

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. HAEFLIGER

Sur les self-intersections des applications différentiables

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 351-359

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__351_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SELF-INTERSECTIONS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES;

PAR

ANDRÉ HAEFLIGER.

INTRODUCTION. — On se propose d'étudier d'une manière générale les self-intersections d'une application différentiable f d'une variété V dans une variété M . Par exemple un point double de f est un couple (x_1, x_2) de points de V tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$; il est naturel d'identifier les deux couples (x_1, x_2) et (x_2, x_1) , c'est-à-dire de considérer les points doubles comme des points du carré symétrique de V privé de la diagonale. C'était l'idée de WHITNEY dans [7] et [8] par exemple. Plus généralement les points p -uples de f seront des points du quotient du sous-espace V_0^p de V^p formé des suites de p points distincts de V par l'action du groupe $S(p)$ des permutations des p facteurs de V^p . On est aussi conduit à définir d'autres types de self-intersection, par exemple les points doubles de la restriction de f aux points singuliers de f . Génériquement, les points de self-intersection d'un certain type de f forment une sous-variété du quotient V_π de V_0^p par un sous-groupe π de $S(p)$; cette sous-variété représente une classe d'homologie qu'il s'agira d'évaluer ⁽¹⁾.

Nous nous placerons dans le cadre de la théorie des jets infinitésimaux de C. EHRESMANN (*cf.* [1]) et nous utiliserons les méthodes et les idées fondamentales développées par THOM et WHITNEY dans leurs études des singularités des applications différentiables.

I. Géométrie des self-intersections.

1. **Symétrisé d'un fibré.** — Soit E un fibré de base V , fibre F et groupe structural G . Un sous-groupe π du groupe $S(p)$ des permutations de p objets

⁽¹⁾ L'auteur se propose de revenir ailleurs sur ce sujet et de compléter cet exposé sur plusieurs points.

agit sur les produits E^p et V^p par permutation des facteurs. Le groupe π transforme en eux-mêmes le sous-espace V_0^p de V^p formé des suites de p points de V tous distincts et le sous-espace E_0^p de E^p se projetant sur V_0^p . Désignons par E_π et V_π les quotients de E_0^p et V_0^p par la relation d'équivalence associée à l'action de π .

PROPOSITION. — E_π est un fibré de base V_π , de fibre F^p ; son groupe structural G_π est l'extension du groupe-produit G^p par π agissant naturellement sur G^p .

Autrement dit G_π est formé des couples (g, α) , où $g \in G^p$ et $\alpha \in \pi$, avec la loi de composition $(g, \alpha)(g', \alpha') = (g \cdot \alpha(g'), \alpha\alpha')$, où $\alpha(g')$ désigne l'élément de G^p obtenu à partir de g' après la permutation α de ses composantes. On a donc la suite exacte

$$e \rightarrow G^p \rightarrow G_\pi \rightarrow \pi \rightarrow e.$$

Toute section de E définit canoniquement une section de E_π .

Dans ce qui suit, V sera une variété différentiable de dimension n et E sera le fibré E^r sur V des jets d'ordre r de V dans une variété différentiable M de dimension m (cf. [1]); sa fibre est donc la variété $T_n^r(M)$ des n -vitesses d'ordre r de M et son groupe structural le groupe L_n^r des jets d'ordre r à l'origine O de R^n des automorphismes différentiables de R^n laissant fixe O . Soit f une application différentiable de V dans M ; elle se prolonge suivant une section différentiable f^r de E^r (celle qui associe à tout point de V le jet d'ordre r de f en ce point); elle définit donc une section différentiable f_π^r du fibré différentiable E_π^r .

On désignera par V^p/π le quotient de V^p par l'action de π ; V_π est une variété ouverte dans V^p/π ; son complémentaire sera appelé la sous-variété de ramification de V^p/π .

Il est probable qu'une partie de la théorie puisse s'appliquer à des espaces plus généraux que les variétés (cf. Wu [10], [11], [12]).

