BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

**Sur les $C^*$-algèbres**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 88 (1960), p. 95-112

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__95_0>

*Bull. Soc. math. France*,
88, 1960, p. 95 à 112.

# SUR LES $C^*$-ALGÈBRES

par

JACQUES DIXMIER
(Paris).

## Introduction.

Soit $A$ une $C^*$-algèbre (c'est-à-dire une algèbre de Banach involutive dans laquelle la norme vérifie l'axiome $\| x^* x \| = \| x \|^2$). Nous noterons $A^j$ l'ensemble des idéaux primitifs de $A$, muni de la topologie de Jacobson : rappelons que, dans cette topologie, l'adhérence d'un ensemble d'idéaux primitifs $(P_i)$ est l'ensemble des idéaux primitifs contenant $\cap P_i$.

Par définition, une $CCR$-algèbre est une $C^*$-algèbre $A$ satisfaisant à la condition suivante : pour toute représentation irréductible $\pi$ de $A$ dans un espace hilbertien, les opérateurs $\pi(x)$ $(x \in A)$ sont compacts. Pour une $CCR$-algèbre $A$, KAPLANSKY a établi les propriétés suivantes :

1. $A^j$ est un espace de Baire ([1]; autrement dit, toute réunion dénombrable d'ensembles fermés sans points intérieurs est sans point intérieur). Ceci résulte de [7], théorème 5.1, du fait qu'une partie ouverte de $A^j$ s'identifie à $I^j$, où $I$ est un idéal bilatère fermé de $A$ ([7], lemme 4.1), et du fait que $I$ est une $CCR$-algèbre (*cf.*, par exemple, [7], théorème 7.4).

2. Si $A$ n'est pas primitive, il existe dans $A^j$ au moins deux parties ouvertes non vides disjointes. (Ceci résulte par exemple de [7], lemme 7.4, et du fait que, si deux idéaux bilatères $I$ et $J$ de $A$ ont un produit nul, tout idéal primitif de $A$ contient, soit $I$, soit $J$.)

3. Il existe dans $A^j$ une partie ouverte localement compacte partout dense. (Ceci résulte de [7], théorème 6.2, en considérant dans $A^j$ une partie ouverte séparée maximale.)

Bien entendu, les propriétés 1 et 2 sont des conséquences de 3. (En fait, dans [7], on doit établir la propriété 1 d'abord.)

Dans la première partie de cet article, nous montrerons que, pour toute $C^*$-algèbre $A$, la propriété 1 est vraie; de même pour la propriété 2, du moins si $A$ est séparable (le problème reste ouvert dans le cas général).

Dans la deuxième partie, nous construirons un exemple de $C^*$-algèbre $A$ mettant la propriété 3 en défaut : plus précisément, dans $A^j$, toute partie ouverte non vide est non séparée.

Une $GCR$-algèbre est une $C^*$-algèbre admettant une suite de composition (éventuellement transfinie) à quotients $CCR$ (*cf.* [7]). (Alors que les groupes de Lie semi-simples ou nilpotents ont pour $C^*$-algèbres des $CCR$-algèbres, beaucoup de groupes de Lie résolubles ont pour $C^*$-algèbres des $GCR$-algèbres.) On sait [3] que deux représentations irréductibles de même noyau d'une $GCR$-algèbre sont équivalentes. Dans la troisième partie de cet article, nous démontrerons la réciproque, du moins pour les $C^*$-algèbres séparables.

## Notations et rappels.

Par « homomorphisme » de $C^*$-algèbres, on entend toujours $\bigstar$-homomorphisme ; par « représentation » d'une $C^*$-algèbre dans un espace hilbertien, on entend toujours $\bigstar$-représentation. Si $A$ est une $C^*$-algèbre et $I$ un idéal bilatère fermé de $A$, $I$ est auto-adjoint, et $A/I$ est une $C^*$-algèbre; si $\varphi$ est un homomorphisme de noyau $I$ de $A$ dans un $C^*$-algèbre $B$, $\varphi(A)$ est une sous-$C^*$-algèbre de $B$, et l'isomorphisme de $A/I$ sur $\varphi(A)$ déduit de $\varphi$ par passage au quotient est isométrique. Si $\pi$ est une représentation de $A$ dans un espace hilbertien, l'irréductibilité topologique de $\pi$ équivaut à son irréductibilité algébrique. Toute représentation algébriquement irréductible de $A$ dans un espace vectoriel complexe est algébriquement équivalente à une représentation de $A$ dans un espace hilbertien. Si deux représentations irréductibles de $A$ dans des espaces hilbertiens sont algébriquement équivalentes, elles sont unitairement équivalentes. Pour tout espace hilbertien $H$, nous noterons $\mathcal{L}(H)$ la $C^*$-algèbre des opérateurs linéaires continus dans $H$.

## I.

LEMME 1. — *Soient $H$ un espace hilbertien, $A$ une sous-$C^*$-algèbre de $\mathcal{L}(H)$, telle que la représentation identique de $A$ dans $H$ soit topologiquement irréductible. Soient $\xi$ et $\eta$ des vecteurs de $H$ tels que $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| < \varepsilon$, et tels qu'il existe un opérateur hermitien de $\mathcal{L}(H)$ transformant $\xi$ en $\eta$ [autrement dit, tels que $(\xi \mid \eta)$ soit réel]. Alors, il existe un élément hermitien $x$ de $A$ tel que $x\xi = \eta$ et $\|x\| < 2\varepsilon$.*

Cf. [6], p. 274. Le lemme n'est pas explicitement énoncé dans [6] (avec la majoration $\|x\| < 2\varepsilon$), mais le raisonnement de [6] donne en fait ce résultat.

Du lemme 1, KADISON déduit que, pour les représentations des $C^*$-algèbres dans un espace hilbertien, l'irréductibilité topologique équivaut à l'irréductibilité algébrique.

LEMME 2. — *Soient $A$ une $C^*$-algèbre, $I$ un idéal bilatère fermé de $A$, $P$ un idéal primitif de $A$, $\rho$ une représentation de $A$ de noyau $P$ dans un espace hilbertien $H$, $\xi$ et $\eta$ des vecteurs de $H$ tels que $\|\xi\| = 1$, $\|\eta\| < \varepsilon$. On suppose $P \not\supset I$. S'il existe un opérateur hermitien de $\mathcal{L}(H)$ transformant $\xi$ en $\eta$, il existe un élément hermitien $a$ de $I$ tel que $\rho(a)\xi = \eta$ et $\|a\| < 2\varepsilon$.*

Puisque $\rho$ est algébriquement irréductible et que $\rho(I) \neq \{0\}$, la restriction de $\rho$ à $I$ est algébriquement irréductible [5]. D'après le lemme 1, il existe un élément hermitien $h$ de $\rho(I)$, de norme $< 2\varepsilon$, tel que $h\xi = \eta$. Or, l'application de $I/(I \cap P)$ sur $\rho(I)$ déduite de $\rho$ est isométrique. Donc il existe un élément $b$ de $I$ tel que $\|b\| < 2\varepsilon$ et $h = \rho(b)$. Soit $a = \frac{1}{2}(b + b^*) \in I$. On a $\|a\| < 2\varepsilon$, $\rho(a) = \frac{1}{2}(h + h^*) = h$, et $a$ est hermitien.

LEMME 3. — *Soient $A$ une $C^*$-algèbre à élément unité, $a$ un élément hermitien de $A$, et $E$ un ensemble fermé de nombres réels. L'ensemble des $I \in A^j$, tels que l'image canonique de $a$ dans $A/I$ ait un spectre contenu dans $E$, est une partie fermée de $A^j$.*

Ceci est l'adaptation évidente du lemme 4.2 de [7] au cas d'une $C^*$-algèbre à élément unité.

