BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL BERGER

Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 57-71
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__57_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 57 à 71.

SUR QUELQUES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES SUFFISAMMENT PINCÉES

PAR

MARCEL BERGER

(Strasbourg).

1. **Introduction.** — Cet article contient la démonstration des théorèmes 1 et 2 ci-dessous, seulement énoncés dans un article précédent (théorèmes 11 et 12 de [1]), qui concernent les variétés riemanniennes suffisamment pincées. Rappelons brièvement quelques définitions et notations classiques qui seront nécessaires (on peut aussi se reporter à [1]).

Toute variété riemannienne considérée sera compacte et sa métrique indéfiniment différentiable. $T(V)$ (resp. T_p) désignera l'espace des vecteurs tangents à V (resp. tangents à V en p); si X, $Y \in T_p$, on désignera, quel que soit p, par $\langle X, Y \rangle$ et $\| X \|$ le produit scalaire et la norme de la structure riemannienne considérée sur V. Si p, q sont deux points de V, on notera $d(p, q)$ la distance de p à q dans l'espace métrique canoniquement associé à V; on sait que si V est complète, *a fortiori* si V est compacte, il existe toujours au moins une géodésique joignant deux points quelconques p, q de V et dont la longueur est égale à $d(p, q)$. Les géodésiques seront toujours supposées paramétrées par leur arc; si $\Gamma = \{\gamma(v)\}$ $(0 \leqq v \leqq l)$ est une géodésique, on notera $\gamma'(v) \in T_{\gamma(v)}$ son vecteur tangent en $\gamma(v)$ et l'on aura donc $\|\gamma'(v)\| = 1$ quel que soit v, et long $(\Gamma) = l$.

Lieu résiduel. — Soit $\Gamma = \{\gamma(v)\}$ $(0 \leqq v \leqq \infty)$ une géodésique infinie issue d'un point fixe p de V. Comme V est compacte, $d(p, q)$ est borné. Donc il existe v_0 tel que $d(p, \gamma(v)) = v$ pour $v \leqq v_0$ et $d(p, \gamma(v)) < v$ pour $v > v_0$. L'ensemble des $\gamma(v_0)$, lorsque Γ parcourt l'ensemble des géodésiques issues de p, est appelé *le lieu résiduel de p et noté $C(p)$*.

Transport parallèle. — On sait que, une courbe Θ, différentiable par morceaux et d'extrémités p, q, étant donnée, ainsi qu'un vecteur $X \in T_p$, on y attache canoniquement un vecteur $Y \in T_q$ dit *déduit de X par transport* *parallèle de p à q le long de* Θ; le transport parallèle respecte le produit scalaire et si $\Gamma = \{\gamma(v)\}$ $(0 \leqq v \leqq l)$ est une géodésique, quel que soit v, le vecteur $\gamma'(v)$ est celui déduit de $\gamma'(0)$ par transport parallèle de $\gamma(0)$ à $\gamma(v)$ le long de Γ. Soit $\mathfrak{X} = \{X(v)\}$ $(0 \leqq v \leqq l)$ un champ de vecteurs le long de Γ, c'est-à-dire que $X(v) \in T_{\gamma(v)}$ quel que soit v; on définit le champ

$$\nabla \mathfrak{X} = \{\nabla X(v)\} \qquad (0 \leqq v \leqq l)$$

le long de Γ, dit *dérivée covariante de* $\mathfrak{X}$ *le long de* Γ, de la façon suivante : soit $X(v, w)$ le vecteur déduit de $X(w)$ par transport parallèle de $\gamma(w)$ à $\gamma(v)$ le long de Γ, on a $X(v, w) \in V_{\gamma(v)}$ pour tout w, il est donc loisible de poser $\nabla X(v) = X'_w(v, v)$. Remarquer que « $\nabla X(v) = 0$ quel que soit v » est équivalent à « quel que soit v, le vecteur $X(v)$ est déduit de $X(0)$ par transport parallèle de $\gamma(0)$ à $\gamma(v)$ le long de Γ ».

Courbure. — Le tenseur de courbure de V est, quel que soit $p \in V$, une forme bilinéaire antisymétrique sur T_p à valeurs dans l'espace des endomorphismes de T_p, notée $(X, Y) \to R(X, Y)$. La courbure de V dans un sous-espace μ de dimension 2 de T_p est, par définition

$$\rho(\mu) = \rho(X, Y) = -\frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

où X, Y sont deux vecteurs linéairement indépendants de T_p servant à définir μ. Remarquer que, Y étant fixé, l'application $X \to \langle R(X, Y)X, Y\rangle$ est une forme quadratique sur T_p. *La variété riemannienne V est dite δ-pincée si l'on a*

$$\delta\Delta \leqq \rho(\mu) \leqq \Delta \quad \textit{quel que soit } \mu.$$

Dans toute la suite on supposera avoir normé la métrique de V de façon qu'on ait $\delta \leqq \rho(\mu) \leqq 1$ quel que soit μ.

Champ de Jacobi. — Soit $\Gamma(t) = \{\gamma(v, t)\}$ $(0 \leqq v \leqq l, -a \leqq t \leqq a)$ une famille à un paramètre de géodésiques de V, telle que

$$\Gamma(0) = \Gamma = \{\gamma(v)\} \qquad (0 \leqq v \leqq l).$$

Et soit $\mathfrak{X} = \{X(v)\}$ le champ le long de Γ *induit par* $\Gamma(t)$, c'est-à-dire défini par $X(v) = \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}(v, 0)$. On démontre que $\mathfrak{X}$ (champ de Jacobi) vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1) \qquad \nabla\nabla X(v) = R(\gamma'(v), X(v))\gamma'(v).$$

Si, réciproquement, un champ $\mathfrak{X}$ le long de Γ est donné et vérifie l'équation (1), alors il existe une famille $\Gamma(t)$ de géodésiques voisines de Γ, qui induit $\mathfrak{X}$ sur Γ; si $X(0) = 0$, on peut supposer que toutes les géodésiques $\Gamma(t)$ ont même origine que Γ.

