre $nx = h$ dans H_k , ce qui démontre le théorème.

B. — Étude du cas où G est primaire.

Soient G primaire associé à l'entier premier p et H un sous-groupe de G . Nous nous proposons de rechercher s'il existe des sous-groupes purs minimaux contenant H . Si H contient des éléments de hauteur infinie, il n'existera pas en général de sous-groupes purs minimaux contenant H , comme le montre l'exemple $H = \{u\}$ avec u de hauteur infinie, dans le cas où G est réduit.

Nous nous occuperons donc exclusivement du cas où H ne possède pas d'élément de hauteur infinie. Le théorème suivant, qui résout un problème posé par L. FUCHS dans [2] (problème 4) montre qu'on peut se ramener au cas où G n'a pas d'élément de hauteur infinie.

THÉORÈME 2. — *Soient G un groupe abélien primaire et H un sous-groupe de G sans élément de hauteur infinie. Il existe un sous-groupe pur de G contenant H et sans élément de hauteur infinie.*

Plusieurs lemmes sont nécessaires à la démonstration de ce théorème.

LEMME 1. — *Si H et K sont deux sous-groupes de G tels que $u \in H$, $u \notin K$ entraîne $pu \in K$ et pu de hauteur nulle dans K , alors $S(\{H, K\}) = S(K)$.*

Supposons qu'on ait $p(u + v) = 0$ avec $u \in H$, $u \notin K$, $v \in K$. Cela signifie que $pu = -pv$ est de hauteur ≥ 1 dans K , en contradiction avec l'hypothèse du lemme.

LEMME 2. — Soient G un groupe primaire dont tous les éléments sont d'ordre p^n au plus, H un sous-groupe de G somme directe de groupes cycliques d'ordre p^n et K un sous-groupe de G tel que $H \cap K = 0$. Il existe une décomposition $G = H \oplus H'$ avec $H' \supset K$.

Soit en effet H' un sous-groupe maximal parmi ceux qui vérifient $H' \supset K$, $H' \cap H = 0$. Nous allons montrer que $G = H \oplus H'$. Supposons qu'il existe $u \in G$ tel que $u \notin H \oplus H'$ et $pu \in H \oplus H'$. On a $pu = h + h'$ avec $h \in H$, $h' \in H'$ et comme pu est d'ordre p^{n-1} au plus, il en est de même de h et h' donc on a $h = ph_1$ avec $h_1 \in H$. Quitte à remplacer u par $u - h_1$ on peut donc supposer que $u \notin H \oplus H'$, $pu \in H'$. Si l'on pose $H'' = \{H', u\}$ on a $H'' \supset K$ et $H \cap H'' = 0$, en contradiction avec la maximalité de H' . Le lemme est démontré.

LEMME 3. — Tout sous-groupe de G qui est terme direct d'une décomposition de G est pur dans G .

Cette propriété est classique.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Soient $P = S(G)$ le socle de G et P_ω l'ensemble des éléments de P qui sont de hauteur infinie. Pour chaque entier $i \geq 0$ on peut trouver un sous-espace Q'_i de P_i tel que

$$P_i \cap S(H) = Q'_i \oplus [P_{i+1} \cap S(H)].$$

On peut trouver des sous-espaces Q_i tels que

$$P_i = Q_i \oplus P_{i+1}, \quad Q_i \supset Q'_i.$$

Nous posons

$$P'_i = \{S(H), Q_0, \dots, Q_{i-1}\}, \quad P' = \bigcup_i P'_i.$$

Nous aurons encore à utiliser une suite de sous-espaces P''_n vérifiant les conditions

$$P'_i \oplus P''_i = P, \quad P''_i \subset P_i.$$

Il est facile de vérifier que $P' \cap P_\omega = 0$. Pour démontrer le théorème il suffit donc de construire un sous-groupe pur H' de socle P' et contenant H . Posons $G_n = G[p^n]$ et $H_n = H[p^n]$. Nous allons construire une suite de sous-groupes H'_n vérifiant les conditions

- (1) $H'_i \supset \{H'_{i-1}, H_i\}$, $S(H'_i) = P'_i$;
- (2) H'_i est un sous-groupe pur dans G_i .