2. Le type d'une self-intersection d'une application. — Pour donner une définition du type invariante par les changements de coordonnées dans V et dans M , il faut d'une part considérer dans la fibre $[T_n^r(M)]^p$ de E_π^r un sous-ensemble S invariant par le groupe structural $(L_n^r)_\pi$. D'autre part, soit Γ le pseudo-groupe des automorphismes locaux différentiables de M ; considérons sur M^p le pseudo-groupe Γ_π engendré par les éléments de la forme $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, où $\gamma_i \in \Gamma$, invariants par π , c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in \pi$, on a $\alpha\gamma(z) = \gamma\alpha(z)$ partout où les deux membres sont définis; Γ_π se prolonge naturellement suivant un pseudo-groupe d'automorphismes locaux de $[T_n^r(M)]^p$ désigné encore par Γ_π . On supposera alors de plus que S est invariant par Γ_π (ce qui exprime l'invariance de la définition pour les changements de coordonnées de M).

Soit E_S l'espace fibré associé à E_π^r de fibre S ; il s'identifie canoniquement à un sous-fibré de E_π^r .

DÉFINITION. — On dira qu'une application différentiable f présente au point x de V_π une self-intersection de type S si $f_\pi^r(x)$ appartient au sous-fibré E_S .

EXEMPLES. — Cas $r=0$. — Alors $T_n^0(M)=M$, et E^0 n'est autre que le fibré trivial $V \times M$; E_π^0 est le fibré de fibre M^p associé au revêtement V_0^p de V_π (cf. 1). Tout sous-espace de M^p invariant par Γ_π est réunion (invariante par π) de sous-espaces définis en égalant entre elles certaines coordonnées y_i de $y=(y_1, \dots, y_p) \in M^p$; par exemple l'ensemble des points dont au moins $q \leq p$ coordonnées sont égales. Si $y_1 = \dots = y_p$, on obtient la diagonale de M^p ; le type de self-intersection qu'elle détermine dans $V_{S(p)}$ est le point p -uple.

Cas $r=1$. — E^1 est le fibré des applications linéaires des espaces tangents aux points de V dans les espaces tangents aux points de M . Supposons $p=2$, $\pi=Z_2$; on peut prendre par exemple pour $S \subset T_n^1(M) \times T_n^1(M)$ les couples formés de deux n -vitesses dégénérées en un même point de M ; le type de self-intersection ainsi défini correspond au point double du sous-ensemble des points singuliers de f .

3. Transversalité. — Dorénavant nous supposons que S est une sous-variété fermée différentiable de la fibre $[T_n^r(M)]^p$. Le plus souvent, on doit admettre que S présente des singularités; nous supposons alors que S est une collection de sous-variétés différentiables (cf. [2], exposé 7); il en sera alors de même pour E_S ; on dira que f_π^r est transverse sur E_S , si f_π^r est transverse au sens de THOM sur chaque sous-variété de la décomposition (cf. [2]).

Le lemme de transversalité de THOM (cf. [4]) peut s'étendre aux self-intersections. Il entraîne en particulier le

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ. — Toute application différentiable de V dans M peut être approchée à l'ordre $q > r$ par une application différentiable f telle que f_π^r soit transverse sur la sous-variété E_S de E_π^r en tout point d'un compact donné K de V_π .

On dira que f présente sous forme régulière sur K la self-intersection de type S .

REMARQUE. — Il serait intéressant de savoir si l'on peut remplacer K par V_π tout entier, comme cela peut se vérifier dans un grand nombre de cas particuliers. Mais de toute façon, on peut remplacer K par un ouvert U de V_π dont le complémentaire dans V^p/π soit un voisinage de la sous-variété de ramification de V^p/π ; on peut même s'arranger pour que U soit difféomorphe

à V_π et en soit une rétraction. On ne modifiera donc pas les propriétés homologiques en identifiant U et V_π et l'on dira simplement que f présente sous forme régulière la self-intersection de type S si c'est vrai sur U .