PREMIÈRE PARTIE.

Il a été démontré dans [1] que si V, variété riemannienne, de dimension paire, compacte, simplement connexe, est δ-pincée avec $\delta > 1/4$, l'homologie entière de V est celle de la sphère de même dimension : $H_i(V; Z) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq \dim V - 1$. D'autre part, on sait ([2]) que les espaces riemanniens symétriques suivants :

espace projectif complexe : $P_n(C) = SU(n+1)/U(n)$;
espace projectif quaternionien : $P_n(Q) = \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)$;
plan projectif des octaves de Cayley : $P_2(\mathrm{Ca}) = F_4/\mathrm{Spin}\,(9)$

(qui, classiquement, ne sont pas des sphères homologiques et sont simplement connexes) possèdent une structure riemannienne canonique (à un scalaire près) dont la courbure est invariante par transport parallèle. On en déduit facilement que leur métrique est $(1/4)$-pincée. En effet, ces espaces symétriques sont ceux de [2] qui y sont appelés « de rang un » ([2], p. 437, 442, 465, 466) : toute géodésique Γ, issue d'un point p quelconque, est fermée et de longueur 2π, et le lieu résiduel $C(p)$ de p (« variété antipodique » de p dans [2]) est le lieu des points situés à la distance constante π de p; il coïncide avec le lieu du premier conjugué de p sur Γ. Il en résulte que les champs de Jacobi le long de Γ, qui s'annulent en p, ne peuvent s'annuler que, soit en $\Gamma \cap C(p)$ à la distance π de p, soit en p à la distance 2π de p; on en déduit immédiatement, parce que la courbure est invariante par transport parallèle, que la courbure le long de Γ, pour ces champs de Jacobi, est constamment égale, soit à 1, soit à $1/4$, d'où le fait que l'espace considéré est $(1/4)$-pincé. Dans cette première partie, on démontre le

THÉORÈME 1. — *Soit V une variété riemannienne compacte, de dimension paire, simplement connexe, $(1/4)$-pincée et qui n'est pas une sphère homologique. Alors V est l'un des espaces projectifs énumérés ci-dessus, muni de sa métrique canonique.*

La démonstration du théorème se fait ainsi : on démontre d'abord l'existence en tout point p de V, d'une géodésique passant par p, fermée en p et de longueur 2π. D'après [1], ceci entraîne $d(p, q) \leqq \pi$, quels que soient $p, q \in V$; d'où l'on déduit que le lieu résiduel $C(p)$ de p peut être défini comme le lieu des points de V situés à la distance constante π de p. On montre ensuite que toutes les géodésiques de V sont fermées et de longueur 2π. Le long d'une telle géodésique, on prouve alors que la courbure est invariante par transport parallèle.

La courbure est donc à dérivée covariante nulle en tout point et dans toute direction; d'après [3], cette condition suffit pour entraîner que V est un espace riemannien symétrique. Mais, parmi ceux-ci, seuls les espaces projectifs ci-dessus sont à courbure strictement positive.

Dans l'énoncé des lemmes 1 à 10 ci-dessous, il sera toujours sous-entendu l'hypothèse suivante : *V est une dimension riemannienne compacte, de dimension paire, simplement connexe, $1/4$-pincée et n'est pas une sphère homologique.*

2. Géodésique fermée passant par un point.

LEMME 1. — *Quel que soit $p \in V$, il existe une géodésique fermée en p et de longueur 2π.*

(Pour les notions utilisées dans ce paragraphe, *voir* [1] ou [5].)

Par hypothèse, V n'est pas une sphère homologique; d'après la démonstration du théorème 11 de [1], si les deux points p, q de V sont tels que $S(p, q)$ soit régulier, il existe une géodésique Γ de V, d'extrémités p, q et d'index i tel que $1 \leqq i < (\dim V - 1)$; en particulier Γ est de longueur inférieure ou égale à 2π et, étant d'index > 0, rencontre le lieu résiduel $C(p)$. Fixons $p \in V$; les q tels que $S(p, q)$ soit régulier étant partout denses dans V, il existe une suite $\{q(n)\}$ de points de V ($n = 1, 2, \ldots$), telle que $S(p, q(n))$ soit régulier pour tout n et que la distance $d(p, q(n))$ tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Soit $\Gamma(n)$ une géodésique d'extrémités p, $q(n)$ et d'index compris entre 1 et $(\dim V - 1)$; on a donc $\operatorname{long}(\Gamma(n)) \leqq 2\pi$ et $\Gamma(n)$ rencontre $C(p)$ en un point, soit $r(n)$. D'après le théorème 8 de [1], on a $d(p, r(n)) \geqq \pi$ quel que soit n. Comme

$$d(p, r(n)) \leqq d(p, q(n)) + d(q(n), r(n)),$$
$$\operatorname{long}(\Gamma(n)) \geqq d(p, r(n)) + d(r(n), q(n)),$$

on en déduit

$$\operatorname{long}(\Gamma(n)) \geqq 2\, d(p, r(n)) - d(p, q(n)) \geqq 2\pi - d(p, q(n)),$$

d'où, pour $\operatorname{long}(\Gamma(n))$, l'encadrement

$$(2) \qquad 2\pi - d(p, q(n)) \leqq \operatorname{long}(\Gamma(n)) \leqq 2\pi.$$