THÉORÈME 1. — *Soient $A$ une $C^*$-algèbre. Alors $A^j$ est un espace de Baire.*

Comme toute partie ouverte de $A^j$ est l'espace des idéaux primitifs d'un idéal bilatère fermé de $A$, on est ramené à prouver ceci :

Soit $(C_1, C_2, \ldots)$ une suite croissante de parties fermées rares ($=$ sans points intérieurs) de $A^j$. Alors $A^j \neq C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ (si $A^j \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $A \neq \{0\}$).

La démonstration consiste pour les trois quarts à recopier celle de [7], théorème 5.1. Nous considérerons d'abord le cas où $A$ possède un élément unité. Supposons que $A^j = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$. Nous allons définir par récurrence les objets suivants :

*a*. Une suite strictement croissante d'entiers $k(1), k(2), \ldots$;

*b*. Des idéaux primitifs $P_1, P_2, \ldots$ de $A$; soit $\rho_j$ une représentation de $A$ de noyau $P_j$ dans un espace hilbertien $H_j$;

*c*. Un vecteur $\xi_j$ de norme 1 dans $H_j$;

*d*. Des éléments hermitiens $a_{ij}$ de $A$, définis pour $j = 1, 2, \ldots$ et $1 \leqq i \leqq j$ satisfaisant aux propriétés que voici :

1° Si $I_j$ désigne l'intersection des noyaux des représentations de $C_{k(j)}$, on a $P_j \not\supset I_j$, $P_j \supset I_{j+1}$;

2° $\rho_j(a_{ij})\xi_j = -\xi_j$;

3° $a_{ij} \in I_i$;

4° $a_{ij} - a_{i,j-1} \in I_j$;

5° $\| a_{ij} - a_{i,j-1} \| \leqq 2^{-j}$.

On pose $k(1) = 1$. Puisque $C_1 \neq A^j$, il existe un idéal primitif $P_1$ tel que $P_1 \not\supset I_1$, ce qui permet de choisir $\rho_1$ et $H_1$. D'après le lemme 2, il existe un élément hermitien $a_{11}$ dans $I_1$ et un vecteur $\xi_1$ de norme 1 dans $H_1$ tels que $\rho_1(a_{11})\xi_1 = -\xi_1$. Supposons définis les $k(j)$, les $P_j$, les $\xi_j$ et les $a_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq j \leqq n$, de façon à satisfaire aux propriétés précédentes. Nous allons définir $k(n+1)$, $P_{n+1}$, $\xi_{n+1}$ et les $a_{i,n+1}$.

Puisque $A^j = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, il existe un $k(n+1) > k(n)$ tel que $P_n \in C_{k(n+1)}$. On a alors $I_{n+1} \subset P_n$. Posons

$$b_n = (1 + a_{1n})^2 + \ldots + (1 + a_{nn})^2.$$

On a $\rho_n(b_n)\xi_n = 0$, donc 0 appartient au spectre de l'image canonique de $b_n$ dans $A/P_n$. Il existe un idéal primitif $P_{n+1}$ ne contenant pas $I_{n+1}$ tel que le spectre de l'image canonique de $b_n$ dans $A/P_{n+1}$ rencontre l'intervalle $]-2^{-2n-4}, 2^{-2n-4}[$ (sinon, le spectre de $b_n$ modulo $I$ serait contenu dans le fermé complémentaire pour tout $I \in A^j - C_{k(n+1)}$, donc, compte tenu du lemme 3 et du fait que $C_{k(n+1)}$ est rare, pour tout $I \in A^j$). Nous venons donc de choisir $P_{n+1}$; choisissons $\rho_{n+1}$ et $H_{n+1}$. Il existe un vecteur $\xi_{n+1}$ de norme 1 dans $H_{n+1}$ tel que $\| \rho_{n+1}(b_n)\xi_{n+1} \| < 2^{-2n-4}$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} \| (1 + \rho_{n+1}(a_{in}))\xi_{n+1} \|^2 = \sum_{i=1}^{n} ((1 + \rho_{n+1}(a_{in}))^2 \xi_{n+1} \mid \xi_{n+1})$$
$$= (\rho_{n+1}(b_n)\xi_{n+1} \mid \xi_{n+1}) < 2^{-2n-4},$$

donc

$$\| \rho_{n+1}(1 + a_{in})\xi_{n+1} \| < 2^{-n-2} \quad \text{pour tout } i.$$

D'après le lemme 2, il existe un élément hermitien $g_i$ de $I_{n+1}$, de norme $< 2^{-n-1}$, tel que

$$\rho_{n+1}(g_i)\xi_{n+1} = \rho_{n+1}(1 + a_{in})\xi_{n+1}.$$

Posons alors

$$a_{i,n+1} = a_{in} - g_i \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq n.$$

On a

$$a_{i,n+1} - a_{in} \in I_{n+1}, \qquad \text{donc} \quad a_{i,n+1} \in I_i + I_{n+1} = I_i,$$

et

$$\| a_{i,n+1} - a_{in} \| < 2^{-n-1}.$$

D'autre part, $\rho_{n+1}(a_{i,n+1})\xi_{n+1} = -\xi_{n+1}$. Pour achever la construction par récurrence, il suffit de définir $a_{n+1,n+1} \in I_{n+1}$ tel que $\rho_{n+1}(a_{n+1,n+1})\xi_{n+1} = -\xi_{n+1}$, ce qui est possible par un nouvel emploi du lemme 2.

Ceci posé, la suite $(a_{ii}, a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \ldots)$ converge d'après la propriété 5 vers un élément $c_i$, qui appartient à $I_i$ d'après la propriété 3. D'autre part, soit $j \geqq i$; les éléments $a_{i,j+1} - a_{ij}, a_{i,j+2} - a_{i,j+1}, \ldots$ appartiennent à $I_{j+1}$, donc à $P_j$, d'après les propriétés 4 et 1; donc

$$\rho_j(c_i)\xi_j = \rho_j(a_{ij})\xi_j = -\xi_j \quad \text{d'après la propriété 2.}$$

Soit $I = A(1 + c_1) + A(1 + c_2) + \ldots$. Si $I \neq A$, $I$ est contenu dans un idéal à gauche maximal $I'$; soient $Q$ un idéal primitif de $A$ contenu dans $I'$, et $n$ un entier tel que $I_n \subset Q$; pour tout $x \in A$, on a

$$x = x(1 + c_n) - xc_n \in I + I_n \subset I',$$

ce qui est absurde. Donc $I = A$. Il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que

$$x_1(1 + c_1) + \ldots + x_n(1 + c_n) = 1.$$

Alors

$$\xi_n = \rho_n(x_1)\,(1 + \rho_n(c_1))\xi_n + \ldots + \rho_n(x_n)\,(1 + \rho_n(c_n))\xi_n = 0,$$

ce qui est absurde.

Enfin, si $A$ n'a pas d'élément unité, $A^j$ s'identifie au complémentaire d'un point fermé rare $\omega$ dans $B^j$, $B$ étant la $C^*$-algèbre déduite de $A$ par adjonction d'un élément unité. Alors $C_1 \cup \{\omega\}, C_2 \cup \{\omega\}, \ldots$ sont fermés et rares, donc il existe un point de $A^j$ qui n'appartient pas à leur réunion.