Partons de $H'_0 = S(H)$, et supposons construits H'_0, \dots, H'_{n-1} vérifiant les propriétés (1) et (2). Nous allons montrer qu'on peut construire H'_n de

façon à satisfaire (1) et (2) pour $i = n$. Tous les éléments de P_n'' sont de hauteur $\geq n$ dans G , donc de hauteur $n - 1$ dans G_n . On peut donc former un sous-groupe $G_n'' \subset G_n$ de socle P_n'' et qui est somme directe de groupes cycliques d'ordre p^n .

Considérons le sous-groupe $G_n' = \{H_{n-1}', H_n'\}$. On a $pH_n \subset H_{n-1} \subset H_{n-1}'$. Si $u \in H_n$, $u \notin H_{n-1}'$, $pu \in H_{n-1}'$ c'est que u est d'ordre p^n ce qui entraîne que pu est d'ordre p^{n-1} donc de hauteur nulle dans H_{n-1}' . D'après le lemme 1, G_n' a pour socle P_{n-1}' donc $G_n'' \cap G_n' = 0$. On peut utiliser le lemme 2, ce qui donne H_n' tel que

$$G_n = G_n'' \oplus H_n', \quad H_n' \supset \{H_{n-1}', H_n'\}.$$

Le sous-groupe H_n' est pur dans G_n en vertu du lemme 3.

Nous avons donc démontré qu'on peut construire une suite de sous-groupes H_n' vérifiant les conditions (1) et (2).

Le sous-groupe $H' = \bigcup_n H_n'$ est pur en vertu du théorème 2. On a $H' \supset H$ puisque $H_n' \supset H_n$. Enfin le socle de H' est $P' = \bigcup_n P_n'$, ce qui achève la démonstration.

C. — Étude du cas où G n'a pas d'élément de hauteur infinie.

Dans tout ce paragraphe on suppose que G n'a pas d'élément de hauteur infinie. Il est commode de munir G de la topologie \mathfrak{S} définie par le système fondamental de voisinages de 0 formé par les $p^n G$. Cette topologie est séparée puisque $\bigcap_n p^n G = 0$. Un sous-groupe H discret de G est un sous-

groupe tel qu'il existe un entier N avec $H \cap p^N G = 0$. Il revient au même de dire que les éléments $\neq 0$ de H ont une hauteur $< N$. On sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour que G soit une somme directe de groupes cycliques est que G soit la réunion d'une suite croissante de sous-groupes discrets (KULIKOV).

Nous nous proposons de rechercher les sous-groupes purs minimaux de G qui contiennent un sous-groupe donné H .

Indicatrice d'un élément de G . — Soit $u \in G$ d'ordre p^n ; nous notons sa hauteur $h(u)$ et son exposant $n = e(u)$. L'indicatrice de u est la fonction φ définie sur l'ensemble des entiers $r > 0$ par

$$\varphi(r) = \begin{cases} e(p^{n-r}u) + h(p^{n-r}u) = r + h(p^{n-r}u) & \text{si } r \leq n, \\ 0 & \text{si } r > n. \end{cases}$$

La propriété $h(p^{s+1}u) \geq 1 + h(p^s u)$ entraîne que φ est une fonction décroissante. Les points de discontinuité de φ sont par définition les r tels que $\varphi(r) > \varphi(r+1)$.

Il est commode d'introduire dans l'ensemble des indicatrices l'ordre lexicographique : On dit que $\varphi \succ \psi$ si $\varphi = \psi$ ou bien s'il existe un entier s tel que $\varphi(r) = \psi(r)$ pour $r < s$ et $\varphi(s) > \psi(s)$.

Soit φ une indicatrice telle que $\varphi(r) = 0$ pour $r > n$. Il n'existe qu'un nombre fini d'indicatrices ψ distinctes vérifiant les conditions $\psi \prec \varphi$ et $\psi(r) = 0$ pour $r > n$.

Étude du cas où H est cyclique.

THÉOREME 3. — Soient $u \in G$ d'indicatrice φ et r_1, r_2, \dots, r_k les points de discontinuité de φ . Il existe des sous-groupes purs minimaux de G contenant $H = \{u\}$. Tout sous-groupe pur minimal H' contenant H est de la forme $H' = \bigoplus_{i=1}^k \{u_i\}$ où u_1, u_2, \dots, u_k ont respectivement pour exposants $\varphi(r_1), \varphi(r_2) - r_1, \dots, \varphi(r_k) - r_{k-1}$.