EXEMPLE. — Dire qu'une application f de V dans M présente sous forme régulière les points p -uples, c'est dire qu'en $y = f(x_1) = \dots = f(x_p)$, $x_i \in V$, les images par f des espaces tangents à V aux points $x_1, \dots, x_p$ sont en position générale.

On dira qu'une immersion f de V dans M est complètement régulière (cf. WHITNEY [8]) si f_π^n est transverse sur E_S , quel que soit S invariant par π et Γ_π ; il suffit d'ailleurs de supposer que $f^p : V^p \rightarrow M^p$ est transverse sur la diagonale de M^p pour tout p .

COROLLAIRE. — Toute immersion de V compact dans M peut être approchée à l'ordre $q > 1$ par une immersion complètement régulière.

Il semble qu'on puisse montrer sans difficulté qu'une immersion complètement régulière est stable.

4. Singularités et self-intersections d'une application. — En général, l'ensemble des points de self-intersection d'un certain type dans V d'une application f de V dans M a une adhérence dans la sous-variété de ramification de V^p/π ; cette adhérence rencontre la diagonale de V^p/π , identifiée à V , en des points singuliers de f . Par exemple, l'adhérence des points doubles d'une application 1-générique f (cf. [2] exposé 7) est l'ensemble de tous les points singuliers de f ; le cas le plus simple est celui du point cuspidal d'une application de R^2 dans R^3 (cf. WHITNEY [8]).

En suivant la terminologie de THOM (cf. [3] et [4]), on définit $(S_1)^q$ (par récurrence sur q) comme l'ensemble des points de V où le rang de la restriction de f à $(S_1)^{q-1}$ est inférieur d'une unité à sa valeur maximum. Si le prolongement d'ordre q de f est transverse, dans un espace de jets convenable, sur le sous-fibré qui définit la singularité $(S_1)^q$, on peut introduire au voisinage de $x \in (S_1)^q$ et de $y = f(x)$ des coordonnées locales $(u_1, \dots, u_{qm-1}, x, v_1, \dots, v_k)$ et $(U_1, \dots, U_{qm-1}, Y_1, \dots, Y_m, V_1, \dots, V_k)$, dimension de $V = qm + k$ et dimension de $M = (q+1)m - 1 + k$, telles que f soit définie par les équations

$$Y_j = xu_j + x^2u_{j+m} + \dots + x^qu_{j+(q-1)m} + \text{termes de degré} > q+1 \\ (1 \leq j < m),$$

$$Y_m = xu_m + \dots + x^{q-1}u_{(q-1)m} + x^{q+1} + \text{termes de degré} > q+1,$$

$$U_i = u_i \quad (1 \leq i \leq qm-1),$$

$$V_s = v_s \quad (1 \leq s \leq k).$$

Au voisinage de O , les points $(q+1)$ -uples forment une sous-variété de

dimension $q + k$ dans V^{q+1}/π dont l'adhérence dans la diagonale est $(S_1)^q$ qui est de dimension k .

REMARQUE. — Il est probable qu'on puisse s'arranger pour faire disparaître les termes de degré $q + 1$ dans l'expression ci-dessus (WHITNEY l'a fait dans des cas particuliers *cf.* [5], [8]).

II. Homologie des self-intersections.

5. Classe de cohomologie duale à un cycle de self-intersection. —

Nous supposons comme au paragraphe 3 que le sous-espace S de la fibre de E_π^r qui définit le type d'une self-intersection est une sous-variété différentiable, éventuellement avec singularités, mais portant une classe d'homologie fondamentale entière ou modulo 2 (de dimension égale à celle de S); alors la sous-variété E_S de E_π^r vérifiera les mêmes hypothèses.

