BULLETIN DE LA S. M. F.

TAKASHI ONO

Sur une propriété arithmétique des groupes algébriques commutatifs

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 307-323
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__307_0>

Bull. Soc. Math. France,
85, 1957, p. 307 à 323.

SUR UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE DES GROUPES ALGÉBRIQUES COMMUTATIFS (1);

PAR

TAKASHI ONO.

Institut de Mathématiques, Université de Nagoya Chikusa-ku,
Nagoya (Japon).

Dans ce Mémoire nous introduirons pour un groupe algébrique G d'automorphismes d'un espace vectoriel V sur un corps k de nombres algébriques les notions de G-genre, de G-classe et de G-idèle. Si G est le groupe orthogonal d'une forme quadratique, les notions de G-genre et de G-classe coïncident avec les notions usuelles de genre et de classe (à de petits détails près). La notion de G-idèle s'introduit comme formant un groupe d'opérateurs sur un G-genre. Si V est un sur-corps de k, et si G est le groupe multiplicatif des éléments non nuls de V, considérés comme opérateurs linéaires sur V, alors les G-idèles s'identifient avec les idèles de V.

Tout G-genre se compose d'un nombre fini ou infini de G-classes. Il est connu dans la théorie arithmétique des formes quadratiques, que le nombre des classes contenues dans un genre est toujours fini. Il est intéressant d'examiner sous quelles conditions un G-genre se compose d'un nombre *fini* de G-classes. Nous démontrerons que c'est le cas pour G commutatif (théorème principal). Dans le cas particulier où V est un sur-corps de k, ce théorème contient le fait que le nombre des classes d'idéaux de V est fini. D'ailleurs notre démonstration du théorème principal utilise ce fait ainsi que le théorème de Dirichlet sur les unités des corps de nombres algébriques, de sorte qu'elle ne nous donne pas de nouvelle démonstration de ces faits classiques. Notre recherche est basée sur la théorie de Chevalley des groupes algébriques et la belle méthode de A. BOREL développée dans son travail récent.

---

(1) Ce travail a été fait pendant que l'auteur était boursier de la Fondation Yukawa.

PARAGRAPHE 1. — G-genres et G-idèles.

Soient k un corps de nombres algébriques de degré fini sur le corps des rationnels, et $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers algébriques de k. Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur premier fini de k, on notera $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ l'anneau des entiers du corps $\mathfrak{p}$-adique $k_\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}$ est infini, on posera $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}$, où $k_\mathfrak{p}$ est isomorphe, soit au corps des réels, soit au corps des complexes.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur k, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de V. Soit M un $\mathfrak{o}$-sous-module de V. Suivant M. EICHLER, nous appellerons M un *réseau* (par rapport à $\mathfrak{o}$) s'il possède un ensemble fini de générateurs et s'il contient n éléments de V linéairement indépendants sur k (2). Soit $V_\mathfrak{p}$ l'espace vectoriel déduit de V par extension à $k_\mathfrak{p}$ du corps de base. On peut alors définir comme plus haut un réseau de $V_\mathfrak{p}$ (par rapport à $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$) (2). Si M est un réseau de V, le $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} M$ est un réseau de $V_\mathfrak{p}$. De plus, on voit immédiatement qu'on a $M_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} x_1 + \ldots + \mathfrak{o}_\mathfrak{p} x_n$ pour presque tous les $\mathfrak{p}$ (3). EICHLER a montré que $M = \bigcap_\mathfrak{p} (V \cap M_\mathfrak{p})$, et que, réciproquement, étant donné, pour chaque $\mathfrak{p}$, un réseau $M^{(\mathfrak{p})}$ de $V_\mathfrak{p}$ tel que

$$M^{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} x_1 + \ldots + \mathfrak{o}_\mathfrak{p} x_n$$

pour presque tous les $\mathfrak{p}$, $M = \bigcap_\mathfrak{p} (V \cap M^{(\mathfrak{p})})$ devient un réseau de V tel que $M_\mathfrak{p} = M^{(\mathfrak{p})}$ pour tous les $\mathfrak{p}$, et que M est le seul réseau de V avec cette propriété (4).