Soit n l'exposant de u et $m = \varphi(1) = 1 + h(p^{n-1}u) \geq n$. Nous ferons la démonstration en distinguant deux cas.

Cas 1. — φ possède la seule discontinuité $r_1 = n$. Pour avoir un sous-groupe pur minimal contenant u il suffit de choisir un élément $u_1 \in G$ tel que $p^{m-n}u_1 = u$. Le sous-groupe $H' = \{u_1\}$ est pur et évidemment minimal. Soit maintenant H'' minimal pur contenant u . Comme u a même hauteur dans H'' que dans G on peut trouver $u'_1 \in H''$ tel que $p^{m-n}u'_1 = u$. Comme H'' est minimal on aura $H'' = \{u'_1\}$.

Notons que l'exposant de u_1 ou u'_1 a la valeur $m = \varphi(r_1)$ indiquée dans le théorème.

Cas 2. — φ possède au moins deux points de discontinuité $r_1 < \dots < r_k$. Nous allons d'abord construire un sous-groupe pur $H' \supset H$ ayant la structure indiquée dans le théorème.

Pour le sous-groupe $\{p^{n-r_1}u\}$ on se trouve dans le cas 1 donc il existe u_1 tel que $p^{m-r_1}u_1 = p^{n-r_1}u$. Il est facile de vérifier qu'on a pour $\{u, u_1\}$ la décomposition

$$\{u, u_1\} = \{u_1\} \oplus \{v\}, \quad \text{avec } v = u - p^{m-n}u_1.$$

LEMME 4. — L'indicatrice de v est donnée par la formule

$$\psi(r) = \varphi(r + r_1) - r_1.$$

Montrons d'abord que l'exposant de v est $n - r_1$. On a $p^{n-r_1}v = 0$ donc il suffit de montrer que $p^{n-r_1-1}v \neq 0$. Si l'on avait $p^{n-r_1-1}v = 0$ on en dédui-

rait $h(p^{n-r_1-1}u) = m - r_1 - 1$ d'où l'égalité suivante en contradiction avec la définition de r_1 :

$$\varphi(r_1 + 1) = (r_1 + 1) + (m - r_1 - 1) = m = \varphi(1) = \varphi(r_1).$$

On a donc $e(v) = n - r_1$ et il reste à vérifier que pour $r \leq n - r_1$, on a

$$h(p^{n-r_1-r}v) = h(p^{n-r-r_1}u).$$

Comme $p^{n-r_1-r}v = p^{n-r-r_1}u + p^{m-r-r_1}u_1$ il suffit de montrer qu'on a l'inégalité

$$h(p^{n-r_1-r}u) < h(p^{m-r-r_1}u_1) = m - r - r_1.$$

Or cette inégalité résulte de

$$h(p^{n-r_1-r}u) = \varphi(r + r_1) - (r + r_1) < \varphi(1) - (r + r_1) = m - r - r_1.$$

La construction de H' peut maintenant s'achever par récurrence. On a $\psi < \varphi$ et d'autre part les discontinuités de ψ sont $r_2 - r_1, \dots, r_k - r_1$, donc

$$\psi(r_2 - r_1) = \varphi(r_2) - r_1, \quad \psi(r_3 - r_1) - (r_2 - r_1) = \varphi(r_3) - r_2, \dots$$

En poursuivant jusqu'au bout on obtiendra un sous-groupe $H' = \bigoplus_{i=1}^k \{u_i\}$.