Considérons les vecteurs unitaires $X(n)$, tangents en p aux géodésiques $\Gamma(n)$. Ils ont, sur la sphère unité de T_p qui est compacte, un point d'accumulation au moins, soit X. Désignons par

$$\{X(m(n))\} \qquad [m(n) \to \infty]$$

une suite extraite de la suite $\{X(n)\}$ et convergeant vers X. Lorsque $n \to \infty$, les géodésiques $\Gamma(m(n))$ convergent vers une géodésique Γ, tangente en p à X; d'autre part Γ a pour extrémités p et la limite de $q(m(n))$, qui est aussi p puisque

$$d(p, q(n)) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

L'encadrement (2) montre enfin que $\operatorname{long}(\Gamma) = 2\pi$. Il reste seulement à montrer que Γ est fermée, c'est-à-dire que si

$$\Gamma = \{\gamma(v)\} [0 \leqq v \leqq 2\pi, \gamma(0) = \gamma(2\pi) = p]$$

on a $\gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$. Plus généralement, on a le

LEMME 2. — *Toute géodésique de V, de longueur 2π, et dont les extrémités sont confondues, est fermée.*

Choisissons $u = \gamma(s)$ tel que $s = d(p, u)$. Alors la restriction

$$\hat{\Gamma} = \{\gamma(w)\} (s \leqq w \leqq 2\pi)$$

de Γ rencontre $C(p)$ en r et l'on a (théorème 8 de [1] : $d(p, r) \geqq \pi$. Mais

$$\operatorname{long}(\Gamma) = 2\pi \geqq d(p, r) + d(r, u) + d(u, p).$$

Si l'angle en p n'est pas plat, c'est-à-dire si $\gamma'(0) \neq \gamma'(2\pi)$, on a l'inégalité stricte $d(p, r) < d(p, u) + d(u, r)$, qui conduit à une contradiction.

3. Lieu résiduel d'un point.

LEMME 3. — *Quel que soit $p \in V$, on a*

$$C(p) = \{q \in V \mid d(p, q) = \pi\}.$$

Soit $\Gamma = \{\gamma(t)\} (0 \leqq t < \infty)$ une géodésique infinie issue de p et $\gamma(t_0)$ le premier point où elle rencontre $C(p)$. D'après le lemme 1, on peut appliquer le théorème 9 de [1], qui affirme que $d(p, q) \leqq \pi$ quels que soient $p, q \in V$; ce qui implique $t_0 \leqq \pi$. D'autre part (théorème 8 de [1]) : $d(p, q) \geqq \pi$, quel que soit $q \in C(p)$, ce qui implique $t_0 \geqq \pi$. D'où $t_0 = \pi$.

LEMME 4. — *Soient r et s deux points distincts de $C(p)$ et*

$$\Lambda = \{\lambda(t)\} \qquad (0 \leqq t \leqq l)$$

une géodésique de V, d'extrémités $r = \lambda(0)$ et $s = \lambda(l)$ et de longueur l inférieure ou égale à π. Alors $\Lambda \subset C(p)$.

On a $d(p, r) = d(p, s) = \pi$ (lemme 3 ci-dessus) et $d(p, \lambda(t)) \leqq \pi$ quel que soit t (théorème 9 de [1]). Supposons Λ non contenue dans $C(p)$; la fonction $t \to d(p, \lambda(t))$ est continue en t, donc atteint son minimum sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, soit en t_0 tel que $0 < t_0 < 1$ et l'on a $d(p, \lambda(t_0)) < \pi$. Soit $\Theta = \{\theta(v)\} (0 \leqq v \leqq m)$ une géodésique d'extrémités $\theta(0) = p$, $\theta(m) = \lambda(t_0)$ et de longueur $m = d(p, \lambda(t_0)) < \pi$. D'après la proposition 2 de [1], on a

$$\langle \lambda'(t_0), \theta'(m) \rangle = 0.$$

Ce qui permet de considérer dans V l'angle droit de sommet $\lambda(t_0)$, dont un côté est Θ de longueur inférieure à π et l'autre la restriction

$$\hat{\Lambda} = \{ \lambda(t) \} \qquad (0 \leq t \leq t_0)$$

de Λ, de longueur inférieure à π; les deux extrémités de l'angle étant donc p et r. D'après le théorème 6 de [1], on aurait alors $d(p, r) < \pi$, ce qui est une contradiction.

Lemme 5. — *Dans les hypothèses du lemme 4, soit de plus*

$$\Sigma = \{ \sigma(v) \} \qquad (0 \leq v \leq \pi)$$

une géodésique quelconque de V, de longueur π et d'extrémités $\sigma(0) = p$ et $\sigma(\pi) = r$. Dans ces conditions, on a $\langle \lambda'(0), \sigma'(\pi) \rangle = 0$.

Soit t quelconque tel que $0 < t < l$, d'après le lemme 4, on a $d(p, \lambda(t)) = \pi$; soit $\Phi = \{ \varphi(v) \} (0 \leq v \leq \pi)$ une géodésique d'extrémités $\varphi(0) = p$, $\varphi(\pi) = \lambda(t)$ et de longueur π. D'après la proposition 2 de [1], on a

$$\langle \varphi'(\pi), \lambda'(t) \rangle = 0;$$

d'autre part, désignons par $\mathcal{P} = \{ P(v) \} (0 \leq v \leq \pi)$ le champ le long de Φ, défini par les deux conditions $P(\pi) = \lambda'(t)$ et $\nabla P(v) = 0$ quel que soit v. D'après le corollaire de proposition 3 de [1] le fait que $d(p, \lambda(t)) = \pi$ quel que soit t, entraîne que le champ $\mathcal{P}$ vérifie $\rho(P(v), \varphi'(v)) = 1/4$ quel que soit v. Pour chaque t tel que $0 < t < 1$, il existe donc une géodésique de longueur π et d'extrémités p, $\lambda(t)$ et, le long de celle-ci, un champ $\mathcal{P}$ du type ci-dessus. On voit, par continuité, en faisant tendre t, vers zéro, qu'il existe une géodésique $\Theta = \{ (v) \} (0 \leq v \leq \pi)$ telle que $\theta(0) = p$, $\theta(\pi) = r$, $\langle \theta'(\pi), \lambda'(0) \rangle = 0$ et un champ $\mathcal{N} = \{ N(v) \} (0 \leq v \leq \pi)$ le long de Θ, tel que $N(\pi) = \lambda'(0)$, $\nabla N(v) = 0$ et $\rho(N(v), \theta'(v)) = 1/4$ quel que soit v,

