

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. REEB

Remarques sur les structures feuilletées

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 445-450

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__445_0

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LES STRUCTURES FEUILLETÉES;

PAR

GEORGES REEB

(Grenoble).

INTRODUCTION. — Je me propose d'indiquer ici un certain nombre de remarques qui prolongent des résultats contenus dans la thèse de HAEFLIGER et dans la mienne [2], [3] sur les structures feuilletées.

Ces résultats concernent l'un ou l'autre des deux types de structures suivants :

- (i) Structures feuilletées de co-dimension 1
- (ii) Structures feuilletées analytiques.

Dans un souci de simplicité, je restreindrai mon exposé à la considération des variétés feuilletées, bien que les extensions à des structures feuilletées soient à peu près immédiates.

1. Rappel de définitions et de résultats antérieurs. — Nous considérons ici des structures feuilletées, de co-dimension p définies sur une variété V_n à n dimensions, de l'un des types suivants :

- (i) *structures de classe C_∞ .*
- (ii) *structures analytiques réelles,*
- (iii) *structures complexes.*

Une structure feuilletée de co-dimension p sur V_n est définie par la donnée d'un système de Pfaff Σ_p complètement intégrable de rang p sur V_n . Le système Σ_p est de classe C_∞ , analytique réel, ou analytique complexe (sur la variété complexe à n dimensions complexes V_n) selon qu'on est en présence d'une structure du type (i), (ii), (iii).

Étant donnée une structure feuilletée (V_n, Σ_p) , il existe au voisinage de tout $x \in V_n$ des systèmes de fonctions (de classe C_∞ , analytiques réelles, ou

analytiques complexes) $\varphi_1 \dots \varphi_p$ tels que le système Σ_p soit équivalent, au voisinage de x , à :

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = \dots = d\varphi_p = 0.$$

On définit dès lors une topologie fine T sur V_n , cette topologie T est la topologie la moins fine telle que les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, soient localement constantes. Cette topologie est une topologie de variété [à $n - p$ dimensions dans le cas d'une structure réelle et de $2(n - p)$ dimensions dans le cas d'une structure complexe]. Les composantes connexes de cette topologie T sont les feuilles (ou variétés intégrales de Σ_p). En fait, on peut subordonner à T une structure de variété de classe C_∞ , analytique réelle ou analytique complexe selon que la structure (V_n, Σ_p) est de type (i), (ii) ou (iii).

Une feuille γ est dite propre si sa topologie de feuille coïncide avec la topologie initiale de V_n dans γ . Je rappelle les résultats suivants de [2] et [3] qui seront utiles pour la suite de mon exposé.

THÉORÈME. — *Si A est une réunion de feuilles propres de (V_n, Σ_p) et si A est compact, alors A contient au moins une feuille compacte.*

EXEMPLE. — Il existe sur S_3 une structure feuilletée de classe C_∞ , de co-dimension 1, dont toutes les feuilles sont propres et dont une seule feuille est compacte (cf. [3]).

THÉORÈME DE STABILITÉ. — *Si la feuille γ de (V_n, Σ_p) est compacte et a un groupe de Poincaré fini, il existe un voisinage ouvert Ω de V_n tel que toute feuille γ' qui rencontre Ω soit compacte et contenue dans Ω et admette un groupe de Poincaré fini. Si, de plus, V_n est compact et connexe et si $p = 1$ toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe de Poincaré fini.*

THÉORÈME DE HAEFLIGER. — *Il n'existe pas de structure feuilletée analytique réelle de co-dimension 1 sur une variété compacte simplement connexe.*

COMPLÈMENT AU THÉORÈME DE STABILITÉ. — *Si (V_n, Σ_p) est une structure feuilletée analytique réelle ou complexe de co-dimension 1 et si γ est une feuille compacte dont le nombre de Betti (rationnel) de la dimension 1 est nul, il existe un voisinage ouvert Ω de γ tel que toute feuille γ' qui rencontre Ω soit compacte, contenue dans Ω , et ait un nombre de Betti de la dimension 1 égal à 0.*

(On remarquera que le nombre de Betti de dimension 1 peut être nul sans que le groupe de Poincaré soit fini).

Les résultats qui précèdent font apparaître en quoi les conditions d'analyticité ou de co-dimension 1 sont remarquables; ces résultats impliquent également des questions non résolues à ce jour (par exemple : le complément au théorème de stabilité est-il valable si l'on supprime dans son énoncé l'hypothèse d'analyticité ?)