Soit maintenant G un groupe algébrique d'automorphismes de V au sens de C. CHEVALLEY (5). Au moyen de la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on peut considérer G comme un sous-groupe du groupe multiplicatif $GL(n, k)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans k. On notera $G_\mathfrak{p}$ le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de $V_\mathfrak{p}$ contenant G; $G_\mathfrak{p}$ est aussi appelé le groupe déduit de G par extension à $k_\mathfrak{p}$ du corps de base (6).

Soient M et M' des réseaux de V. On dira que M et M' sont G-équivalents s'il existe un point s de G tel que $M' = sM$. Soient maintenant $M^{(\mathfrak{p})}$ et $M'^{(\mathfrak{p})}$ des réseaux de $V_\mathfrak{p}$. On dira que $M^{(\mathfrak{p})}$ et $M'^{(\mathfrak{p})}$ sont $G_\mathfrak{p}$-équivalents s'il existe un

(2) EICHLER [6], chapitres II et III.

(3) Pendant tout le cours de ce travail nous nous servirons de l'expression « pour presque tous les $\mathfrak{p}$ » au sens de « pour tout les $\mathfrak{p}$ sauf pour des $\mathfrak{p}$ exceptionnels en nombre fini ».

(4) EICHLER [6], chapitre III, paragraphe 12 et 13.

(5) CHEVALLEY [3], chapitre II, paragraphe 1.

(6) CHEVALLEY [3], chapitre II, paragraphe 5, définition 1.

point $s_{\mathfrak{p}}$ de $G_{\mathfrak{p}}$ tel que $M'^{(\mathfrak{p})} = s_{\mathfrak{p}} M^{(\mathfrak{p})}$. De plus, nous dirons que des réseaux M, M' de V sont G-localement équivalents si $M_{\mathfrak{p}}$ et $M'_{\mathfrak{p}}$ sont $G_{\mathfrak{p}}$-équivalents pour tous les $\mathfrak{p}$. Si M et M' sont G-équivalents, il est clair qu'ils sont G-localement équivalents. Cependant, la réciproque n'est pas toujours vraie. L'ensemble $\mathbf{C}(M)$ de tous les réseaux de V qui sont G-équivalents à M sera dit la *G-classe* de M, et l'ensemble $\mathbf{G}(M)$ de tous les réseaux de V qui sont G-localement équivalents à M sera dit le *G-genre* de M. Tout G-genre d'un réseau de V est donc la réunion d'un certain nombre fini ou infini de G-classes.

On notera $w_{\mathfrak{p}}$ la valuation normée de $k_{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur premier fini de k, on désignera par $U_{\mathfrak{p}}$ le groupe des éléments $s_{\mathfrak{p}} = (s_{ij}) \in G_{\mathfrak{p}}$ tels que $s_{ij} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} (1 \leqq i, j \leqq n)$ et que $w_{\mathfrak{p}}(\det s_{\mathfrak{p}}) = 1$. Alors $U_{\mathfrak{p}}$ est un groupe compact et un sous-groupe ouvert de $G_{\mathfrak{p}}$; on dira que $U_{\mathfrak{p}}$ est le groupe des unités de $G_{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{p}$ est infini, on posera $U_{\mathfrak{p}} = G_{\mathfrak{p}}$. Dans le groupe $\prod_{\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}}$, où le produit est étendu à tous les diviseurs premiers de k, considérons le sous-groupe J des éléments $\sigma = (s_{\mathfrak{p}})$ tels que $s_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$ pour presque tous les $\mathfrak{p}$; les éléments de J s'appelleront les *G-idèles* de k. Sur J, on définit une topologie comme suit (7) : sur le sous-groupe $J_{\infty} = \prod_{\mathfrak{p}} U_{\mathfrak{p}}$ de J, on prend pour topologie la topologie-produit de celles des $U_{\mathfrak{p}}$; et l'on prend la famille de tous les voisinages de l'élément neutre dans J_{∞} comme système fondamental de voisinages de cet élément dans J. Muni de cette topologie, J s'appellera le groupe des G-idèles; c'est un groupe localement compact. On pose