Soit f une application différentiable de V dans M présentant sous forme régulière (*cf.* 3) la self-intersection de type S (on supposera cette hypothèse implicitement vérifiée dans tout ce qui suit); dans ce cas, l'ensemble S_f des points de self-intersection de type S de f est une sous-variété différentiable de V , de même codimension que E_S , et qui porte aussi une classe d'homologie fondamentale bien déterminée (au moins si S_f est un ANR, *cf.* [2], exposé 8); on dira que S_f est le *cycle* des points de self-intersection de type S de f . Alors :

PROPOSITION. — *La classe de cohomologie duale au cycle des points de self-intersection de type S de f est l'image par $(f_\pi^r)^*$ de la classe duale à E_S dans E_π^r .*

Ceci montre, en particulier, que cette classe est un invariant de la classe d'homotopie de f .

EXEMPLES. — On voit facilement que la classe duale au cycle des points doubles d'une application f de V dans M est une

classe modulo 2, si M est non orientable;
classe entière, si M est orientable de dimension paire;
classe à valeur dans le faisceau d'entiers tordus associé au revêtement V_0^2 de V_{Z_2} , si M est orientable et de dimension impaire.

On a un résultat analogue pour les points p -uples.

6. Expression générale de la classe duale à un cycle de self-intersection. — Soit $\hat{E}_\pi^r$ l'espace fibré de fibre $[T_n^r(M)]^p$ associé à l'universel pour le groupe $(L_n^r)_\pi$. Il existe une représentation h , déterminée à l'hom-

topie près, de E_π^r dans $\hat{E}_\pi^r$. Appelons *classe universelles* de E_π^r les classes de cohomologie de E_π^r images par h^* de classes de $\hat{E}_\pi^r$.

THÉOREME. — *La classe duale au cycle des points de self-intersection de type S d'une application f est l'image par $(f_\pi^*)^*$ d'une classe universelle de E_π^1 .*

DÉMONSTRATION. — Le sous-espace invariant S définit des sous-fibrés E_S et $\hat{E}_S$ de E_π^r et $\hat{E}_\pi^r$ resp.; la classe duale à E_S est l'image par h^* de la classe duale à $\hat{E}_S$ (on peut supposer que $\hat{E}_\pi^r$ est une variété différentiable et que h est différentiable). D'autre part, comme $T_n^r(M)$ et L_n^r ont même type d'homotopie que $T_n^1(M)$ et L_n^1 , alors $\hat{E}_\pi^r$ a même type d'homotopie que $\hat{E}_\pi^1$.

REMARQUE. — D'une manière générale, en reprenant les notations de 1, soient U_π l'universel pour le groupe π , B_G le classifiant pour le groupe G et $\hat{E}$ le fibré de fibre F associé à l'universel pour G . On obtient le fibré de fibre F^p associé à l'universel pour G_π en faisant le quotient de $U_\pi \times E^p$ par la relation d'équivalence $(x, y) \sim (x\alpha^{-1}, \alpha y)$, où $\alpha \in \pi$; sa base est le quotient de $U_\pi \times (B_G)^p$ par π .

APPLICATION. — La classe duale à un cycle de self-intersection d'ordre 0 d'une application f de V dans R^m est une classe caractéristique du revêtement V_0^p de V_π . Par exemple, la classe duale au cycle des points doubles d'une application de V dans R^m est μ^m , où μ est la classe fondamentale du revêtement V_0^2 de V_{Z_2} .

7. Cohomologie modulo 2 de l'universel pour les points doubles.

Cas $r=0$. — Le fibré $E_{Z_2}^0$ est à groupe structural Z_2 . Soit U l'universel pour Z_2 et P sa base; l'universel $E_{Z_2}^0 = Q$ est le quotient de $X = U \times M$ par Z_2 (agissant sur U comme d'habitude et sur $M \times M$ en permutant les facteurs). Alors Q est fibré sur P , de fibre $M \times M$.

Comme Z_2 agit sans point fixe sur X , on a la suite exacte de Smith (tout ce qui suit est en coefficient modulo 2)

$$\rightarrow H^{q-1}(Q) \xrightarrow{\mu} H^q(Q) \xrightarrow{\alpha} H^q(X) \xrightarrow{\sigma} H^q(Q) \rightarrow$$

où μ est le cup produit par la classe fondamentale du revêtement X de Q .