Il faut démontrer que ce sous-groupe est pur et minimal. La pureté de H' résulte de ce que les hauteurs des socles de $\{u_1\}, \dots, \{u_k\}$ forment une suite strictement décroissante. Soit H'' un sous-groupe pur minimal de H' contenant $H = \{u\}$. Comme u a même indicatrice dans H'' que dans G on peut construire dans H'' un sous-groupe pur contenant H et de la forme indiquée dans le théorème. Il en résulte que H'' a un ordre au moins égal à l'ordre de H' donc $H'' = H'$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 4. — *Entre deux sous-groupes purs minimaux H' , H'' contenant $H = \{u\}$ il existe un isomorphisme θ qui prolonge l'identité dans H .*

Supposons H' et H'' construits suivant la méthode de la démonstration du théorème 3 :

$$\begin{aligned} H' &= \{u_1\} \oplus \dots \oplus \{u_k\} = \{u_1\} \oplus \{v\}, & v &= u - p^{m-n}u_1, \\ H'' &= \{u'_1\} \oplus \dots \oplus \{u'_k\} = \{u'_1\} \oplus \{v'\}, & v' &= u - p^{m-n}u'_1. \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'on a pour u la décomposition

$$u = p^{n_1}u_1 + \dots + p^{n_k}u_k, \quad n_i = \varphi(r_i) - r_k.$$

Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} n_1 &= m - n = \varphi(r_1) - r_k, \\ n_2 &= \psi(r_2 - r_1) - (r_k - r_1) = \varphi(r_2) - r_k \dots \end{aligned}$$

Comme n_1, n_2, \dots , s'expriment à partir de φ on aura aussi

$$u = p^{n_1} u'_1 + \dots + p^{n_k} u'_k,$$

donc en posant $\theta(u_i) = u'_i$ on détermine un isomorphisme de H' sur H'' tel que $\theta(u) = u$.

REMARQUE. — On a $n_1 > n_2 > \dots > n_k$, donc tous les n_i sont > 0 sauf peut-être n_k .

THÉORÈME 5. — Si H' et H'' sont deux sous-groupes purs minimaux contenant $H = \{u\}$, on a pour tout $i \geq 0$ la propriété

$$S(H') \cap P_i = S(H'') \cap P_i \pmod{P_{i+1}}.$$

Les notations étant celles du théorème précédent, on a

$$S(H') = \bigoplus_{i=1}^k S(\{u_i\}), \quad S(H'') = \bigoplus_{i=1}^k S(\{u'_i\}).$$

Nous désignerons par m_i l'exposant commun de u_i et de u'_i et nous poserons $w_j = p^{m_j-1} u_j$, $w'_j = p^{m_j-1} u'_j$. Étant donné $i \geq 0$, il existe au plus un entier j tel que $w_j \in P_i$, $w_j \notin P_{i+1}$. Pour démontrer le théorème il suffit donc de démontrer que, lorsqu'un tel entier j existe, on a $w_j - w'_j \in P_{i+1}$. Comme $h(w_j) = i$, cela revient à démontrer que

$$h(w_j - w'_j) > h(w_j).$$

D'après la démonstration du théorème précédent nous avons

$$u = \sum_{i=1}^k p^{n_i} u_i, \quad u = \sum_{i=1}^k p^{n_i} u'_i.$$

En multipliant ces deux égalités par p^{m_j-1} et en faisant la différence, on obtient

$$w_j - w'_j = \sum_{i=1}^{j-1} p^{n_i+m_j-1} (u_i - u'_i).$$

Tous les n_i sauf peut-être n_k étant > 0 , il en résulte

$$h(w_j - w'_j) \geq n_{j-1} + m_j - 1 > m_j - 1 = h(w_j).$$

Étude au cas où H est quelconque. — Lorsque H est fini il est clair qu'il existe des sous-groupes purs minimaux contenant H . Entre deux sous-groupes purs minimaux contenant H il existe un isomorphisme prolongeant l'identité dans H (on peut le voir par les méthodes utilisées dans la théorie d'Ulm). Nous pensons que ce résultat s'étend au moins au cas où H est réunion d'une

suite croissante de sous-groupes discrets de G , mais nous ne savons pas le démontrer.

THÉOREME 6. — *Il existe des sous-groupes purs minimaux de G contenant un sous-groupe donné H dans les cas suivants :*

1. H est contenu dans le socle G .

2. H contient un sous-groupe K qui est pur dans G et dense dans H pour la topologie \mathfrak{T} .

DÉMONSTRATION DANS LE CAS 2. — Soit Q_i une suite de sous-groupes de $S(K)$ tels que

$$S(K) \cap P_i = Q_i \oplus (S(K) \cap P_{i+1}).$$

On peut construire dans K un sous-groupe pur K_i de socle Q_i (K_i s'obtient comme sous-groupe maximal parmi l'ensemble des sous-groupes purs de K qui ont leur socle contenu dans Q_i). Le sous-groupe $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i$ est pur comme il est facile de le vérifier.

