

BULLETIN DE LA S. M. F.

J.FRANK ADAMS

**Exposé sur les travaux de C. T. C. Wall sur
l'algèbre de cobordisme Ω**

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 281-284

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__281_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ SUR LES TRAVAUX DE C. T. C. WALL SUR L'ALGÈBRE DE COBORDISME Ω ;

PAR

J. FRANK ADAMS
 (Cambridge).

Ce rapport est consacré à l'exposé des travaux de C.T.C. WALL de Trinity College, Cambridge.

Soient Ω et N les algèbres de cobordisme introduites par R. THOM. Soit $r: \Omega \rightarrow N$ l'homomorphisme naturel. On a alors le lemme suivant :

LEMME 1. — La suite $\Omega \xrightarrow{2} \Omega \xrightarrow{r'} N$ est exacte.

On doit ce résultat à ROKHLIN : DOLD a donné une démonstration géométrique. De ce lemme, WALL a déduit le théorème suivant :

THÉORÈME (de C.T.C. WALL).

- 1) : L'algèbre Ω ne contient pas d'éléments d'ordre 4.
- 2) : Si M est une variété orientable, dont les nombres de Stiefel et de Pontrjagin sont nuls, alors $\{M\} = 0$ dans Ω .
- 3) : Il existe une sous-algèbre W de N contenant $r(\Omega)$ et un homomorphisme $\partial': W \rightarrow \Omega$ tels que le triangle suivant est exact :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{2} & \Omega \\ & \searrow \partial' & \swarrow r' \\ & W & \end{array}$$

La proposition (2) confirme une conjecture de R. THOM.

La démonstration de WALL repose sur la construction géométrique suivante. Soit M une variété, pas nécessairement orientable, mais dont la première classe de Stiefel-Whitney $W_1(M)$ appartient à l'image de l'homomorphisme

$$H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M; \mathbb{Z}_2).$$

Nous pouvons donc représenter $W_1(M)$ par une application $f: M \rightarrow S^1$. Nous pouvons remplacer f par une application $g: M \rightarrow S^1$ telle que $g^{-1}(O)$ soit une sous-variété de M de codimension 1. Nous poserons $V = g^{-1}(O)$.

Soit U un voisinage suffisamment petit de O dans S^1 ; alors, par définition de g , $g^{-1}(U)$ est orientable, et V est donc orientable.

LEMME 2. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété V puisse être obtenue par la construction ci-dessus est que $2\{V\} = 0$ dans Ω .

DÉMONSTRATION. — Si V peut être obtenue de cette façon, nous pouvons couper M le long de V pour obtenir une variété M' qui est orientable et a $2V$ pour bord; la réciproque étant vraie également.

Nous définissons alors W comme le sous-ensemble de N consistant en classes $\{M\}$, M ayant la propriété mentionnée plus haut. Comme l'ensemble des variétés M possibles est fermé pour les opérations de produit et de réunion disjointe, W est une sous-algèbre de N .

LEMME 3. — En posant $\partial\{M\} = \{V\}$, on définit une dérivation $\partial: W \rightarrow N$ telle que :

$$\text{Im } \partial \subset r(\Omega) \subset \text{Ker } \partial \subset W \subset N.$$

DÉMONSTRATION. — (i) Nous devons montrer que la règle $\partial\{M\} = \{V\}$ fournit une fonction bien définie $\partial: W \rightarrow N$. Il suffit de montrer que les nombres de Stiefel de M déterminent ceux de V . Soit W_a un monôme engendré par des classes de Stiefel; on a alors :

$$\langle W_a(V), V \rangle = \langle i^* W_a(M), V \rangle$$

(parce que l'espace normal à V dans M est trivial)

$$\begin{aligned} &= \langle W_a(M), i_* V \rangle \\ &= \langle W_a(M), W_1(M) \cap M \rangle \end{aligned}$$

(parce que V est dual de $W_1(M)$)

$$= \langle W_a W_1(M), M \rangle$$

(ii) Il est alors possible de vérifier que ∂ est une dérivation en calculant les nombres de Stiefel de $\partial(xy)$ et de $(\partial x)y + x(\partial y)$ en fonction de ceux de x et y .

(iii) Nous savons déjà que $\text{Im } \partial \subset r(\Omega)$; il faut montrer que $r(\Omega) \subset \text{Ker } \partial$. Mais si la variété initiale M est orientable, $W_1(M) = 0$ et nous pouvons choisir l'application $g: M \rightarrow S^1$ telle que $g^{-1}(O)$ soit vide.

LEMME 4. — L'algèbre W est une algèbre de polynômes (sur Z_2) avec les générateurs suivants :

(i) Variétés V_{2i-1} de Dold pour $i \neq 2^j$. (Ces variétés sont orientables et d'ordre 2 dans Ω).

(ii) Variétés M_{2i} qui correspondent aux V_{2i-1} suivant le lemme 2.

(iii) Espaces projectifs complexes $P_{2n}(C)$ (pour $n \geq 1$).

La démonstration de ce lemme est assez laborieuse et sera seulement esquissée.