$$V_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}) = w_{\mathfrak{p}}(\det s_{\mathfrak{p}}), \qquad s_{\mathfrak{p}} \in G_{\mathfrak{p}}$$

pour tous les $\mathfrak{p}$. Si, pour tout G-idèle $\sigma = (s_{\mathfrak{p}})$, on pose $V(\sigma) = \prod_{\mathfrak{p}} V_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}})$, le produit étant étendu à tous les $\mathfrak{p}$, V est un homomorphisme continu de J dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+$ des réels positifs. On peut, naturellement, plonger G dans J. On notera J^0 le noyau de V. En vertu de la formule du produit de k, G est contenu dans J^0. On pose $J^0_{\infty} = J^0 \cap J$. Alors le groupe $U = G \cap J_{\infty} = G \cap J^0_{\infty}$ est composé des $s = (s_{ij}) \in G$ tels que $s_{ij} \in \mathfrak{o} (1 \leqq i, j \leqq n)$ et que $\det s$ soit une unité de k. Donc U est le groupe des unités de G.

Soient $\mathbf{G}(M)$ le G-genre d'un réseau M de V et J le groupe des G-idèles. Soit $\sigma = (s_{\mathfrak{p}}) \in J$. On voit tout de suite que $\sigma M = \bigcap_{\mathfrak{p}} (V \cap s_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}})$ est contenu dans $\mathbf{G}(M)$.

Réciproquement, soit donné un $M' \in \mathbf{G}(M)$ tel que $M'_{\mathfrak{p}} = s_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$ pour tous

---

(7) WEIL [11], paragraphe 1.

les $\mathfrak{p}$. Alors il est clair que $\sigma = (s_\mathfrak{p})$ est dans J et $M' = \sigma M$. Ceci montre que $\mathbf{G}(M)$ est un espace de transformations pour J et ce dernier opère transitivement sur $\mathbf{G}(M)$. Soient M', $M'' \in \mathbf{G}(M)$ tels que $M' = \sigma M$, $M'' = \tau M$. On a $\mathbf{C}(M') = \mathbf{C}(M'')$ si et seulement si $\tau(M) = s\sigma(M)$, $s \in \mathbf{G}$, et ceci signifie que $\tau \in G\sigma J_M$, où J_M est le groupe de tous les $\sigma \in J$ tels que $\sigma M = M$, ce qui démontre le théorème suivant :

Théorème 1.1. — *Soient G un groupe algébrique d'automorphismes d'un espace vectoriel V sur un corps de nombres algébriques k, et J le groupe des G-idèles. Soient M un réseau de V, $\mathbf{G}(M)$ le G-genre de M, et J_M le groupe des $\sigma \in J$ tels que $\sigma M = M$. Alors le nombre (fini ou infini) des G-classes dans le G-genre $\mathbf{G}(M)$ est égal à celui des classes de la décomposition de J suivant deux modules J_M, G.*

Nous dirons qu'un sous-groupe algébrique G de $GL(n, k)$ est du type (F) si le nombre des G-classes dans tout G-genre est fini. On a alors :

Théorème 1.2. — *Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n, k)$. Alors G est du type* (F) *si et seulement si le nombre des classes de J suivant J_∞, G, est fini.*

En effet, si l'on pose $U'_\mathfrak{p} = \{ s_\mathfrak{p} \in G_\mathfrak{p} ;\ s_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \}$, on a $J_M = \prod_\mathfrak{p} U'_\mathfrak{p}$ et $U'_\mathfrak{p} = U_\mathfrak{p}$ sauf pour des diviseurs premiers finis en nombre fini. Il suffit de montrer que $U_\mathfrak{p} \cap U'_\mathfrak{p}$ est d'indice fini dans $U_\mathfrak{p}$ et dans $U'_\mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p}$ fini. Cela résulte du fait que $U_\mathfrak{p}$, $U'_\mathfrak{p}$ sont compacts et ouverts.