Définissons un champ $\mathcal{X} = \{ X(v) \} (0 \leq v \leq \pi)$ le long de Θ par $X(v) = \sin(v/2) N(v)$: *le champ $\mathcal{X}$ est un champ de Jacobi.* Car $\nabla N(v) = 0$ quel que soit v entraîne

$$\nabla X(v) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) N(v) \qquad \text{et} \qquad \nabla\nabla X(v) = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right) N(v)$$

et d'autre part les conditions $\rho(N(v), \theta'(v)) = 1/4$ et $\rho(X, Y) \geq 1/4$ quels que soient X, $Y \subset T_{\theta(v)}$ entraînent classiquement que $N(v)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $1/4$ de l'endomorphisme de $T_{\theta(v)}$ canoniquement associé à la forme quadratique

$$X \to \langle R(X, \theta'(v)) X, \theta'(v) \rangle$$

sur $T_{\theta(v)}$; on a donc

$$R(\theta'(v), X(v)) \theta'(v) = -\frac{1}{4} X(v)$$

et l'équation (1) du n° 1 est bien vérifiée. Il existe donc une famille

$$\Theta(u) = \{\theta(v, u)\} \qquad (0 \leqq v \leqq \pi, -a \leqq u \leqq a, a > 0)$$

de géodésiques telles que $\Theta(0) = \Theta, \theta(0, u) = p$ quel que soit u, induisant le champ $\mathcal{X}$ le long de Θ, c'est-à-dire qu'on a $\theta'_u(\pi, 0) = \lambda'(0)$. Autrement dit, la courbe $\Psi = \{\psi(u) = \theta(\pi, u)\}$ est tangente à Λ en r et est tout entière dans $C(p)$ (d'après le lemme 3). Si l'on avait $\langle\lambda'(0), \sigma'(\pi)\rangle \neq 0$, on aurait aussi $\langle\sigma'(\pi), \psi'(0)\rangle \neq 0$ et d'après la proposition 2 de [1], il existerait des points de Ψ, donc de $C(p)$, situés à une distance de p strictement inférieure à π, ce qui contredit le lemme 3.

LEMME 6. — *Soit q un point quelconque de $C(p)$; le sous-ensemble T_q^0 de T_q, constitué par les tangentes en q aux courbes de $C(p)$ qui contiennent q, est un sous-espace vectoriel de T_q.*

Soit $q \in C(p)$ et fixons une géodésique $\Sigma = \{\sigma(v)\} (0 \leqq v \leqq \pi)$ de longueur π, d'extrémités $\sigma(0) = p, \sigma(\pi) = q$. Soit T' l'ensemble des champs $\mathcal{N} = \{N(v)\} (0 \leqq v \leqq \pi)$ le long de Σ, qui vérifient les conditions :

a. $\langle N(v), \sigma'(v)\rangle = 0$;
b. $\nabla N(v) = 0$ quel que soit v;
c. $\rho(N(v), \sigma'(v)) = 1/4$ quel que soit v.

Et désignons par T'_q la restriction de T' à T_p [c'est-à-dire l'ensemble des $N \in T_q$ tel qu'il existe $\mathcal{N} \in T'$ pour lequel $N(\pi) = N$]. La démonstration du lemme 5 a montré l'inclusion $T'_p \subset T_q^0$. On a aussi $T_q^0 \subset T'_q$. Soit, en effet, $\Lambda = \{\lambda(t)\} (0 \leqq t \leqq a < \pi)$ une courbe incluse dans $C(p)$, telle que $\lambda(0) = q$. Pour $t > 0$, désignons par $\Lambda(t) = \{\lambda(u, t)\} [0 \leqq u \leqq l(t)]$ la géodésique unique d'extrémités q, $\lambda(t)$ et de longueur $l(t) = d(q, \lambda(t))$. D'après le lemme 4, on a $\Lambda(t) \subset C(p)$ quel que soit t; et alors il existe un champ $\mathcal{N}(t) \in T'$ tel que $N(t)(\pi) = \lambda'_u(0, t)$. Mais, quand t tend vers zéro : $\lambda'_u(0, t) \to \lambda'(0)$; il existe donc un champ $\mathcal{N} = \lim \mathcal{N}(t) (t \to 0)$ tel que $\mathcal{N} \in T'$ et $N(\pi) = \lambda'(0)$.

Puisque $T_q^0 = T'_q$, il reste seulement à montrer que T'_q est un sous-espace vectoriel de T_q; plus généralement, T' est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des champs le long de Σ. En effet, les conditions (a) et (b) sont visiblement linéaires. Pour la condition (c), remarquons, comme dans la démonstration du lemme 5, que la condition $\rho(X, \sigma')(v)) = 1/4$ implique que X est vecteur propre, pour la valeur propre $1/4$, de l'endomorphisme canoniquement associé à la forme quadratique

$$X \to \langle R(X, \sigma'(v)) X, \sigma'(v)\rangle \quad \text{sur } T_{\sigma(v)}.$$

Or les vecteurs propres pour une valeur propre donnée constituent évidemment un sous-espace vectoriel.

REMARQUE. — Désignons par T''_q l'ensemble des vecteurs tangents en q aux géodésiques, de longueur inférieure ou égale à π, joignant à q à un point r de $C(p)$, distinct de q. On a vu que $T''_q \subset T^0_q$ et l'on a même utilisé que T''_q était partout dense dans T^0_q. On déduit facilement de ceci et du lemme 4 l'égalité $T''_q = T^0_q$, d'où le fait, qu'on n'utilisera pas dans la suite, que $C(p)$ *est une sous-variété de* V (*totalement géodésique*, *d'après le lemme* 4).