Premièrement, il est clair que les variétés citées appartiennent à W . En second lieu, on peut prouver qu'elles engendrent une sous-algèbre de polynômes de N . En fait, on peut établir, par le calcul, que :

$$S_{2i}[M_{2i}] = 1;$$

on peut aussi montrer que :

$$\{P_n(C)\} = \{P_n(R)\}^2 \quad (\text{dans } N)$$

en calculant leurs nombres de Stiefel.

Ensuite, on devra disposer d'un moyen de montrer que des variétés n'appartiennent pas à W .

Si M est une variété du type considéré plus haut, alors :

$$W_1^2(M) = \beta_2 W_1(M) = 0.$$

Soit W un polynôme en les classes de Stiefel-Whitney divisible par W_1^2 . On a $\langle W(M), M \rangle = 0$. Il faut compter le nombre de conditions indépendantes sur M qu'on obtient ainsi. Chacun de ces polynômes W correspond à un élément h de $H^*(M(O_k), Z_2)$, (disons $= H_k$) pour k assez grand. Ces éléments h constituent un sous-groupe qui est même un sous-module (disons S_k) sur l'algèbre de Steenrod A . WALL démontre que S_∞ est un facteur direct de H_∞ ; le nombre de générateurs A -libres de S_∞ fournit donc le nombre cherché des conditions indépendantes. Ceci prouve que la sous-algèbre de polynômes trouvée ci-dessus coïncide avec W elle-même.

LEMME 5. — $\text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ est une algèbre de polynômes (sur Z_2) avec des générateurs de dimensions $4i$. On a : $r(\Omega) = \text{Ker } \partial$. Si c est un élément de Ω dont tous les nombres de Pontrjagin sont nuls, alors $rc \in \text{Im } \partial$.

DÉMONSTRATION.

(i) W et les valeurs de ∂ sur les générateurs de W étant inconnues, un calcul élémentaire donne $\text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$.

(ii) Soit $P(p_1, p_2, \dots, p_r, \dots)$ un polynôme en les classes de Pontrjagin. L'homomorphisme $Z \rightarrow Z_2$ des coefficients envoie P en un certain polynôme $Q = Q(W_1, W_2, \dots, W_i, \dots)$ en les classes de Stiefel-Whitney. Le polynôme Q donne un nombre de Stiefel-Whitney $\langle Q(M), M \rangle$ défini sur des

variétés qui ne sont pas nécessairement orientables; mais si M est orientable, alors $\langle Q(M), M \rangle$ est la valeur de $\langle P(M), M \rangle$ réduit modulo 2. En particulier, ce nombre de Stiefel-Whitney s'annule sur $\text{Im } \partial$. Il détermine donc une fonction linéaire définie sur $\text{Ker } \partial/\text{Im } \partial$.

Mais, d'autre part, les valeurs mod 2 des nombres de Pontrjagin d'une variété orientable peuvent être choisies arbitrairement. Il en résulte que le rang de $(r(\Omega)/\text{Im } \partial)_m$ est au moins égal au nombre des nombres de Pontrjagin dont on dispose. Mais celui-ci est exactement le rang de $(\text{Ker } \partial/\text{Im } \partial)_m$, ce qui entraîne $r(\Omega) = \text{Ker } \partial$, et les fonctions linéaires mentionnées ci-dessus suffisent donc pour distinguer tous les éléments de $\text{Ker } \partial/\text{Im } \partial$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

(1) Soit c un élément de Ω_m , d'ordre 2^α , avec α maximal. Supposons $\alpha > 1$. Comme c est un élément de torsion, ses nombres de Pontrjagin sont nuls, et $rc \in \text{Im } \partial$. Il existe donc une classe c' d'ordre 2 telle que : $rc = rc'$. Comme $\alpha > 1$, $c - c'$ a le même ordre que c , c'est à dire 2^α .

En vertu du lemme 1, parce que $r(c - c') = 0$, on a : $c - c' = 2c''$; l'élément c'' serait d'ordre $2^{\alpha+1}$, en contradiction avec l'hypothèse. Ceci démontre (1).

(2) Soit c un élément de Ω dont les nombres de Stiefel sont nuls. Alors $c \in \text{Ker } r$, ce qui entraîne $c = 2c'$ d'après le lemme 1. En vertu d'un résultat de MILNOR, Ω n'a pas de torsion impaire. D'après la première partie (1) du théorème, c a pour ordre 0 ou ∞ . Si les nombres de Pontrjagin de c sont aussi nuls, alors $c = 0$; ceci démontre (2).

(3) Dans la construction originale, les nombres de Stiefel de V étaient déterminés par ceux de M , et ses nombres de Pontrjagin sont nuls, parce que $2\{V\} = 0$ dans Ω . Nous savons maintenant que ceci détermine la classe de V dans Ω ; nous pouvons poser $\partial'\{M\} = \{V\}$. L'exactitude du triangle résulte immédiatement de ce qui a été exposé plus haut.

Ceci achève la démonstration du théorème de WALL.

J. Frank ADAMS
Trinity Hall
Cambridge (Grande-Bretagne)

