

BULLETIN DE LA S. M. F.

WEISHU SHIH

Sur les complexes généralisés et la suite spectrale d'un fibré

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 451-453

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__451_0

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES COMPLEXES GÉNÉRALISÉS ET LA SUITE SPECTRALE D'UN FIBRÉ;

PAR

SHIH WEISHU.

Étant donnée une suite de morphismes :

$$f_i \in \text{Hom}(E, E) \quad (i \geq 0),$$

E est un objet dans une catégorie abélienne \mathcal{C} , on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= f_{i+1}^{-1}(B_i) \cap Z_i & B_{i+1} &= (f_{i+1}(Z_i) \cap Z_i) + B_i, \\ Z_{-1} &= E, & B_{-1} &= 0 \quad (i \geq -1) \end{aligned}$$

pour désigner les sous-objets de E ainsi définis par récurrence.

DÉFINITION. — *Un complexe généralisé à valeur dans \mathcal{C} est formé par un objet E et par une suite $f_i \in \text{Hom}(E, E)$ tel que :*

$$f_{i+1}(Z_i) \subseteq Z_i, \quad f_{i+1}(B_i) \subseteq B_i, \quad f_{i+1}^2(Z_i) \subseteq B_i \quad (i \geq 1).$$

Il est évident que les complexes généralisés à valeur dans \mathcal{C} forment une catégorie additive \mathcal{G} ; un morphisme de \mathcal{G}

$$h : G = (E, f_i) \rightarrow G' = (E', f'_i)$$

est un morphisme $h \in \text{Hom}(E, E)$ tel que

$$hf_i = f'_i h \quad (i \geq -1).$$

De plus la catégorie des complexes \mathcal{K} à valeur dans \mathcal{C} peut être considérée comme une sous-catégorie de \mathcal{G}

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}.$$

En effet, on a un foncteur covariant de \mathcal{K} dans \mathcal{G} qui fait correspondre à chaque (E, d) le complexe généralisé (E, f_i) , où $f_i = d$ ($i \geq 0$).

Nous définissons les foncteurs homologiques associés à $(E, f_i) \in \mathcal{G}$

$$H_i(E) = Z_i/B_i$$

en remarquant que $B_i \subseteq Z_i$ d'après la définition de \mathcal{G} , au cas où $E \in \mathcal{K}$, on retrouve l'homologie de E , car $H(E) = H_i(E)$ ($i \leq 0$).

La définition implique que f_{i+1} induit une différentielle :

$$\bar{f}_{i+1} \in \text{Hom}(H_i(E), H_i(E))$$

telle que l'homologie $H(H_i(E))$ du complexe $(H_i(E), \bar{f}_{i+1})$ est canoniquement isomorphe à $H_{i+1}(E)$, c'est-à-dire, on a une suite de foncteurs $H_i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$ tels que $H_{i+1} = H \circ H_i$.

Donc l'homologie d'un complexe généralisé est munie d'une structure de suite spectrale fonctorielle bien déterminée qu'on appelle la suite spectrale associée à E .

DÉFINITION. — Une suite spectrale E est dite triviale au sens généralisé, si elle est isomorphe à la suite spectrale associée à un complexe généralisé.

Cette définition est en accord avec la terminologie classique; E_γ est dite triviale si $d_\gamma = 0$ pour $\gamma \geq 2$, alors, il suffit de prendre $E = E_1$ et $f_i = d_1$ ($i \geq 0$).

THÉORÈME. — La suite spectrale d'un fibré est triviale au sens généralisé, c'est-à-dire : à chaque fibré de base B et de fibre F , il existe une structure de complexe généralisé sur

$$C(F) \otimes C(B)$$

telle que l'homologie de ce complexe est isomorphe à la suite spectrale du fibré, et en plus :

$$\bar{f}_\gamma = d_\gamma.$$

D'après la théorie de MOORE [1] on peut se restreindre, dans la démonstration, au cas où le fibré est un fibré associé à un fibré principal [2]. On construit alors pour chaque entier i un capproduit généralisé sur les chaînes. Les morphismes f_i sont alors définis comme

$$f_i(x) = e_i \cap x \quad \text{où} \quad e_i \in C^i(B, C_{i-1}(\Omega(B)))$$

est la $i^{\text{ème}}$ cochaîne fondamentale de B , et $\Omega(B)$ l'espace de lacets de Kan [4].

Comme cas particulier on obtient le théorème de HUREWICZ-FADELL [3] en affaiblissant les hypothèses homotopiques en des hypothèses homologiques analogues.

Ce théorème permettra de déterminer la suite spectrale d'un fibré. En utilisant ensuite la classification des extensions successives [5] on trouve les groupes d'homologies du fibré.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BARRATT (M. G.), GUGENHEIM (V.) and MOORE (J. C.). — A paraître dans *Amer. J. Math.*, t. 86, 1959.
- [2] CARTAN (Henri). — *Sur la théorie de Kan* (*Séminaire Cartan*, t. 9, 1956-1957. Quelques questions de topologie, n° 1)
- [3] FADELL (Edward) and HUREWICZ Witold). — *On the structure of higher differential operators in spectral sequences* (*Annals Math.*, t. 68, 1958, p. 314-347).
- [4] KAN, (Daniel M.). — *On c. s. s. complexes* (*Amer. J. Math.*, t. 79, 1957, p. 449-476).
- [5] SHIH (Weishu). — *Sur les extensions successives* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 249, 1959, p. 607-609).

SHIH Weishu,
Attaché de Recherches C. N. R. S.,
Pavillon H, Chambre 418,
Résidence universitaire,
Antony (Seine).