4. Toutes les géodésisques sont fermées. — Soit q un point quelconque de $C(p)$. Désignons par U^0 (resp. U^1) le sous-ensemble de V constitué par les géodésiques de longueur égale à π (resp. de longueur strictement inférieure à $\pi/2$) issues de q et dont les tangentes en q appartiennent à T^0_q (resp. appartiennent à l'orthogonal T^1_q de T^0_q dans T_q). On a évidemment $C(p) \subset U^0$.

LEMME 7. — *Quels que soient $r \in U^1$ et $S \in U^0$ tel que $s \neq q$, on a*

$$d(r, s) > d(r, q).$$

Il suffit de considérer l'angle droit de sommet q dont un côté est la géodésique joignant r à q, de longueur $< \pi/2$, et l'autre côté la géodésique joignant q à s et de longueur π, et d'appliquer le théorème 6 de [1] : la distance $d(r, s)$ est plus grande que la distance des extrémités du même angle tracé sur la sphère $S(1)$ de courbure constante égale à 1. Et si $s \neq q$, cette dernière distance est visiblement supérieure à $d(r, q)$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 8. — *Quels que soient $q \in C(p)$ et $X \in T^1_q$, tel que $\|X\| = 1$, il existe une géodésique $\Theta = \{\theta(v)\} (0 \leqq v \leqq \pi)$, de longueur π et telle que $\theta(0) = p$, $\theta(\pi) = q$ et $\theta'(\pi) = X$.*

Soit r le point de U^1, extrémité de la géodésique

$$\Theta = \{\theta(v)\} [(\pi/2) - a \leqq v \leqq \pi, a > 0]$$

telle que $\theta[(\pi/2) - a] = r$, $\theta(\pi) = q$ et $\theta'(\pi) = X$. Soit Φ la géodésique unique d'extrémité p, r et de longueur égale à $d(p, r)$. Soit Φ^* la géodésique infinie d'origine p et prolongeant Φ, et s le premier point où elle rencontre $C(p)$. On a

$$d(p, s) = d(p, r) + d(r, s) = \pi, \qquad d(p, q) = \pi \leqq d(p, r) + d(r, q),$$

donc $d(r, q) \geqq d(r, s)$, ce qui (lemme 7) entraîne $s = q$. Donc $\Theta \subset \Phi^*$ et la partie de Φ^* qui est d'origine p et de longueur π répond à l'assertion du lemme.

LEMME 9. — *Quel que soit $p \in V$, toute géodésique issue de p est fermée et de longueur 2π.*

Soit $\Theta = \{\theta(v)\} (0 \leqq v \leqq \pi)$ une géodésique issue de p, de direction quelconque, de longueur π. Elle rencontre $C(p)$ en $\theta(\pi)$. D'après le lemme 8, il existe une géodésique $\Phi = \{\varphi(v)\}(0 \leqq v \leqq \pi)$, telle que $\varphi(0) = p$, $\varphi(\pi) = \theta(\pi)$ et $\varphi'(\pi) = -\theta'(\pi)$. Cette dernière condition implique que la géodésique $\Theta \cup \Phi$ est le prolongement de Θ; elle est de longueur 2π, d'extrémités p, p donc, d'après le lemme 2, elle est fermée.

5. **Dérivée covariante de la courbure le long d'une géodésique fermée.** — Soit $\Gamma\{\gamma(v)\}(0 \leqq v \leqq 2\pi)$ une géodésique fermée de longueur 2π; posons $\gamma(0) = p$, $\gamma(\pi) = q = C(p) \cap \Gamma$. Soit T^0 l'ensemble des champs $\mathcal{N} = \{N(v)\}(0 \leqq v \leqq \pi)$ le long de Γ tels que :

a. $\langle N(v), \gamma'(v) \rangle = 0$;
b. $\nabla N(v) = 0$ quel que soit v;
c. $\rho(N(v), \gamma'(v)) = 1/4$.

Appelons $T^0_{\gamma(v)}$ la restriction de T^0 à $T_{\gamma(v)}$.

Définissons un champ de Jacobi de p à q le long de Γ par la famille suivante de géodésiques $\Gamma(\alpha)$. Soit Y un vecteur quelconque tel que $Y \in T^1_q$ et $\|Y\| = 1$; d'après le lemme 8, pour tout α compris entre 0 et $\pi/2$, il existe une géodésique $\Gamma(\alpha) = \}\gamma(v, \alpha)\}$ $(0 \leqq v \leqq \pi,\ 0 \leqq \alpha \leqq \pi/2)$ telle que $\gamma(0, \alpha) = p$, $\gamma(\pi, \alpha) = q$ et $\gamma'_v(\pi, \alpha) = \cos(\alpha).\gamma'(\pi) + \sin(\alpha).Y$. Le champ $\mathcal{Y} = \{Y(v) = \gamma'_\alpha(v, 0)\}$, que la famille $\Gamma(\alpha)$ induit de p à q le long de Γ, est un champ de Jacobi par définition, et il vérifie $Y(0) = Y(\pi) = 0$, puisque toutes les géodésiques $\Gamma(\alpha)$ ont pour extrémités fixes p, q et pour longueur π. Mais :

LEMME 10. — *Un champ de Jacobi $\{Y(v)\}$ de V (le long de Γ) qui vérifie $Y(0) = Y(\pi) = 0$, vérifie de plus nécessairement*

$$\nabla Y(v) = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho(Y(v), \gamma'(v)) = 1$$

quel que soit v.