Posons $A_n = \bigoplus_{i=1}^n K_i$, $B_n = \bigoplus_{i=n+1}^{\infty} K_i$ et désignons de façon générale par \bar{U} la fermeture pour la topologie \mathfrak{T} d'un sous-ensemble U de G . Il est facile de vérifier que $\bar{A} = A_n \oplus \bar{B}_n$ et que \bar{A} , A_n , \bar{B}_n sont purs dans G . Soit $H_n = H \cap G_n$ et supposons construits H'_1, \dots, H'_{n-1} vérifiant :

- (1) $H'_i \supset \{H'_{i-1}, H_i\}$, $S(H'_i) = S(H)$, $H'_i \subset \bar{A} \cap G_i$,
- (2) H'_i est pur dans G_i .

Nous allons en nous inspirant des méthodes de démonstration du théorème 2 construire, H'_n vérifiant (1) et (2). Le sous-groupe $H''_n = \{H_n, H'_{n-1}\}$ a pour socle $S(H)$ d'après le lemme 1. Si l'on pose $B'_n = \bar{B}_n \cap H''_n$ on a $H''_n = A_n \oplus B'_n$. On peut trouver un sous-espace R_n de $S(\bar{B}_n)$ tel que

$$S(\bar{B}_n) = S(B'_n) \oplus R_n.$$

On peut construire $C_n \subset \bar{B}_n \cap G_n$ de socle R_n et pur dans $\bar{B}_n \cap G_n$ donc somme directe de groupes cycliques d'ordre p^n . D'après le lemme 2, il existe $B''_n \supset B'_n$ tel que $\bar{B}_n = B''_n \oplus C_n$. En posant $H'_n = A_n \oplus B''_n$ les conditions (1) et (2) sont vérifiées pour $i = n$. Le sous-groupe $H' = \bigcup_n H'_n$ est pur dans G , contient H et a pour socle $S(H)$. Cette dernière propriété entraîne que H' est minimal car si H'' est pur et vérifie $H'' \subset H'$, $S(H'') = S(H')$, on a $H'' = H'$.

DÉMONSTRATION DANS LE CAS 1. — On peut trouver une suite de sous-espaces $Q_i \subset P = S(G)$ tels que

$$H \cap P_i = Q_i \oplus (H \cap P_{i+1})$$

On peut construire K_i pur dans G et de socle Q_i . Le sous-groupe $H^* = \{H, K_1, K_2, \dots\}$ a pour socle H et vérifie les hypothèses du cas 2. On peut donc construire H' pur et de socle H . Un tel sous-groupe H' est un sous-groupe pur minimal contenant H .

Le problème de savoir si deux sous-groupes purs de G ayant le même socle sont isomorphes nous semble important, mais nous ne savons pas le résoudre. Une réponse positive à cette question aurait des conséquences intéressantes pour la structure des groupes abéliens sans élément de hauteur infinie. Pour une discussion plus détaillée sur cet aspect de la question, voir [1].

Nous terminons cette étude par le théorème suivant que nous considérons plutôt comme une curiosité :

THÉOREME 7. — Soient K un sous-groupe de G , $\{u\}$ un sous-groupe de K tel que $S(\{\varphi\}) = S(\{u\})$ entraîne $\varphi_v \prec \varphi_u$, K'' un sous-groupe de K tel que $K'' \cap \{u\} = 0$, K' un sous-groupe pur minimal de G contenant $\{u\}$. Alors $K'' \cap K' = 0$.

L'indépendance de K'' et K' résulte de la relation $K' \cap K \subset \{u\}$. Supposons en effet cette condition réalisée et soit $w \in K' \cap K''$. Comme $K'' \subset K$ on a $w \in \{u\}$ donc $w = 0$ en vertu de l'indépendance de K'' et $\{u\}$.