Il reste maintenant à dire quelques mots sur l'outil essentiel que constitue la notion de groupe d'holonomie \mathcal{G}_x d'une feuille γ au point x . Cette notion a été introduite par Ch. EHRESMANN [1]; nous nous contenterons de donner l'idée de la définition et nous citerons quelques conséquences immédiates :

A tout chemin fermé c d'origine x tracé sur γ correspond un homéomorphisme h_c (de classe C_∞ , analytique réel, ou analytique complexe) d'un voisinage de l'origine O de R^p ou C^p sur un voisinage de O . Cet homéomorphisme h_c s'exprime au moyen des formules :

$$(1) \quad \bar{\varphi}_i = h_{c,i}(\varphi_j)$$

au moyen des coordonnées locales φ_i introduites ci-dessus. Dans les formules (1) les $\bar{\varphi}_i$ sont les coordonnées de la plaque en laquelle la feuille γ' issue de la plaque de coordonnées φ_i , au voisinage de x , rencontre ce voisinage de x après avoir suivi sur γ' un chemin voisin de c . Si c est déformé, les homéomorphismes h_c définissent un même germe $h_{\bar{c}}$ (où \bar{c} est la classe d'homotopie de c). Les germes $h_{\bar{c}}$ engendrent un groupe \mathcal{G}_x qui est appelé le groupe d'holonomie de γ en x . L'application $\bar{c} \rightarrow h_{\bar{c}}$ est homomorphisme p du groupe de Poincaré $\pi(\gamma)$ de γ dans \mathcal{G}_x . Si l'on désigne par $h_{\bar{c},r}$ le jet d'ordre r de $h_{\bar{c}}$, les $h_{\bar{c},r}$ forment un groupe noté $\mathcal{G}_{x,r}$.

Dans les cas d'une structure analytique réelle ou complexe, la connaissance des groupes $\mathcal{G}_{x,r}$ définit complètement \mathcal{G}_x .

Les éléments de $\mathcal{G}_{x,r}$ se présentent sous la forme polynomiale

$$\bar{\Phi}_i = a_{ij} \Phi_j + a_{ijk} \Phi_j \Phi_k + \dots + a_{i,i_1 \dots i_r} \Phi_{i_1} \dots \Phi_{i_r}$$

et la loi de composition est la loi de composition habituelle des parties polynomiales de degré r des développements limités.

2. Feuilletages de co-dimension 1. — Le théorème de Haefliger cité plus haut met en évidence une propriété remarquable des feuilletages de co-dimension 1 et analytiques réels. Un examen de la démonstration de Haefliger montre qu'en fait l'hypothèse d'analyticité peut être remplacée par l'hypothèse suivante :

Pour chaque feuille γ et chaque élément α du groupe de Poincaré de γ , l'élément du groupe d'holonomie relatif à α est semblable au germe d'une fonction analytique.

Il en résulte en particulier :

THEOREME 1. — *Si (V_n, Σ_1) est une structure feuilletée de classe C_∞ dont toutes les feuilles ont un groupe de Poincaré fini, et si V_n est compacte alors le groupe de Poincaré de V_n contient un élément d'ordre infini.*

Donc en particulier, *on ne saurait trouver un feuilletage de co-dimension 1 de la sphère S_n dont toutes les feuilles seraient homéomorphes à R^{n-1} .*

Nous allons considérer, à présent, des feuilles γ non compactes possédant la propriété suivante :

(π) *Le filtre d'Alexandroff de γ possède une base formée d'ensembles connexes.*

La propriété (π) signifie : γ a un seul bout. Il en est ainsi pour les feuilles homéomorphes à R^n ($n > 1$).

On montre facilement que l'adhérence $A(\gamma)$ du filtre d'Alexandroff d'une feuille γ est une réunion de feuilles. *Si γ a la propriété (π) et si V_n est compacte, il est clair que $A(\gamma)$ est connexe.*

D'un autre côté, si une feuille γ d'un feuilletage de co-dimension 1 contient une feuille compacte γ' dans son adhérence, alors la réunion des feuilles δ qui contiennent γ' dans leur adhérence, est un ouvert.

On en déduit :

THÉOREME 2. — *Si toutes les feuilles non compactes d'un feuilletage de co-dimension 1 de la variété compacte V_n ont une propriété π et sont propres, alors les feuilles compactes de ce feuilletage forment un ensemble connexe.*

Ce théorème éclaire l'exemple classique de la structure feuilletée sur S_3 .

Il est intéressant de remarquer que les feuilletages analytiques complexes de co-dimension 1 vérifient la propriété P sauf dans certains cas exceptionnels où les éléments du groupe d'holonomie du 1^{er} ordre (voir 3) se présentent sous la forme :

$$z' = \alpha z \quad \text{où} \quad |\alpha| = 1.$$

Un résultat analogue au théorème 2 est donc valable pour les structures feuilletées analytiques complexes.