Ce lemme se démontre en analysant la démonstration du théorème 4 de [6]. Appelons $Z(v)$ un champ de Jacobi de la sphère $S(1)$ de courbure constante égale à 1, satisfaisant aux mêmes conditions initiales que $\mathcal{Y}$, c'est-à-dire $Z(0) = 0$ et $\|Y'(0)\| = \|Z'(0)\|$; d'après la page 44 de [6], on a l'égalité

$$(3) \qquad \begin{cases} \|Y(v)\|^2 = \|Z(v)\|^2.\exp\left(\displaystyle\int_0^v f(u)\,du\right) \\ \text{avec} \quad f(u) \geqq 0 \quad \text{quel que soit } u. \end{cases}$$

Le champ $\{Z(v)\}$ vérifie $Z(\pi) = 0$, puisque toutes les géodésiques issues d'un point de $S(1)$ repassent en son antipode qui en est situé à la distance π. Montrons que $Y(\pi) = 0$ entraîne $\exp\left(\displaystyle\int_0^\pi f(u)\,du\right) = 1$. En effet, en dérivant deux fois l'égalité (3), compte tenu de ce que les deux champs s'annulent pour o et pour π, on obtient

$$\| Y'(\pi) \|^2 = \| Z'(\pi) \|^2 . k, \qquad \text{où l'on a posé} \quad k = \exp\left(\int_0^\pi f(u)\, du \right).$$

Échangeons les rôles de p et q; le champ $\{ k^{1/2} Z(v) \}$ est encore un champ de Jacobi de $S(1)$, de q à p, et vérifie l'égalité des conditions initiales en q :

$$\| Y'(\pi) \| = \| k^{1/2} Z'(\pi) \|.$$

On a donc en appliquant de nouveau (3) et en dérivant deux fois :

$$\| Y'(0) \|^2 = \| Z'(0) \|^2 . k$$

qui, puisque $\| Y'(0) \| = \| Z'(0) \|$, entraîne bien que $k = 1$. La fonction $f(u)$ étant positive ou nulle, on a nécessairement $f(u) = 0$ quel que soit $u (0 \leqq u \leqq \pi)$. D'après les pages 43-44 de [6], cette dernière condition implique que les champs $\{ Y(v) \}$ et $\{ Z(v) \}$ sont les mêmes; mais le champ $\{ Z(v) \}$ sur $S(1)$ vérifie $\nabla Z(v) = 0$ quel que soit v, et évidemment $\rho(Z(v), \gamma'(v)) = 1$.

On peut multiplier les champs tels que $\{ Y(v) \}$ par un facteur constant; on a donc démontré que, quel que soit $Y \in T_q^1$, il existe un champ $\mathcal{Y} = \{ Y(v) \}$ le long de Γ tel que $Y(\pi) = Y$, $\nabla Y(v) = 0$ et $\rho(Y(v), \gamma'(v)) = 1$ quel que soit v. Appelons $T^1_{\gamma(v)}$ la restriction à $T_{\gamma(v)}$ de l'ensemble de ces champs. Puisque $\nabla Y(v) = 0$ quel que soit v, c'est que $T^1_{\gamma(v)}$ est le sous-espace déduit du sous-espace T_q^1 par transport parallèle de q à $\gamma(v)$ le long de Γ, et l'on a la décomposition en somme directe :

$$T_{\gamma(v)} = T^0_{\gamma(v)} + T^1_{\gamma(v)}, \quad \text{pour tout } v.$$

Pour un élément quelconque de $T^0_{\gamma(v)}$, la courbure $\rho(X, \gamma'(v))$ est à dérivée covariante nulle le long de Γ, puisque cette courbure est constante pour un champ à dérivée covariante nulle le long de Γ; il en est de même si X appartient à $T^1_{\gamma(v)}$; la décomposition en somme directe ci-dessus montre donc qu'on a

$$(\nabla_{\gamma'(v)} R)\, (\gamma'(v), X, \gamma'(v), X) = 0$$

quel que soit v et quel que soit $X \in T_{\gamma(v)}$, et, en particulier, que

$$(\nabla_{\gamma'(0)} R)\, (\gamma'(0), X, \gamma'(0), X) = 0 \quad \text{pour tout } X \in T_p.$$

Comme toutes les géodésiques issues de p sont fermées et de longueur 2π, le raisonnement précédent s'applique pour toutes les directions de géodésiques issues de p, c'est-à-dire qu'on a $(\nabla_Y R)\, (Y, X, Y, X) = 0$, quels que soient X, $Y \in T_p$; le point p étant aussi un point quelconque de V, on a donc $(\nabla_Y R)\, (Y, X, Y, X) = 0$, quel que soit $p \in V$ et quels que soient X, $Y \in T_p$. D'après les n^{os} 238 et 239 de [3] (p. 258-260), ceci entraîne

$(\nabla_U R)(X, Y, Z, T) = 0$, quel que soit $p \in V$ et quels que soient $X, Y, Z, T, U \in T_p$, c'est-à-dire que V est un *espace riemannien symétrique*. Mais, de plus, V est à courbure strictement positive; la courbure d'un espace riemannien symétrique G/H, dans le sous-espace μ, défini par les deux vecteurs X, Y, est, après les identifications convenables

$$\rho(X, Y) = \|[X, Y]\|^2,$$

où la norme est celle définie par la forme de Killing de G et le crochet celui de l'algèbre de Lie de G. L'espace symétrique G/H doit donc être tel que jamais il n'existe deux éléments linéairement indépendants de l'algèbre de Lie de G/H, dont le crochet est nul. Dans ce cas, l'espace symétrique G/H est appelé, dans [2], *de rang un*. Les rangs des espaces symétriques sont tous déterminés dans [2]; et l'on y vérifie bien que seuls les sphères et les espaces projectifs énumérés dans l'introduction sont de rang un; ce qui démontre le théorème 1.

Deuxième partie.

Le théorème 1 permet de penser qu'il existe un scalaire $\delta_0 < 1/4$ (éventuellement $\delta_0 = 0$!) et un théorème dont l'énoncé serait : si V est compacte, simplement connexe, de dimension impaire et δ-pincée avec $\delta > \delta_0$, alors V est une sphère homologique. Un théorème de ce type n'a pu encore être obtenu à l'aide de la théorie de Morse ; le seul résultat obtenu est le

Théorème 2. — *Soit V une variété riemannienne compacte, δ-pincée et de dimension impaire égale à $2m+1$. Alors, si $\delta > \dfrac{2(m-1)}{8m-5}$, le second groupe de cohomologie réelle $H^2(V; Z)$ de V est nul.*

Corollaire. — *Soit V une variété riemannienne compacte, de dimension 5 et δ-pincée. Si $\delta > 2/11$, la cohomologie réelle de V est celle d'une sphère, c'est-à-dire qu'on a $H^i(V; R) = 0$, pour $1 \leq i \leq 4$.*

La démonstration utilise, d'une part des majorations du tenseur de courbure d'une variété riemannienne positivement pincée, d'autre part la formule classique de Bochner-Lichnerowicz relative aux formes harmoniques d'une variété riemannienne.