Théorème 2. — *Soit A une $C^*$-algèbre séparable non primitive. Il existe dans $A^j$ deux parties ouvertes non vides disjointes.*

Raisonnant par l'absurde, supposons que toute partie ouverte non vide de $A^j$ soit partout dense. Soit $x \in A$. Pour tout $P \in A^j$, soit $x(P)$ l'image canonique de $x$ dans $A/P$. Alors la fonction $P \to \| x(P) \|$ est semi-continue inférieurement ([2], lemme 2.1). Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble des $P \in A^j$ tels que $\| x(P) \| > \| x \| - \varepsilon$ est une partie ouverte de $A^j$, non vide (car $\| x \| = \sup_{P \in A^j} \| x(P) \|$), donc partout dense.

Soit $(x_1, x_2, \ldots)$ une suite partout dense dans $A$. Pour tout couple d'entiers $i > 0$, $j > 0$, soit $U_{ij}$ l'ensemble des $P \in A^j$ tels que $\| x_i(P) \| > \| x_i \| - 1/j$. D'après ce qui précède, $U_{ij}$ est une partie ouverte partout dense de $A^j$. Donc (théorème 1) $V = \bigcap_{i,j} U_{ij}$ est partout dense dans $A^j$.

Soit $P \in V$. Pour tout $i$, on a

$$\| x_i \| - 1/j < \| x_i(P) \| \leqq \| x_i \| \quad \text{quel que soit } j,$$

donc $\| x_i(P) \| = \| x_i \|$. On en conclut que

$$\| x(P) \| = \| x \| \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Donc $P = \{ 0 \}$ et $A$ est primitive, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE 1. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre séparable dans laquelle le produit de deux idéaux bilatères fermés non nuls est non nul. Alors $A$ est primitive. Autrement dit, tout idéal bilatère premier fermé dans une $C^*$-algèbre séparable est primitif.*

Car si $A$ est non primitive, il existe d'après le théorème 2 deux idéaux bilatères fermés $I$ et $J$ non nuls de $A$ possédant la propriété suivante : tout idéal primitif de $A$ contient, soit $I$, soit $J$. Alors $I \cap J = \{ 0 \}$, donc $I . J = \{ 0 \}$.

COROLLAIRE 2. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre séparable.*

(i) *Si $(I_\alpha)$ est une famille totalement ordonnée d'idéaux primitifs de $A$, alors $\bigcap I_\alpha$ est un idéal primitif de $A$.*

(ii) *Tout idéal primitif de $A$ contient un idéal primitif minimal.*

Ce sont là des propriétés connues et faciles des idéaux bilatères premiers dans les algèbres quelconques.

COROLLAIRE 3. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre séparable. Le noyau d'une représentation factorielle de $A$ est un idéal primitif.*

Ceci se déduit du corollaire 1 de la même façon que, dans [7], le théorème 3 se déduit du lemme 7.4.

REMARQUE. — Le corollaire 3 peut s'obtenir directement par une autre méthode. Soit $A$ une $C^*$-algèbre séparable, et soit $\pi$ une représentation factorielle de $A$ dans un espace hilbertien $H$. Soit $\pi = \int_S^{\oplus} \pi_t \, d\nu(t)$ une décomposition de $\pi$ en intégrale hilbertienne de représentations irréductibles. Pour toute partie $\nu$-mesurable $S'$ de $S$, soit $E_{S'}$ le projecteur correspondant dans $H$, qui est permutable à $\pi(A)$. Si $E_{S'} \neq 0$, on a

$$\| \pi(x) \| = \| E_{S'} \pi(x) \| \quad \text{pour tout } x \in A,$$

puisque $\pi(A)$ engendre un facteur. Autrement dit, $\| \pi(x) \| = \operatorname{ess\,sup}_{t \in S'} \| \pi_t(x) \|$. Il en résulte que $\| \pi_t(x) \| = \| \pi(x) \|$ sauf sur un ensemble $\nu$-négligeable $N_x$. Si $D$ est un ensemble dénombrable partout dense dans $A$, soit $N = \bigcap_{x \in D} N_x$, qui est négligeable. Pour $t \notin N$, on a $\| \pi_t(x) \| = \| \pi(x) \|$ pour tout $x \in D$, donc pour tout $x \in A$. Donc le noyau de $\pi_t$ est égal au noyau de $\pi$ pour $t \notin N$. D'où le corollaire 3.

Comme l'a remarqué J. M. G. Fell (non publié), on déduit de ce raisonnement que, si deux représentations de même noyau de $A$ sont équivalentes, les $\pi_t$ sont deux à deux équivalentes pour $t \notin N$, donc $\pi$ est de type $I$. Ce fait résulte aussi de [7], théorème 7.3, et du théorème 5 ci-dessous, mais le raisonnement de Fell est beaucoup plus simple.

## II.

Lemme 4. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre primitive. On suppose qu'il existe dans $A^j$ une partie ouverte non vide séparée $U$. Alors :*

(i) *$U$ est réduite à un point, partout dense dans $A^j$;*

(ii) *Il existe dans $A$ un plus petit idéal bilatère fermé non nul.*

Soit $P$ l'idéal $\{0\}$, qui est un élément de $A^j$. Tout idéal primitif de $A$ contient $\{0\}$, donc est adhérent à $P$. Donc $\{P\}$ est partout dense dans $A^j$. Donc $P \in U$, et $\{P\}$ est partout dense dans $U$. Puisque $U$ est séparée, $U = \{P\}$. D'où (i).

Soit $Q$ l'intersection des idéaux primitifs non nuls de $A$, c'est-à-dire l'intersection des idéaux appartenant à $A^j - \{P\}$. Puisque $\{P\}$ est ouvert, $P$ n'est pas adhérent à $A^j - \{P\}$, donc $\{0\}$ ne contient pas $Q$, donc $Q \neq \{0\}$. Comme tout idéal bilatère fermé de $A$ est l'intersection des idéaux primitifs le contenant, $Q$ est aussi l'intersection des idéaux bilatères fermés non nuls de $A$. D'où (ii). Le lemme est démontré.

Soit $(H_1, H_2, \ldots)$ une suite d'espaces hilbertiens de dimension $\aleph_0$. Soit $(\xi_i^1, \xi_i^2, \ldots)$ une base orthonormale de $H_i$. Dans le produit tensoriel hilbertien $H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots$ au sens de [9], nous considérons le produit incomplet $H$ correspondant à la $C_0$-suite $(\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, \ldots)$ ([9], déf. 3.3.1 et 4.1.1). Rappelons quelques propriétés de l'espace hilbertien $H$. Pour toute suite de vecteurs $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$, $\ldots$ tels que

$$\Sigma_i \big| \|x_i\| - 1 \big| < +\infty \qquad \text{et} \qquad \Sigma_i \big| (x_i \mid \xi_i^1) - 1 \big| < +\infty,$$

il existe un élément $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots$ de $H$ qui dépend linéairement de chaque $x_i$. Si $y_1 \in H_1$, $y_2 \in H_2$, $\ldots$ est une autre suite de vecteurs tels que

$$\Sigma_i \big| \|y_i\| - 1 \big| < +\infty \qquad \text{et} \qquad \Sigma_i \big| (y_i \mid \xi_i^1) - 1 \big| < +\infty,$$

le produit des $(x_i \mid y_i)$ est absolument convergent et

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \mid y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} (x_i \mid y_i).$$

Les $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots$ forment un ensemble total dans $H$. Les $\xi_1^{i_1} \otimes \xi_2^{i_2} \otimes \ldots$ tels que $i_n \neq 1$ seulement pour un nombre fini d'indices $n$ forment une base orthonormale de $H$, qui est donc séparable.