REMARQUE. — Les conclusions du théorème 2 cessent d'être valables si l'on supprime l'hypothèse que les feuilles sont propres.

A ce propos, il est utile d'indiquer qu'on construit facilement des exemples [4], sur une variété V_n compacte et connexe, de feuilletages de co-dimension 1 dont certaines feuilles sont localement partout denses, mais non partout denses. Il est plus difficile de mettre en évidence ce dernier phénomène dans le cas d'un feuilletage de co-dimension $n - 1$ (c'est-à-dire dans les cas des lignes intégrales d'un champ de vecteurs); voici un exemple instructif à cet égard :

Considérons, sur le tore T^2 , le champ de vecteurs \vec{V} engendrant des trajectoires ergodiques et modifions ce champ en module, mais non en direction,

de façon à faire apparaître deux points singuliers α et β situés sur une trajectoire de \vec{V} conformément à la figure 1. Fendons le tore selon le segment $\alpha\beta$, écartons les deux lèvres de la plaie et recollons un disque D sur le contour ainsi formé de façon à obtenir de nouveau un tore. Remplissons ce disque D par

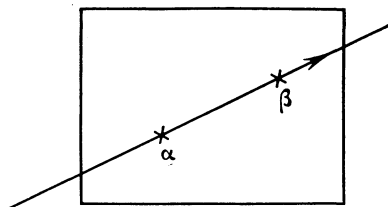


Fig. 1.

un réseau de courbes conformément à la figure 2. De cette façon, on obtient sur le tore un champ de vecteurs \vec{V} (présentant deux singularités) et admettant une ligne intégrale localement partout dense, mais non pas globalement partout dense. On conçoit dès lors qu'il soit possible d'indiquer sur une variété à trois dimensions un phénomène de même espace, mais sur un champ de vecteurs sans singularité.

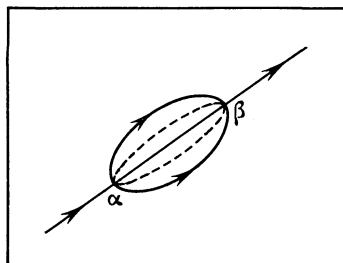


Fig. 2.

3. Feuilletages analytiques. — Le point de départ de ce paragraphe est le complément du théorème de stabilité de 1 : ce complément au théorème de stabilité reste-t-il valable si l'on supprime dans l'énoncé les termes suivants : « de co-dimension 1 » et si l'on remplace « (V_n, Σ_1) » par « (V_n, Σ_p) ». Il est probable que la réponse à cette question soit négative. Mais nous remarquons que le groupe d'holonomie $\mathcal{G}_{x,r}$ d'ordre r d'une feuille au point x est un groupe linéaire si $r=1$, et est un groupe abélien pour $r \geq 1$ si $\mathcal{G}_{x,r-1}$ se réduit à l'identité. Il en résulte :

THÉORÈME. — Si (V_n, Σ_p) , $p > 1$, est une structure feuilletée analytique réelle ou complexe de co-dimension p et si γ est une feuille compacte dont

le nombre de Betti (rationnel) de la dimension 1 est nul et si $\mathcal{G}_{x,1}$ est réduit à l'identité, alors il existe un voisinage ouvert Ω de γ tel que toute feuille γ' qui rencontre Ω soit compacte et contenue dans Ω et ait un nombre de Betti de la dimension 1 égal à 0.

D'une façon plus générale, le théorème précédent reste vrai si l'on supprime dans son énoncé les termes : « $\mathcal{G}_{x,1}$ ($x \in \gamma$) est réduit à l'identité » et si l'on remplace par « il n'existe aucun homéomorphisme p du groupe de Poincaré $\pi(\gamma)$ de γ dans le groupe linéaire de R^p (ou C^p) tel que $p(\pi(\gamma))$ contienne un élément d'ordre infini ».

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EHRESMANN (Charles). — *Sur la théorie des variétés feuilletées*, (*Rend. Mat. e delle sue Appl.*, 5^e série, t. 10, 1951, p. 64-82).
- [2] HAEFLIGER (André). — *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes* (*Comment. Math. Helvet.*, t. 32, 1958, p. 248-329) (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1958).
- [3] REEB (Georges). — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Paris, Hermann, 1952 (*Act. scient. et ind.*, 1183) (*Thèse Sc. math.* Strasbourg, 1948).
- [4] REEB (Georges). — *Sur la théorie générale des systèmes dynamiques* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 6, 1955-56, p. 89-115).

Georges REEB
 Professeur à la Faculté des Sciences
 12, rue Duployé
 Grenoble (Isère)