6. Majorations du tenseur de courbure d'une variété riemannienne positivement pincée. — Soit p un point quelconque de V et $\{X_i, X_j, X_k, X_h\}$ un ensemble orthonormé quelconque de T_p. On posera, dans toute la suite :

$$R(i, j, k, h) = -\langle R(X_i, X_j)X_k, X_h\rangle;$$
$$\rho(i, j) = \rho(X_i, X_j) = -R(i, j, i, j),$$

[$-R(i, j, k, h)$ n'est autre que la quantité désignée classiquement par R_{ijkh} : *voir* [3] par exemple].

Rappelons que les $R(i, j, k, h)$ sont antisymétriques en i, j d'une part, en k, h d'autre part, et qu'ils vérifient les identités classiques

$$R(i, j, k, h) + R(i, k, h, j) + R(i, h, j, k) = 0,$$
$$R(i, j, k, h) = R(k, h, i, j).$$

On peut majorer les $R(i, j, i, k)$, puis les $R(i, j, k, h)$ d'une variété riemannienne δ-pincée, en exprimant que

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & \delta \leqq \rho(X_i, aX_j + bX_k) \leqq 1 \\ (5) & \delta \leqq \rho(aX_i + bX_k, cX_h + dX_j) \leqq 1\end{array}\right\} \quad (\text{quels que soient } a, b, c, d \in R);$$

De (4), l'on déduit

$$\left.\begin{array}{l} a^2(\rho(i, j) - \delta) + 2ab R(i, j, i, k) + b^2(\rho(i, k) - \delta) \geqq 0 \\ a^2(1 - \rho(i, j)) - 2ab R(i, j, i, k) + b^2(1 - \rho(i, k)) \geqq 0 \end{array}\right\} \text{ quels que soient } a, b;$$

d'où, classiquement, les majorations

$$|R(i, j, i, k)| \leqq (\rho(i, j) - \delta)^{1/2}(\rho(i, k) - \delta)^{1/2}$$
$$|R(i, j, i, k)| \leqq (1 - \rho(i, j))^{1/2}(1 - \rho(i, k))^{1/2}$$

et les majorations moins fines

$$|R(i, j, i, k)| \leqq \frac{1}{2}(\rho(i, j) + \rho(i, k) - 2\delta),$$

$$|R(i, j, i, k)| \leqq \frac{1}{2}(2 - \rho(i, j) - \rho(i, k)),$$

$$|R(i, j, i, k)| \leqq \frac{1}{2}(1 - \delta)$$

(toutes ces majorations, quel que soit l'ensemble orthonormé $\{X_i, X_j, X_k\}$).

Pour majorer $R(i, j, k, h)$, on écrit l'inégalité

$$\delta \leqq \rho(aX_i + bX_k, cX_h + dX_j)$$

sous la forme $F(a, i; b, k; c, h; d, j) \geqq 0$, où F considéré comme polynome en les indéterminées a, b, c, d, contient des termes homogènes du quatrième degué en l'ensemble des a, b, c, d, mais du second degré seulement en chacunes d'elles. On calcule d'abord

$$G(a, i; b, k; c, h; d, j) = \frac{1}{2}(F(a, i; b, k; c, h; d, j) + F(a, i; -b, k; c, h; -d, j))$$

qui ne contient plus que des termes en a^2c^2, a^2d^2, b^2c^2, b^2d^2, $abcd$, puis

$$H(a, i; b, k; c, h; d, j) = G(a, i; b, k; c, h; d, j) \\ + G(-a, i; b, h; c, j; d, k).$$

On transforme le terme en $abcd$ de H par les relations, rappelées ci-dessus que satisfait $R(i, j, k, h)$. On trouve alors que $H \geqq 0$ s'écrit sous la forme

$$(6) \quad Aa^2c^2 + Ba^2d^2 + Cb^2c^2 + Db^2d^2 + 2Eabcd \geqq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quels que} \\ \text{soient } a, b, c, d, \end{array} \right.$$

avec

$$A = \rho(i, j) + \rho(i, h) - 2\delta, \qquad B = \rho(i, j) + \rho(i, k) - 2\delta,$$
$$C = \rho(h, k) + \rho(h, j) - 2\delta, \qquad D = \rho(k, j) + \rho(k, h) - 2\delta.$$
$$E = -3R(i, j, k, h)$$

En exprimant que (6) a lieu quels que soient a, b, on trouve la condition

$$ACc^4 + (AD + BC - E^2)c^2d^2 + BDd^4 \geqq 0,$$

qui doit avoir lieu quels que soient c, d, d'où la condition nécessaire

$$|E| \leqq (AD)^{1/2} + (BC)^{1/2}.$$

On en déduit la majoration

$$|R(i, j, k, h)| \leqq \frac{1}{3}((AD)^{1/2} + (BC)^{1/2}),$$

où A, B, C, D ont les valeurs ci-dessus. En procédant de même avec l'inégalité

$$\rho(aX_i + bX_k, cX_h + dX_j) \leqq 1,$$

on obtient la majoration

$$|R(i, j, k, h)| \leqq \frac{1}{3}((A'D')^{1/2} + (B'C')^{1/2}),$$

où l'on a posé

$$A' = 2 - \rho(i, j) - \rho(i, h), \qquad B' = 2 - \rho(i, j) - \rho(i, k),$$
$$C' = 2 - \rho(h, k) - \rho(h, j), \qquad D' = 2 - \rho(k, j) - \rho(k, h),$$

puis les majorations moins fines

$$|R(i, j, k, h)| \leqq \frac{1}{6}(2\rho(i, j) + 2\rho(k, h) + \rho(i, k) \\ + \rho(i, h) + \rho(j, k) + \rho(j, h) - 8\delta),$$

$$|R(i, j, k, h)| \leqq \frac{1}{6}(8 - 2\rho(i, j) - 2\rho(k, h) \\ - \rho(i, k) - \rho(i, h) - \rho(j, k) - \rho(j, h)),$$

$$(7) \qquad |R(i, j, k, h)| \leqq \frac{2}{3}(1 - \delta)$$

(ceci pour tout ensemble orthonormé $\{X_i, X_j, X_k, X_h\}$).