Nous pouvons supposer K' construit suivant la méthode du théorème 4. On a $K' = \bigoplus_{i=1}^k \{u_i\}$ et l'indicatrice de u est $\varphi_u = \varphi$. Pour simplifier l'écriture il sera commode de poser $u_0 = 0$ et $r_0 = 0$. Rappelons que

$$u = \sum_{i=1}^k p^{n_i} u_i, \quad n_i = \varphi(r_i) - r_k, \quad e(u_i) = \varphi(r_i) - r_{i-1}.$$

On en déduit facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \{u_0, u_1, \dots, u_j\} \cap \{u\} &= \{p^{r_k - r_j} u\}, \\ S(\{u_0, u_1, \dots, u_{j+1}\}) &= S(\{u_0, u_1, \dots, u_j, u\}) \quad (j \geq 1). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que $K \cap \{u_0, u_1, \dots, u_j\} \subset \{u\}$ entraîne $K \cap \{u_0, u_1, \dots, u_{j+1}\} \subset \{u\}$, ce qui démontrera le théorème puisque $K \cap \{u_0\} = 0$.

Supposons qu'il existe $w \in K \cap \{u_0, \dots, u_{j+1}\}$ tel que $w \notin \{u\}$. Quitte à multiplier w par un entier convenable on peut supposer que $pw \in \{u\}$ et plus précisément que pw est de la forme

$$pw = p^x u = p^x \sum_{i=1}^k p^{n_i} u_i.$$

La composante $p^{x+n_i} u_i$ de $p w$ suivant u_i doit être nulle pour $i > j+1$, c'est-à-dire $x + n_i \geq e(u_i)$ pour $i > j+1$, ce qui donne $x \geq r_k - r_{j+1}$. Nous poserons $x = \beta + r_k - r_{j+1}$:

$$p w = p^{\beta + r_k - r_{j+1}} u = p^\beta \sum_{i=1}^{j+1} p^{\varphi(r_i) - r_{j+1}} u_i.$$

Si $\beta > 0$ on a $p(w - \lambda u) = 0$ avec $\lambda = p^{\beta - 1 - r_k - r_{j+1}}$ donc

$$w - \lambda u \in S(\{u_0, u_1, \dots, u_{j+1}\}) = S(\{u_0, u_1, \dots, u_j, u\}).$$

On en conclut qu'il existe λ' tel que

$$w - \lambda u - \lambda' u \in \{u_0, u_1, \dots, u_j\}.$$

Comme $w - \lambda u - \lambda' u \in K$ il en résulte $w \in \{u\}$ contrairement à l'hypothèse de départ. On a donc $\beta = 0$ et l'exposant de $p w$ est

$$e(p w) = \sup_{i \leq j+1} [\varphi(r_i) - r_{i-1} - (\varphi(r_i) - r_{j+1})] = r_{j+1}.$$

L'exposant de w est donc $1 + r_{j+1}$. Quitte à retrancher à w un élément du socle de $\{u_0, u_1, \dots, u_{j+1}\}$, on peut supposer que

$$w = \sum_{i=1}^{j+1} p^{\varphi(r_i) - r_{j+1} - 1} u_i.$$

On voit alors que $h(w) = \varphi(r_{j+1}) - r_{j+1} - 1$, ce qui permet de calculer l'indicatrice de w :

$$\begin{aligned} \varphi_w(1 + r_{j+1}) &= e(w) + h(w) = \varphi_u(r_{j+1}) > \varphi_u(1 + r_{j+1}), \\ \varphi_w(r) &= \varphi_u(r) \quad \text{si } r \leq r_{j+1}. \end{aligned}$$

Le socle de $\{w\}$ coïncide avec le socle de $\{u\}$ comme on le voit en formant $p^{r_{j+1}} w = p^{\varphi(r_1) - 1} u_1$. On voit que φ_w est strictement $\succ \varphi_u$ en contradiction avec une hypothèse du théorème, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] CHARLES (Bernard). — Étude des groupes abéliens primaires de type $\leq \omega$, *Ann. Univ. Saraviensis*, Scientia, t. 4, 1955, p. 184-199.
- [2] FUCHS (László). — *Abelian groups*. — Budapest, 1958.

(Manuscrit reçu le 3 février 1960.)

Bernard CHARLES,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences,
Montpellier (Hérault).