Pour tout entier $i \geqq 0$, on peut de même former le produit tensoriel hilbertien incomplet $H_{i+1} \otimes H_{i+2} \otimes \ldots$ correspondant à la suite $(\xi_{i+1}^1, \xi_{i+2}^1, \ldots)$, et $H$ s'identifie canoniquement à

$$(H_1 \otimes \ldots \otimes H_i) \otimes (H_{i+1} \otimes H_{i+2} \otimes \ldots).$$

Ceci posé, soit $A_i$ l'ensemble des opérateurs dans $H$ de la forme $T \otimes 1$, où $T$ est un opérateur compact dans $H_1 \otimes \ldots \otimes H_i$ et où $1$ est l'opérateur identique dans $H_{i+1} \otimes H_{i+2} \otimes \ldots$.

LEMME 5. — (i) *$A_i$ est une sous-$C^*$-algèbre séparable de $\mathcal{L}(H)$.*

(ii) *Pour $i \leqq j$, on a $A_i A_j \subset A_j$, $A_j A_i \subset A_j$.*

L'application $T \to T \otimes 1$ de $\mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_i)$ dans $\mathcal{L}(H)$ est un homomorphisme de $C^*$-algèbres, d'où (i). Soit $i \leqq j$. Si $S \in A_i$ et $S' \in A_j$, on a $S = T \otimes 1$, $S' = T' \otimes 1$ avec $T$, $T' \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_j)$, $T'$ compact. Alors $SS' = (TT') \otimes 1$, $S'S = (T'T) \otimes 1$, et $TT'$, $T'T$ sont compacts, d'où $SS' \in A_j$, $S'S \in A_j$.

LEMME 6. — *Soient $B_i = A_i + A_{i+1} + \ldots$, et $C_i$ l'adhérence uniforme de $B_i$ dans $\mathcal{L}(H)$. Alors $C_i$ est une $C^*$-algèbre séparable, et $C_1$, $C_2$, $C_3$, ... sont des idéaux bilatères fermés décroissants de $C_1$.*

D'après le lemme 5 (ii), $B_i$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(H)$, et $B_i$ est un idéal bilatère de $B_1$. D'où le lemme.

LEMME 7. — *La somme des $A_i$ est directe.*

Soient $i < j$, et montrons que $(A_1 + \ldots + A_i) \cap (A_{i+1} + \ldots + A_j) = \{0\}$. Un élément de cette intersection est, d'une part de la forme $T \otimes 1$, avec $T \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_i)$, et d'autre part de la forme $T_{i+1} \otimes 1 + \ldots + T_j \otimes 1$, où

$$T_{i+1} \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_{i+1}), \qquad \ldots, \qquad T_j \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_j),$$

$T_{i+1}$, ..., $T_j$ étant compacts. Soit $a \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_i$. Quand $n \to +\infty$, les vecteurs

$$a \otimes \xi_{i+1}^n \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_{i+1}, \qquad a \otimes \xi_{i+1}^n \otimes \xi_{i+2}^1 \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_{i+2}, \qquad \ldots,$$
$$a \otimes \xi_{i+1}^n \otimes \xi_{i+2}^1 \otimes \ldots \otimes \xi_j^1 \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_j$$

tendent faiblement vers zéro. Donc les transformés de ces vecteurs respectivement par $T_{i+1}$, ..., $T_j$ tendent fortement vers zéro. Donc

$$(T_{i+1} \otimes 1 + \ldots + T_j \otimes 1)(a \otimes \xi_{i+1}^n \otimes \xi_{i+2}^1 \otimes \xi_{i+3}^1 \otimes \ldots \otimes \xi_j^1 \otimes \xi_{j+1}^1 \otimes \ldots)$$

tend fortement vers zéro. Donc

$$\| (T \otimes 1)(a \otimes \xi_{i+1}^n \otimes \xi_{i+2}^1 \otimes \xi_{i+3}^1 \otimes \ldots) \| = \| Ta \|$$

tend vers zéro. Donc $Ta = 0$ et finalement $T = 0$. Ceci montre que

$$(A_1 + \ldots + A_i) \cap (A_{i+1} + A_{i+2} + \ldots) = \{0\}.$$

On a, de même, $(A_1 + \ldots + A_{i-1}) \cap A_i = \{0\}$. Donc

$$A_i \cap (A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{i+1} + A_{i+2} + \ldots) = \{0\}.$$

LEMME 8. — *Si $i \leqq j$, $A_i + \ldots + A_j$ est fermé.*

On procède par récurrence sur $j - i$. Le lemme est évident si $i = j$. Supposons prouvé que $A_{i+1} + \ldots + A_j$ est fermé. Soit $A = \overline{A_i + \ldots + A_j}$. Alors $A_{i+1} + \ldots + A_j$ est un idéal bilatère fermé de $A$ d'après le lemme 5 (ii). Dans l'homomorphisme canonique $A \to A/(A_{i+1} + \ldots + A_j)$, l'image canonique de $A_i$ est, d'une part partout dense, d'autre part fermée d'après les propriétés générales des $C^*$-algèbres. Donc $A = A_i + \ldots + A_j$.

LEMME 9. — *Soit $x \in A_1 + \ldots + A_i$. La distance de $x$ à $A_{i+1} + \ldots + A_j$ est égale à $\| x \|$.*

D'après le lemme 8, $A_1 + \ldots + A_j$ est une $C^*$-algèbre. D'après les lemmes 8 et 5 (ii), $A_{i+1} + \ldots + A_j$ est un idéal bilatère fermé dans cette $C^*$-algèbre. L'homomorphisme canonique

$$\varphi : \quad A_1 + \ldots + A_j \to (A_1 + \ldots + A_j)/(A_{i+1} + \ldots + A_j)$$

a une restriction à $A_1 + \ldots + A_i$ qui est injective (lemme 7), donc isométrique. L'égalité $\| \varphi(x) \| = \| x \|$ n'est autre que le lemme, si l'on se souvient de la définition de la norme dans $(A_1 + \ldots + A_j)/(A_{i+1} + \ldots + A_j)$.

LEMME 10. — $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots = \{0\}$.

Soit $x \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \ldots$. On va construire une suite croissante d'entiers $k(1) < k(2) < \ldots$ et des $x_i \in A_{k(i)} + A_{k(i)+1} + \ldots + A_{k(i+1)-1}$, tels que $\| x_i - x \| \leqq 1/i$. On prend $k(1) = 1$. Il existe $x_1 \in B_{k(1)}$ tel que $\| x_1 - x \| \leqq 1$. Par définition de $B_{k(1)}$, il existe $k(2) > k(1)$ tel que $x_1 \in A_{k(1)} + \ldots + A_{k(2)-1}$. Puisque $x \in C_{k(2)}$, il existe $x_2 \in B_{k(2)}$ tel que $\| x_2 - x \| \leqq 1/2$. Par définition de $B_{k(2)}$, il existe un entier $k(3) > k(2)$ tel que $x_2 \in A_{k(2)} + \ldots + A_{k(3)-1}$, .... On a $x_i \to x$, donc $x_i - x_{i+1} \to 0$. Or, d'après le lemme 9, $\| x_i \| \leqq \| x_i - x_{i+1} \|$. Donc $x_i \to 0$ et $x = 0$.

LEMME 11. — *La $C^*$-algèbre $C_1$ est primitive.*

On va voir en effet que la représentation identique de $C_1$ dans $H$ est topologiquement irréductible. Soit $C$ l'adhérence faible de $C_1$ dans $\mathcal{L}(H)$. On a

$T \otimes 1 \in C_1$ pour tout opérateur compact $T$ de $\mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_i)$. Donc $S \otimes 1 \in C$ pour tout $S \in \mathcal{L}(H_1 \otimes \ldots \otimes H_i)$. Donc $C = \mathcal{L}(H)$, d'après le théorème X(II) de [9]. (On pourrait aussi utiliser le corollaire 2 du théorème 2).