Soit Δ l'application de $H^*(M)$ dans $H^*(Q)$ qui fait correspondre à une classe c la classe spéciale (au sens de Smith) $1 \otimes c \otimes c$ identifiée à une classe de Q ; comme $\alpha\Delta$ est injectif, Δ l'est aussi, et l'on désignera par D l'image de $H^*(M)$ par Δ . L'homomorphisme $\mu^k : H^*(Q) \rightarrow H^*(Q)$ est biunivoque sur D .

D'autre part, α applique biunivoquement l'image de σ sur le sous-groupe symétrisé S de $H^*(M) \otimes H^*(M) = H^*(M \times M)$ (c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $a \otimes b + b \otimes a$); on identifiera donc S avec l'image de σ . On a la

PROPOSITION. — *Le groupe de cohomologie modulo 2 de l'universel pour les points doubles (d'ordre 0) est la somme directe*

$$\sum_k \mu^k D + S.$$

Cas $r > 0$. — Soit E^r le fibré des jets d'ordre r de V dans M ; sa fibre a même type d'homotopie que M et son groupe structural L_n^r le même type d'homotopie que le groupe orthogonal $O(n)$. D'après la remarque du paragraphe précédent, on obtiendra $\hat{E}_{Z_2}^r$, au type d'homotopie près, en prenant le quotient de $U \times (B_{O(n)} \times M)^2$ par Z_2 . Donc :

PROPOSITION. — *On obtient la cohomologie de l'universel pour les points doubles d'ordre $r > 0$, en remplaçant dans la proposition précédente M par $M \times B_{O(n)}$.*

Désignons par V_2 (au lieu de V_{Z_2}) le carré symétrique de V auquel on a enlevé la diagonale. Comme plus haut, on a des homomorphismes $\Delta : H^*(V) \rightarrow H^*(V_2)$ et $S : H^*(V) \times H^*(V) \rightarrow H^*(V_2)$ en faisant correspondre à toute classe $a \in H^*(V)$ [resp. $a \otimes b \in H^*(V) \otimes H^*(V)$] la classe spéciale $a \otimes a$ (resp. $a \otimes b + b \otimes a$) de $H^*(V \times V)$, et en l'induisant sur V_0^2 où elle s'identifie à une classe de V_2 . Appelons encore μ la classe fondamentale du revêtement V_0^2 de V_2 . De ce qui précède, résulte le :

THÉOREME. — *La classe duale à un cycle de self-intersection dans V_2 d'une application f de V dans M s'exprime sous la forme $\sum_k \mu^k d_k + s$, où d_k et s sont les images par Δ et S de classes de $H^*(V)$ et $H^*(V) \otimes H^*(V)$ appartenant à l'anneau engendré par les classes de Stiefel-Whitney de V et le sous-groupe $f^*[H^*(M)]$.*

EXEMPLE. — Le cycle des points singuliers S_1 d'une application f de V dans R^m est dual à la classe de Stiefel-Whitney normale $\overline{W}^{m-n+1}$ (cf. ТНОМ [3]); les points doubles de S_1 forment un cycle dans V_2 dual à $\mu^m \Delta(\overline{W}^{m-n+1})$.

8. Relations homologiques entre points doubles et points singuliers. — D'après 4, le cycle S des points singuliers d'une application f de V dans M peut être considéré comme le bord du cycle D des points doubles de f dans V_2 . Si V est identifiée à la diagonale de V^2/Z_2 , la classe d'homologie de S est

l'image dans l'homomorphisme bord $\partial : H_*(V^2/Z_2 \bmod V) \rightarrow H_*(V)$ de la classe du cycle (mod V) D .

Lorsque $M = R^m$, on sait que la classe duale à D est μ^m , et la classe duale à $S : \bar{W}^{m-n+1}$. Ceci conduit à la définition topologique suivante des classes de Stiefel-Whitney normales.

