

BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 12-16

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__12_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__12_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$; par M. LAGUERRE.

(Séance du 22 novembre 1878.)

1. Je suppose, dans tout ce qui suit, que n soit un nombre entier positif. On a évidemment

$$(1) \quad \int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

Θ_n désignant un polynôme entier en x et en z , U_n et V_n deux polynômes entiers en x . Si, pour mettre les variables en évidence, on écrit pour un instant $\Theta_n(z, x)$ au lieu de Θ_n , on a d'ailleurs

$$V_n = \Theta_n(0, x).$$

En dérivant l'équation précédente, on a

$$z^n = -\frac{d\Theta_n}{dz} + \Theta_n(z - x) + U_n,$$

et de cette relation, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on déduit facilement les systèmes de valeurs suivants :

$$U_0 = 1, \quad \Theta_0 = 0; \quad U_1 = x, \quad \Theta_1 = 1; \quad U_2 = x^2 + 1, \quad \Theta_2 = z + x.$$

En général, de l'identité

$$z^{n+1} = -nz^{n-1} + z^n(z - x) + z^n x + nz^{n-1},$$

on déduit

$$(2) \quad U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1}$$

et

$$(3) \quad \Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}.$$

2. La relation (2), jointe aux valeurs données de U_0 et de U_1 , montre immédiatement que les polynômes U_n sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Hermite, au sujet du développement de $e^{\frac{ax^2}{2} - \frac{a}{2}(x-h)^2}$ en série ⁽¹⁾, dans le cas particulier où l'on a $a = -1$ et $h = -z$.

Ces polynômes peuvent donc être définis par l'équation

$$(4) \quad e^{\frac{z^2}{2} + zx} = U_0 + U_1'z + \frac{U_2}{1.2}z^2 + \dots + \frac{U_n}{1.2.3\dots n}z^n + \dots$$

3. De l'égalité

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

on déduit, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à x ,

$$\begin{aligned} & -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_{n+1} + U_{n+1} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_{n+1} \\ &= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \frac{dU_n}{dx} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} + U_n \int_0^z ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ &= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \left(xU_n + \frac{dU_n}{dx}\right) \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} - U_n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} + U_n; \end{aligned}$$

d'où les relations suivantes :

$$(4) \quad \Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n,$$

$$(5) \quad U_{n+1} = xU_n + \frac{dU_n}{dx},$$

$$(6) \quad V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n.$$

⁽¹⁾ Sur un nouveau développement en série des fonctions (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1864, t. LVIII).

4. On en déduit facilement ces équations

$$nU_{n-1} = \frac{dU_n}{dx}$$

et

$$(7) \quad \frac{d^2U_n}{dx^2} + x \frac{dU_n}{dx} - nU_n = 0,$$

qui ont été données par M. Hermite.

Posons, pour abrégé,

$$\Theta_n = e^{\frac{x^2}{2} - x^2} H_n;$$

on aura les relations suivantes :

$$H_{n+1} = e^{-\frac{x^2}{2} + x^2} z^n + x H_n + n H_{n-1}$$

et

$$H_{n+1} = x H_n + \frac{dH_n}{dx} + U_n e^{-\frac{x^2}{2} + x^2}$$

d'où

$$n H_{n-1} = \frac{dH_n}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2} + x^2} (U_n - z^n)$$

et

$$(8) \quad \frac{d^2H_n}{dx^2} + x \frac{dH_n}{dx} - n H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + x^2} \left(z^{n+1} - z U_n - 2 \frac{dU_n}{dx} \right).$$

Il est remarquable que, le polynôme U_n étant une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

la fonction

$$H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + x^2} \Theta_n$$

satisfasse à l'équation

$$y'' + xy' - ny = e^{-\frac{x^2}{2} + x^2} \left(z^{n+1} - z U_n - 2 \frac{dU_n}{dx} \right),$$

qui ne diffère de la précédente que par la présence du second membre.

5. Les fonctions Θ peuvent s'exprimer facilement au moyen des fonctions U .

On a, en effet,

$$(9) \quad \Theta_{n+1} = \Sigma A_{m,n} U_m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

où, en posant, pour abréger, $n - m = \mu$,

$$A_{m,n} = z^n + \frac{m+1}{1} (\mu-1) z^{\mu-2} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2} (\mu-2)(\mu-3) z^{\mu-4} \\ + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} (\mu-3)(\mu-4)(\mu-5) z^{\mu-6} \dots$$

Le terme constant de cette expression est nul si μ est impair, et, si μ est pair, égal à

$$\frac{(m+1)(m+2) \dots \left(m + \frac{\mu}{2}\right)}{1.2.3 \dots \frac{\mu}{2}}.$$

Par suite, en faisant, dans la relation (9),

$$z = 0,$$

il vient

$$(10) \quad V_{n+1} = U_n + (n-1)U_{n-2} + (n-2)(n-3)U_{n-4} + \dots$$

6. En faisant $z = \infty$ dans l'équation (1), il vient

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

ou encore

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz + V_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Posons $z - x = t$, il viendra

$$(11) \quad \int_{-\infty}^x (x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt = U_n \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + V_n e^{-\frac{x^2}{2}},$$

formule où figure dans le premier membre l'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ces intégrales multiples donnent donc naissance aux mêmes polynômes U_n qui, dans la théorie développée par M. Hermite, proviennent des dérivées successives de la fonction $e^{\frac{x^2}{2}}$.