Rapprochant les lemmes 4, 10 et 11, on voit que :

THÉORÈME 3. — *Il existe une $C^*$-algèbre primitive séparable non nulle $A$ telle que, dans l'espace $A^j$, toute partie ouverte non vide soit non séparée.*

## III.

LEMME 12. — *Soient $H$ un espace hilbertien, $A$ une sous-$C^*$-algèbre de $\mathcal{L}(H)$ ne contenant pas d'opérateur compact non nul, $\alpha$ un nombre $> 0$, $x$ un élément hermitien positif de $A$ tel que $\|x\| > \alpha$, et $K$ un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de $H$ tel que $P_K x P_K = x$. Il existe alors des éléments hermitiens positifs $y$, $z$ de $A$ et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie $K'$ de $K$ tels que :*

(i) $P_K y P_K = y$, $\|y\| = \alpha$, $y\xi = \alpha\xi$ *pour* $\xi \in K'$;
(ii) $P_{K'} z P_{K'} = z$, $z \neq 0$;
(iii) *tout vecteur de $H$ annulé par $x$ est annulé par $y$ et $z$.*

La décomposition spectrale de $x$ montre qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $K'$ de $H$ tel que :

1° $xP_{K'} = P_{K'}x \geqq \alpha P_{K'}$;
2° $x(1 - P_{K'}) = (1 - P_{K'})x \leqq \alpha(1 - P_{K'})$;
3° $\alpha$ n'est pas valeur propre de $x(1 - P_{K'})$.

Comme $P_K x P_K = x$, on a $K' \subset K$. Soit $S$ le spectre de $x$. Puisque $\|x\| > \alpha$, on a $S' = S \cap ]\alpha, +\infty[ \neq \emptyset$. Si $S'$ était fini et composé de valeurs propres de multiplicités finies, une fonction continue convenable de $x$ serait un opérateur non nul de rang fini, et appartiendrait à $A$, contrairement à l'hypothèse faite sur $A$. Donc, ou bien $S'$ est infini, ou bien certains points de $S'$ sont valeurs propres de multiplicité infinie. Dans les deux cas, on conclut que $K'$ est de dimension infinie. Soit $t \to f(t)$ la fonction continue de variable réelle définie par

$f(t) = 0$ pour $t \leqq 0$;
$f(t) = t$ pour $0 \leqq t \leqq \alpha$;
$f(t) = \alpha$ pour $t \geqq \alpha$.

Soient $g(t) = f(t - \alpha)$, $y = f(x)$, $z = g(x)$. Alors, $y$ et $z$ sont des éléments hermitiens positifs de $A$ vérifiant la propriété (iii) de l'énoncé, donc aussi $P_K y P_K = y$. Par construction de $f$, on a $y\xi = x\xi$ pour $\xi$ orthogonal à $K'$ et

$y\xi = \alpha\xi$ pour $\xi \in K'$; donc $\|y\| = \alpha$. Par construction de $g$, on a $z \neq 0$, et $z\xi = 0$ pour $\xi$ orthogonal à $K'$, donc $P_{K'} z P_{K'} = z$.

LEMME 13. — *Soient $H$ un espace hilbertien, $A$ une sous-C*-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(H)$ ne contenant pas d'opérateur compact non nul, $I$ un idéal bilatère fermé non nul de $A$, $\alpha$ un nombre $> 0$, $x$ et $y$ des éléments hermitiens positifs de $A$, avec $y \neq 0$, et $K$ un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de $H$ tels que*

$$P_K y P_K = y; \qquad x\xi = \|x\|\xi \quad \textit{pour } \xi \in K.$$

*Soient, en outre, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des vecteurs de $H$.*

*Il existe alors des éléments hermitiens positifs $x'$, $y'$ de $I$ et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie $K'$ de $K$ tels que*

(i) $P_K x' P_K = x'$, $\|x'\| = \alpha$, $x'\xi = \alpha\xi$ *pour* $\xi \in K'$, $x'\xi_1 = \ldots = x'\xi_n = 0$;
(ii) $\|x + x'\| = \|x\| + \|x'\|$;
(iii) $P_{K'} y' P_{K'} = y'$, $y' \neq 0$.

Si $y^{1/2}(H)$ était de dimension finie, $A$ contiendrait l'opérateur compact $y^{1/2}$, contrairement à l'hypothèse faite sur $A$. Donc $y^{1/2}(H)$ est de dimension infinie et contient, par suite, des éléments non nuls orthogonaux à $y^{1/2}\xi_1, \ldots, y^{1/2}\xi_n$. Donc il existe $\eta \in H$ tel que $y^{1/2}\eta$ soit non nul et orthogonal à $y^{1/2}\xi_1, \ldots, y^{1/2}\xi_n$. L'algèbre d'opérateurs $I$ est irréductible ([5]). D'après [6], il existe un élément hermitien $u$ de $I$ tel que

$$uy^{1/2}\eta = y^{1/2}\eta, \qquad uy^{1/2}\xi_1 = \ldots = uy^{1/2}\xi_n = 0.$$

En remplaçant $u$ par $|u|$, on peut en outre supposer $u$ positif. Soit $v = y^{1/2}uy^{1/2}$, qui est un élément hermitien positif de $I$. On a

$$v\xi_1 = \ldots = v\xi_n = 0, \qquad v\eta = y\eta \neq 0, \qquad \text{donc} \quad v \neq 0;$$

en outre,

$$v \leq y^{1/2}\|u\|y^{1/2} = \|u\|y, \qquad \text{donc} \quad P_K v P_K = v.$$

En multipliant au besoin $v$ par un scalaire, on voit qu'on a construit un élément hermitien positif $v$ de $I$ tel que

$$P_K v P_K = v, \qquad v\xi_1 = \ldots = v\xi_n = 0, \qquad \|v\| > \alpha.$$

Appliquons le lemme 12 (dans lequel on remplace $A$ par $I$ et $x$ par $v$). On obtient des éléments hermitiens positifs $x'$, $y'$ de $I$ et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie $K'$ de $K$ tels que :

(i) $P_K x' P_K = x'$, $\|x'\| = \alpha$, $x'\xi = \alpha\xi$ pour $\xi \in K'$;
(ii) $P_{K'} y' P_{K'} = y' \neq 0$;
(iii) $x'\xi_1 = \ldots = x'\xi_n = 0$.

Si $\zeta \in K' \subset K$, on a

$$(x + x')\zeta = \| x \| \zeta + \alpha\zeta = (\| x \| + \| x' \|)\zeta,$$

donc

$$\| x + x' \| \geqq \| x \| + \| x' \|, \qquad \text{donc} \quad \| x + x' \| = \| x \| + \| x' \|.$$

**Lemme 14.** — *Soient $H$ un espace hilbertien séparable, $A$ une sous-$C^*$-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(H)$ ne contenant pas d'opérateur compact non nul, $A = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ une suite d'idéaux bilatères fermés non nuls de $A$.*

*Il existe alors un élément hermitien positif $x$ de $A$ tel que :*

(i) *$\| x \|$ n'est pas valeur propre de $x$;*

(ii) *$\| x \bmod I_n \| < \| x \|$ pour tout $n$.*

(*On note $x \bmod I_n$ l'image canonique de $x$ dans $A/I_n$.*)

Soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ une base orthonormale de $H$.