Soit V une variété topologique et soit μ la classe fondamentale du revêtement V_0^2 de V_2 ; le groupe $H^m(V_2)$ est en dualité (mod 2) avec le groupe $H_{2n-m}(V_2/Z_2 \bmod V)$. L'image par ∂ de la classe duale à μ^m sera par définition la classe duale à $\bar{W}^{m-n+1}$ dans V (cf. Wu [10], [12]).

9. Cas des immersions. — Supposons V compacte pour simplifier. Soit f une immersion complètement régulière de V dans M ; le cycle des points p -uples de f est compact dans V_π ; sa classe duale peut être considérée comme appartenant au groupe $H_K^*(V_\pi)$ de cohomologie de V à support compact.

PROPOSITION. — *La classe duale à support compact au cycle des points p -uples d'une immersion f est un invariant de la classe d'homotopie régulière de f .*

Le bord d'un petit voisinage tubulaire symétrique dans $V \times V$ de la diagonale est isomorphe à l'espace fibré T des vecteurs tangents à V de longueur unité; on peut donc considérer que V_2 est bordé par P , le fibré en projectifs associé à T (cf. WHITNEY [7]).

Considérons le cas $M = R^m$. Soit S le fibré de base V_2 , fibre S^{m-1} , associé au revêtement $V_0^2 \rightarrow V_2$, le groupe structural agissant par symétrie sur S^{m-1} , et soit S_0 la restriction de S à P .

Soit f une immersion de V dans R^m ; l'application de T dans S^{m-1} qui envoie le vecteur $v \in T$ sur le vecteur unitaire $\dot{f}(v)/|\dot{f}(v)| \in S^{m-1}$ commute avec les symétries dans T et S^{m-1} et définit donc une section s_f de S_0 . En identifiant la cohomologie à supports compacts de V_2 avec la cohomologie de V_2 modulo P , on a le

THÉORÈME. — *La classe D_f à support compact duale aux points doubles de f est l'obstruction au prolongement de la section s_f au fibré S .*

Lorsque V est orientable, on peut calculer aisément, à partir de D_f , la $(m-n)$ -classe entière de Stiefel-Whitney du fibré normal à $f(V)$ dans R^m .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] EHRESMANN (C.). — *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie* [Colloques internationaux du C. N. R. S. [52, 1953, Strasbourg], Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953, p. 97-110].

- [2] Séminaire CARTAN, t. 9, 1956-1957 : *Quelques questions de topologie*, nos 7 et 8.
- [3] THOM (R.). — *Les singularités des applications différentiables* (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 43-87).
- [4] THOM (R.). — *Un lemme sur les applications différentiables* (Bol. Soc. mat. mexic., 2^e série, t. 1, 1956, p. 59-71).
- [5] THOM (R.). — *Les ensembles singuliers d'une application différentiable et leurs propriétés homologiques* (Séminaire de Topologie de Strasbourg, décembre 1957).
- [6] WHITNEY (H.). — *The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables* (Duke math. J., t. 10, 1943, p. 161-172).
- [7] WHITNEY (H.). — *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space* (Ann. Math., t. 45, 1944, p. 220-246).
- [8] WHITNEY (H.). — *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n-1)$ -space* (Ann. Math., t. 45, 1944, p. 247-293).
- [9] WHITNEY (H.). — *On singularities of mapping of Euclidean spaces, I: Mappings of the plane into the plane* (Ann. Math., t. 62, 1955, p. 374-410).
- [10] WU Wen-Tsun. — *On the realisation of complexes in Euclidean spaces, I, II* (Acta Math. Sinica, t. 5, 1955, p. 505-552 et t. 7, 1957, p. 79-101).
- [11] WU Wen-Tsun. — *On the imbedding of polyhedrons in Euclidean spaces* (Bull. Acad. polon. Sc., Cl. III, t. 4, 1956, p. 573-577).
- [12] WU Wen-Tsun. — *A theory of imbedding and immersion in Euclidean spaces* (Inst. Math. Acad. Sinica) (multigraphié).

André HAEFLIGER,
Université de Genève
(Suisse).