7. Les 2-formes harmoniques. — Soit, en un point $p \in V$, une base orthonormée $\{X_1, \ldots, X_n\}$ quelconque de T_p. Si ξ est une 2-forme extérieure sur V, on notera $\xi(i, j)$ la valeur $\xi(X_i, X_j)$ de cette forme sur $\{X_i, X_j\}$. D'après la formule fondamentale de Bochner-Lichnerowicz [*voir* par exemple [4], p. 218, formule (3.1)], on sait que si la forme ξ est harmonique et n'est pas identiquement nulle, elle ne peut satisfaire l'inégalité $F(\xi) > 0$ où l'on a posé

$$F(\xi) = 2\sum_{i,j,k,h} R(i, j, i, k)\xi(j, h)\xi(k, h) - \sum_{i,j,k,h} R(i, j, k, h)\xi(i, j)\xi(k, h).$$

La quantité $F(\xi)$ est de calcul plus agréable lorsqu'elle ne comprend pas de termes du type $\xi(i, j)\xi(k, h)$ avec $i = k$ et $j \neq h$, Mais on sait qu'il est possible, une 2-forme ξ étant donnée sur l'espace euclidien T_p, de trouver une base orthonormée $\{X_s, X_{s'}\}$ $\left(s = 1, 2, \ldots, m \text{ avec } m = \text{partie entière de } \frac{\dim V}{2}\right)$ telles que seules les composantes $\xi(s, s')$ de ξ puissent être non nulles. Dans une telle base, la quantité $F(\xi)$ s'écrit

$$F(\xi) = \sum_{s}\sum_{i \neq s, s'} (\rho(s, i) + \rho(s', i))\xi(s, s')^2 - 4\sum_{s<t} R(s, s', t, t')\xi(s, s')\xi(t, t').$$

En utilisant les inégalités $\rho(s, i) \geqq \delta$, $\rho(s', i) \geqq \delta$ pour tous s et i, et la majoration (7) ci-dessus, on obtient, en posant $\dim V = n = 2m + \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0$ si n est pair, et $\varepsilon = 1$ si n est impair :

$$F(\xi) \geqq \sum_{s} (4(n-1)\delta + 2\delta\varepsilon)\xi(s, s')^2 - \frac{8}{3}(1-\delta)\sum_{s<t} \xi(s, s')\xi(t, t')$$

et comme

$$\sum_{s} \xi(s, s')^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{s<t} (\xi(s, s')^2 + \xi(t, t')^2),$$

on obtient finalement

$$F(\xi) \geqq \sum_{s<t}\left(\frac{4(m-1)\delta + 2\delta\varepsilon}{m-1}\xi(s, s')^2 - \frac{8}{3}(1-\delta)\xi(s, s')\xi(t, t') + \frac{4(m-1)\delta + 2\delta\varepsilon}{m-1}\xi(t, t')^2\right).$$

Supposons qu'on ait $\dfrac{4(1-\delta)}{3} < \dfrac{4(m-1)\delta + 2\delta\varepsilon}{m-1}$ et que les $\xi(s, s')$ ne soient pas tous nuls. On a alors

$$F(\xi) > \frac{4(m-1)\delta + 2\delta\varepsilon}{m-1}\sum_{s<t} (\xi(s, s') - \xi(t, t'))^2 \geqq 0,$$

ce qui est une contradiction. C'est donc que $H^2(V; R) = 0$; si V est de dimension paire, ceci a lieu pour $\delta > 1/4$, ce qui est une partie du théorème **10** de [1]; si V est de dimension impaire, ceci a lieu pour $\delta > \frac{2(m-1)}{8m-5}$, ce qui démontre le théorème 2.

REMARQUE. — Pour obtenir avec cette méthode des résultats sur les groupes $H^i(V; R)$, avec $i \geqq 3$, il semble qu'il faudrait connaître des formes réduites simples, en repères orthonormés, pour les formes extérieures de degré $\geqq 3$, ce qui ne semble pas être le cas actuellement.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BERGER (Marcel). — Les variétés riemanniennes à courbure positive, *Bull. Soc. math. Belgique* (à paraître).

[2] CARTAN (Élie). — Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Série 3, t. 44, 1927, p. 345-467.

[3] CARTAN (Élie). — *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* — Paris, Gauthier-Villars, 1951 (*Cahiers scientifiques*, 2).

[4] LICHNEROWICZ (André). — Courbure, nombres de Betti et espaces symétriques, *Proc. intern. Congr. Math.* [11. 1950, Cambridge Mass.)], vol. 2, p. 216-223. — Providence, American mathematical Society, 1952.

[5] MORSE (Marston). — *The calculus of variation in the large.* — New-York, American mathematical Society, 1934 (*Amer. math. Soc. Coll. Publ.*, 18).

[6] RAUCH (H. E.). — A contribution to differential geometry in the large, *Annals of Math.*, Series 2, t. 54, 1951, p. 38-55.

(Manuscrit reçu le 30 octobre 1959.)

M. Marcel BERGER,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences,
16, rue de l'Argonne,
Strasbourg (Bas-Rhin).