Il existe des éléments hermitiens positifs $x_0$, $y_0$ de $I_0$ et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie $K_0$ de $H$ tels que $\| x_0 \| = 1$, $x_0 \xi = \xi$ pour $\xi \in K_0$, $P_{K_0} y_0 P_{K_0} = y_0 (y_0 \neq 0)$. (On le voit par exemple en appliquant le lemme 12 avec $\alpha = 1$, $K = H$, $x$ hermitien positif dans $A$ de norme $> 1$.)

D'après le lemme 13 (appliqué à $H$, $I_0$, $I_1$, $1/2$, $x_0$, $y_0$, $K_0$, $\xi_1$) il existe des éléments hermitiens positifs $x_1$, $y_1$ de $I_1$, et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie $K_1$ de $K_0$ tels que :

(i) $P_{K_0} x_1 P_{K_0} = x_1$, $\| x_1 \| = 1/2$, $(x_0 + x_1)\xi = [1 + (1/2)]\xi$ pour $\xi \in K_1$, $x_1 \xi_1 = 0$;

(ii) $\| x_0 + x_1 \| = 1 + (1/2)$;

(iii) $P_{K_1} y_1 P_{K_1} = y_1$, $y_1 \neq 0$.

D'après le lemme 13 (appliqué à $H$, $I_0$, $I_2$, $1/4$, $x_0 + x_1$, $y_1$, $K_1$, $\xi_1$, $\xi_2$), il existe des éléments hermitiens positifs $x_2$, $y_2$ de $I_2$ et un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie $K_2$ de $K_1$ tels que :

(i) $P_{K_1} x_2 P_{K_1} = x_2$, $\| x_2 \| = 1/4$, $(x_0 + x_1 + x_2)\xi = [1 + (1/2) + (1/4)]\xi$ pour $\xi \in K_2$, $x_2 \xi_1 = x_2 \xi_2 = 0$;

(ii) $\| x_0 + x_1 + x_2 \| = 1 + (1/2) + (1/4)$;

(iii) $P_{K_2} y_2 P_{K_2} = y_2$, $y_2 \neq 0$.

Par récurrence, on obtient ainsi deux suites $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ d'éléments hermitiens positifs de $A$, avec $x_n \in I_n$, $y_n \in I_n$, et une suite $(K_0, K_1, K_2, \ldots)$ de sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie de $H$ tels que :

(i) $$P_{K_{n-1}} x_n P_{K_{n-1}} = x_n, \qquad \| x_n \| = 1/2^n,$$
$$(x_0 + x_1 + \ldots + x_n)\xi = [1 + (1/2) + \ldots + 1/2^n]\xi \text{ pour } \xi \in K_n,$$
$$x_n \xi_1 = x_n \xi_2 = \ldots = x_n \xi_n = 0;$$

(ii) $\| x_0 + x_1 + \ldots + x_n \| = 1 + (1/2) + \ldots + 1/2^n$;

(iii) $P_{K_n} y_n P_{K_n} = y_n$, $y_n \neq 0$.

Alors la série $x_0+x_1+\ldots$ converge vers un élément hermitien positif $x$ de $A$. On a $\| x \| = \lim \| x_0+x_1+\ldots+x_n \| = 2$. D'autre part, $x_n+x_{n+1}+\ldots \in I_n$, donc

$$\| x \bmod I_n \| = \| (x_0+\ldots+x_{n-1}) \bmod I_n \|$$
$$\leqq \| x_0+\ldots+x_{n-1} \| = 1+\ldots+1/2^{n-1} < \| x \|.$$

Supposons enfin qu'il existe un

$$\xi = \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\ldots \in H, \qquad \text{avec} \quad |\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\ldots = 1,$$

tel que $x\xi = 2\xi$. On aurait

$$\begin{aligned} 2 &= (x\xi \mid \xi) = (x_0\xi \mid \xi) + (x_1\xi \mid \xi) + \ldots \\ &= (x_0(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\ldots) \mid \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\ldots) \\ &\quad + (x_1(\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3+\ldots) \mid \lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3+\ldots) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\leqq \| x_0 \| + \| x_1 \| (1-|\lambda_1|^2) + \| x_2 \| (1-|\lambda_1|^2-|\lambda_2|^2) + \ldots \\ &= 2 - \| x_1 \| . |\lambda_1|^2 - \| x_2 \| (|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2) - \ldots, \end{aligned}$$

d'où $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$, ce qui est absurde puisque $|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\ldots \neq 0$.

Lemme 15. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre primitive séparable. Il existe une suite $I_1$, $I_2$, ... d'idéaux bilatères fermés non nuls décroissants de $A$ tels que tout idéal primitif non nul de $A$ contienne l'un des $I_n$.*

Puisque $A$ est séparable, la topologie de $A^j$ admet une base dénombrable [3]. En particulier, l'idéal $\{0\}$ de $A$, qui est un élément de $A^j$, admet un système fondamental dénombrable ($U_1$, $U_2$, ...) de voisinages ouverts. On peut supposer $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$. Soit $I_n$ l'intersection des idéaux de $A^j - U_n$. Alors les $I_n$ sont des idéaux bilatères fermés décroissants de $A$. Puisque $U_n \neq \emptyset$, on a $I_n \neq \{0\}$. Soit $P$ un idéal primitif non nul de $A$. L'ensemble $F$ des idéaux primitifs de $A$ contenant $P$ est une partie fermée de $A^j$ ne contenant pas $\{0\}$. Donc il existe un entier $n$ tel que $F \subset A^j - U_n$, et ceci entraîne $I_n \subset P$.

Lemme 16. — *Soient $A$ une $C^*$-algèbre, $\pi$ une représentation irréductible de $A$ dans un espace hilbertien $H$, et $I$ l'ensemble des opérateurs compacts de $H$. On a $\pi(A) \cap I = \{0\}$ ou $\pi(A) \supset I$. Ce dernier cas se présente toujours si $A$ est GCR.*

Si $\pi(A) \cap I \neq \{0\}$, $\pi(A) \cap I$ est un idéal bilatère non nul de $\pi(A)$. Donc la représentation identique de $\pi(A) \cap I$ est irréductible [5]. Comme $\pi(A) \cap I \subset I$, on en conclut que $\pi(A) \cap I = I$ (*cf.* par exemple [7], p. 222-223), c'est-à-dire que $I \subset \pi(A)$. Enfin, si $A$ est *GCR*, il en est de même de $\pi(A)$ [7], donc $\pi(A)$ contient un idéal bilatère *CCR* non nul, soit $J$. L'application identique de $J$ est irréductible, donc $J = I$.

THÉORÈME 4. — *Soient $H$ un espace hilbertien, $A$ une sous-$C^*$-algèbre irréductible séparable de $\mathcal{L}(H)$. On suppose que toute représentation irréductible de $A$ de noyau $\{0\}$ est équivalente à la représentation identique. Alors $A$ contient l'ensemble $I$ des opérateurs compacts de $H$.*

D'après le lemme 15, il existe une suite $I_1$, $I_2$, ... d'idéaux bilatères fermés non nuls décroissants de $A$ tels que tout idéal primitif non nul de $A$ contienne l'un des $I_n$. Puisque $A$ est irréductible et séparable, $H$ est séparable. Si $A \cap I = \{0\}$, nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme 14. D'après ce lemme, il existe un élément hermitien positif $x$ de $A$ tel que $\|x\|$ ne soit pas valeur propre de $x$ et que $\|x \bmod I_n\| < \|x\|$ pour tout $n$. Il existe une représentation irréductible $\pi$ de $A$ telle que $\|x\|$ soit valeur propre de $\pi(x)$ [11]. Certainement, $\pi$ est inéquivalente à la représentation identique de $A$. Soit $P$ le noyau de $\pi$. Supposons $P \neq \{0\}$. Alors il existe un entier $n$ tel que $I_n \subset P$. Donc $\|\pi(x)\| \leqq \|x \bmod I_n\| < \|x\|$, ce qui est absurde puisque $\|x\|$ est valeur propre de $\pi(x)$. Donc $P = \{0\}$. Mais ceci contredit l'hypothèse faite sur $A$. Donc $A \cap I \neq \{0\}$, et par suite $A \supset I$ (lemme 16).

(Ce théorème redonne facilement le théorème 4 de [10].)

LEMME 17. — *Soient $A$ une $C^*$-algèbre, et $I$ l'ensemble des $x \in A$ tel que $\pi(x)$ soit compact pour toute représentation irréductible $\pi$ de $A$. Alors $I$ est le plus grand idéal bilatère CCR de $A$.*

Il est clair que $I$ est un idéal bilatère fermé de $A$. Soit $\rho$ une représentation irréductible de $I$. Alors, $\rho$ se prolonge en une représentation irréductible $\pi$ de $A$. Pour $x \in I$, $\pi(x) = \rho(x)$ est compact. Donc $I$ est $CCR$. Enfin, soit $J$ un idéal bilatère $CCR$ de $A$. Soient $\sigma$ une représentation irréductible de $A$, $x$ un élément de $J$, et montrons que $\sigma(x)$ est compact. C'est clair si $\sigma(J) = \{0\}$. Sinon, la restriction de $\sigma$ à $J$ est irréductible, et $\sigma(x)$ est encore compact puisque $J$ est $CCR$. Donc $J \subset I$.

LEMME 18. — *Soient $A$ une $C^*$-algèbre, $U$ une partie ouverte de $A^i$, $x$ un élément de $A$. On suppose que :*

(i) *pour toute représentation irréductible $\pi$ de $A$ dans un espace hilbertien dont le noyau appartient à $U$, $\pi(x)$ est compact;*

(ii) *il existe une représentation irréductible $\pi_0$ de $A$ dont le noyau appartient à $U$ et telle que $\pi_0(x) \neq 0$.*

*Alors $A$ contient un idéal bilatère CCR non nul.*

Soit $I$ l'intersection des idéaux primitifs de $A$ qui n'appartiennent pas à $U$. Puisque $U$ est ouvert, le noyau de $\pi_0$ ne contient pas $I$. Donc la restriction de $\pi_0$ à $I$ est irréductible non nulle. Donc il existe $y \in I$ tel que $\pi_0(x)\,\pi_0(y) \neq 0$. Alors $xy$ est un élément non nul de $I$. Soit $\rho$ une représentation irréductible non nulle de $I$ dans un espace hilbertien. Elle se prolonge en une représentation irréductible $\pi$ de $A$ dont le noyau appartient à $U$. Donc $\pi(x)$ est compact, et par suite $\rho(xy) = \pi(x)\pi(y)$ est compact. Donc le plus grand idéal $J$ bilatère $CCR$ de $I$ est non nul (lemme 17). Or, $J$ est un idéal bilatère de $A$ comme il est bien connu (car $AJA = AJ^3A \subset IJI \subset J$).

THÉORÈME 5. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre séparable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$A$ est une GCR-algèbre;*

(ii) *Pour toute représentation irréductible $\pi$ de $A$ dans un espace hilbertien $H$, $\pi(A)$ contient l'ensemble des opérateurs compacts de $H$;*

(iii) *Deux représentations irréductibles de même noyau de $A$ sont équivalentes.*

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : ceci résulte aussitôt du théorème 4.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : supposons satisfaite la condition (ii). Montrons que deux représentations irréductibles $\pi_1$, $\pi_2$ de $A$ qui ont même noyau $N$ sont équivalentes. On se ramène aussitôt au cas où $N = \{0\}$. Alors $A$ contient un idéal bilatère fermé $I$ isomorphe à l'algèbre des opérateurs compacts dans un espace hilbertien. Les restrictions de $\pi_1$ et $\pi_2$ à $I$ sont équivalentes, donc $\pi_1$ et $\pi_2$ sont équivalentes.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : ceci résulte aussitôt du lemme 16.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : nous supposons satisfaite la condition (ii) et, par suite, la condition (iii).

Pour tout idéal primitif $P$ de $A$, il existe une représentation irréductible $\pi_P$ de $A$ de noyau $P$ dans un espace hilbertien $H_P$, bien déterminée à une équivalence près. Et $\pi_P(A)$ contient l'ensemble des opérateurs compacts de $H_P$. Autrement dit, il existe un idéal bilatère fermé bien déterminé de $A$ contenant $P$, que nous noterons $\tilde{P}$, tel que $\pi_P$ définisse un isomorphisme de $\tilde{P}/P$ sur la $C^*$-algèbre des opérateurs compacts de $H_P$. Choisissons un $x_P \in \tilde{P}$, hermitien positif, tel que $\|\pi_P(x_P)\| = 1$. Soit $S_P$ l'ensemble des $Q \in A^j$ tels que

$$\|x_P \bmod Q\| \geq 2/3 \qquad \text{et} \qquad \|x_P \bmod \tilde{Q}\| \leq 1/3.$$

Si $P' \in A^j - S_P$, on a $\|x_{P'} - x_P\| > 1/3$. En effet, ou bien $\|x_P \bmod P'\| < 2/3$, auquel cas

$$\|(x_{P'} - x_P) \bmod P'\| > 1 - (2/3) = 1/3;$$

ou bien $\|x_P \bmod \tilde{P}'\| > 1/3$, auquel cas

$$\|(x_{P'} - x_P) \bmod \tilde{P}'\| = \|x_P \bmod \tilde{P}'\| > 1/3.$$

Dans les deux cas, on en tire bien la conclusion annoncée.

Soit $P_1$ un point quelconque de $A^j$. Si $S_{P_1} = A^j$, nous ne définissons pas $P_2$. Si $S_{P_1} \neq A^j$, choisissons un $P_2 \in A^j - S_{P_1}$. Si $S_{P_1} \cup S_{P_2} = A^j$, nous ne définissons pas $P_3$. Si $S_{P_1} \cup S_{P_2} \neq A^j$, soit $P_3 \in A^j - (S_{P_1} \cup S_{P_2})$. On continue par induction transfinie, en définissant $P_\alpha \in A^j - \left(\bigcup_{\beta<\alpha} S_{P_\beta}\right)$ si $\bigcup_{\beta<\alpha} S_{P_\beta} \neq A^j$. D'après l'alinéa précédent, on a $\| x_{P_\alpha} - x_{P_\beta} \| > 1/3$ pour $\alpha \neq \beta$. Puisque $A$ est séparable, la famille des $P_\alpha$ est dénombrable. Changeant de notations, nous avons donc construit une suite de points $P_1, P_2, \ldots$ de $A^j$ tels que $A^j = S_{P_1} \cup S_{P_2} \cup \ldots$.

Soit $t \to f(t)$ une fonction continue croissante de variable réelle telle que $f(t) = 0$ pour $t \leq 1/3$, $f(t) = 1$ pour $t \geq 2/3$. Soit $y_i = f(x_{P_i})$, qui est un élément hermitien positif de $A$. Pour $Q \in S_{P_i}$, on a

$$\| y_i \bmod Q \| = \| f(x_{P_i} \bmod Q) \| = 1$$

et

$$\| y_i \bmod \tilde{Q} \| = \| f(x_{P_i} \bmod \tilde{Q}) \| = 0.$$

Donc $\pi_Q(y_i)$ est compact et de norme 1 pour $Q \in S_{P_i}$.

Nous utilisons maintenant le mode de raisonnement de [7], p. 242. Soit $t \to g(t)$ une fonction continue croissante de variable réelle, égale à 0 dans un voisinage de 0 et à 1 en 1. Soit $z_i = g(y_i)$, qui est un élément hermitien positif de $A$. Alors, pour $Q \in S_{P_i}$, $\pi_Q(z_i) = g(\pi_Q(y_i))$ est de norme 1, compact et de spectre fini contenu dans $[0, 1]$. Soit $S_{i,n}$ l'ensemble des $Q \in S_{P_i}$ tels que le spectre de $\pi_Q(z_i)$ soit contenu dans $\{0\} \cup [1/n, 1]$. Alors $S_{P_i} = S_{i,1} \cup S_{i,2} \cup \ldots$. Soit $t \to h_n(t)$ une fonction continue croissante de variable réelle telle que $h_n(0) = 0$, $h_n(t) = 1$ pour $t \geq 1/n$. Soit $z_{i,n} = h_n(z_i)$, qui est un élément hermitien positif de $A$. Pour $Q \in S_{i,n}$, $\pi_Q(z_{i,n})$ est un projecteur non nul de rang fini. Soit $S_{i,n,p}$ l'ensemble des $Q \in S_{i,n}$ tels que le projecteur $\pi_Q(z_{i,n})$ soit de rang $\leq p$. On a

$$S_{i,n} = S_{i,n,1} \cup S_{i,n,2} \cup \ldots,$$

donc $A^j$ est réunion de la famille dénombrable des $S_{i,n,p}$. D'après le théorème 1, il existe des indices $i_0, n_0, p_0$ tels que, posant $S = S_{i_0,n_0,p_0}$, $\overline{S}$ soit d'intérieur non vide (si $A^j \neq \emptyset$, c'est-à-dire si $A \neq \{0\}$). Soit $x = z_{i_0,n_0}$. Pour $Q \in S$, $\pi_Q(x)$ est un projecteur non nul de rang $\leq p_0$.

Nous allons en déduire que $\pi_Q(x)$ est un projecteur de rang $\leq p_0$ pour $Q \in \overline{S}$, grâce à un raisonnement dû encore à Kaplansky. D'abord, $x^2 - x \in Q$ pour $Q \in S$, donc pour $Q \in \overline{S}$, de sorte que $\pi_Q(x)$ est un projecteur pour $Q \in \overline{S}$. D'après [8], il existe un polynome non commutatif $P(X_1, \ldots, X_r)$ tel que :

1° l'algèbre des matrices à $p_0$ lignes et $p_0$ colonnes satisfait à l'identité $P(X_1, \ldots, X_r) = 0$;

2° l'algèbre des matrices à $p_0+1$ lignes et $p_0+1$ colonnes ne satisfait pas à cette identité.

Alors, quels que soient $u_1, \ldots, u_r \in A$, on a

$$P(\pi_Q(x)\pi_Q(u_1)\pi_Q(x), \quad \ldots, \quad \pi_Q(x)\pi_Q(u_r)\pi_Q(x)) = 0,$$

c'est-à-dire $P(xu_1x, \ldots, xu_rx) \in Q$, pour tout $Q \in S$, donc pour tout $Q \in \overline{S}$. Puisque $\pi_Q(A)$ est irréductible, $\pi_Q(x)\pi_Q(A)\pi_Q(x)$ est l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H_Q)$ satisfaisant à $\pi_Q(x)T = T\pi_Q(x) = T$. Ce qui précède montre que, pour $Q \in \overline{S}$, on a $P(T_1, \ldots, T_r) = 0$ quels que soient $T_1, \ldots, T_r \in \mathcal{L}(H_Q)$ tels que

$$\pi_Q(x)T_i = T_i\pi_Q(x) = T_i \qquad (1 \leqq i \leqq r).$$

Donc $\pi_Q(x)$ est de rang $\leqq p_0$ pour $Q \in \overline{S}$.

Soit $U$ l'intérieur de $\overline{S}$. Pour $Q \in U$, $\pi_Q(x)$ est compact. Puisque $U \neq \emptyset$, il existe un $Q_0 \in U \cap S$. On a $\pi_{Q_0}(x) \neq 0$. Appliquant le lemme **18**, nous avons donc prouvé ceci : si $A \neq \{0\}$, $A$ contient un idéal $I$ bilatère $CCR$ non nul.

La $C^*$-algèbre séparable $A/I$ vérifie encore la condition (ii) du théorème 4. D'après le raisonnement précédent, elle contient, si $A \neq I$, un idéal bilatère $CCR$ non nul. Continuant transfiniment, on voit que $A$ est $GCR$.

Corollaire. — *Soit $A$ une $C^*$-algèbre séparable. Pour que $A$ soit $GCR$, il faut et il suffit que tout quotient primitif de $A$ soit $GCR$.*

Remarques. — Soit $A$ une $GCR$-algèbre.

*a.* Le lemme **17** prouve que $A$ possède une suite de composition *canonique* dont les quotients sont $CCR$.

*b.* Soit $I$ le plus grand idéal $CCR$ de $A$, de sorte que $I^j$ s'identifie à une partie ouverte de $A^j$; alors $I^j$ est partout dense dans $A^j$; en effet, s'il existe une partie ouverte non vide $U$ de $A^j$ disjointe de $I^j$, $U$ correspond à un idéal bilatère fermé non nul $I'$ de $A$ tel que $I'.I = 0$; $I'$ est $GCR$, donc contient un idéal $I''$ bilatère $CCR$ non nul, et $I + I''$ est un idéal bilatère $CCR$ de $A$, ce qui est absurde.

*c.* Il est facile de voir que, si $P \in I^j$, $P$ est un idéal primitif *minimal* de $A$; j'ignore si la réciproque est exacte.

*d.* Dans le langage de [2], l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) du théorème 5 peut s'exprimer en disant que la $C^*$-algèbre séparable $B$ est $GCR$ si et seulement si $\hat{B}$ est un $T_0$-espace. De façon analogue, le théorème 4 de [10] entraîne facilement que $B$ est $CCR$ si et seulement si $\hat{B}$ est un $T_1$-espace.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*, chap. 9, 2e éd., Hermann, Paris, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1045; *Éléments de Mathématiques*, 8).

[2] FELL (J. M. G.). — The dual spaces of $C^*$-algebras, *Trans. Amer. math. Soc.* (à paraître).

[3] FELL (J. M. G.). — $C^*$-algebras with smooth dual, *Illinois J. of Math.* (à paraître).

[4] FELL (J. M. G.). — The structure of algebras of operator fields (à paraître).

[5] JACOBSON (N.). — The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, t. 67, 1945, p. 300-320.

[6] KADISON (R. V.). — Irreducible operator algebras, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, t. 43, 1957, p. 273-276.

[7] KAPLANSKY (I). — The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, p. 219-255.

[8] KAPLANSKY (I). — Groups with representations of bounded degree, *Canadian J. Math.*, t. 1, 1949, p. 105-112.

[9] NEUMANN (J. VON). — On infinite direct products, *Compositio Math.*, t. 6, 1938, p. 1-77.

[10] ROSENBERG (A.). — The number of irreducible representations of simple rings with no minimal ideals, *Amer. J. Math.*, t. 75, 1953, p. 523-530.

[11] SEGAL (I. E.). — Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 73-88.

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1959.)

Jacques DIXMIER,
Prof. Fac. Sc. Paris,
64, rue Gay-Lussac,
Paris (5e).