Corollaire 1.3. — *Soient G, G' deux groupes algébriques qui sont conjugués dans $GL(n, k)$. Pour que G' soit du type* (F), *il faut et il suffit que G soit du type* (F).

Corollaire 1.4. — *Soit G un groupe algébrique commutatif. Alors G est du type* (F) *si et si seulement si le groupe J/GJ_∞ est fini.*

Nous nous proposons de démontrer dans ce qui suit le théorème suivant :

Théorème principal. — *Soit G un groupe algébrique commutatif d'automorphismes d'un espace vectoriel sur un corps de nombres algébriques. Alors G est du type* (F).

Paragraphe 2. — Préliminaires sur le groupe J.

Nous allons démontrer maintenant quelques propriétés élémentaires du groupe J des G-idèles.

Proposition 2.1. — *Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n, k)$. Alors G est un sous-groupe discret de J.*

En effet, on a $U = J_\infty \cap G$, et U est discret dans $G_\mathfrak{p}$ pour tous les diviseurs premiers infinis de k.

Proposition 2.2. — *On a* $J = J_\infty . J^0$.

Pour démontrer cette proposition, il nous faut le lemme suivant :

Lemme 2.3. — *Soit K le corps des réels ou des complexes. On note $|a|$ la valeur absolue de $a \in K$. Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n, k)$. Soit λ l'application $s \to |\det s|$ de G dans $\mathbf{R}^+$. Si $\lambda(G) \neq \{1\}$, λ est une application de G sur $\mathbf{R}^+ : \lambda(G) = \mathbf{R}^+$.*

En effet, soit G_0 la composante algébrique de l'élément neutre de G. Puisque G_0 est d'indice fini dans G et que tout élément $\neq 1$ de $\mathbf{R}^+$ est d'ordre infini, on a $\lambda(G_0) \neq \{1\}$. On peut donc se borner à considérer le cas où G est irréductible. Supposons que K soit le corps des complexes. Alors on sait que G est connexe au sens de la topologie naturelle de $GL(n, K)$, d'où notre assertion. Supposons maintenant que K soit le corps des réels : $K = \mathbf{R}$. L'application $\rho : s \to \det s$ de G dans $\mathbf{R}^*$ est évidemment une représentation rationnelle unidimensionnelle de G. Puisque $\rho(G)$ est un groupe infini par hypothèse, le plus petit groupe algébrique contenant $\rho(G)$ est $\mathbf{R}^*$. Il en résulte que la différentielle $d\rho$ de la représentation ρ applique l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sur $\mathbf{R}$ qui est l'algèbre de Lie de $\mathbf{R}^*$ [8]. Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $d\rho(X) = 1$. Du fait que

$$\exp tX \in G, \ \rho(\exp tX) = \exp(t\, d\rho(X)) = \exp t$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$, il résulte que $\rho(G) \supset \mathbf{R}^+$, C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 2.2. — On a défini plus haut (§ 1) l'application $V_\mathfrak{p} : s_\mathfrak{p} \to w_\mathfrak{p}(\det s_\mathfrak{p})$ de $G_\mathfrak{p}$ dans $\mathbf{R}^+$. Si $\mathfrak{p}$ est infini réel, on a $w_\mathfrak{p}(a) = |a|$, $a \in k_\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}$ est infini complexe $w_\mathfrak{p}(a) = |a|^2$, $a \in k_\mathfrak{p}$. Supposons que $V_\mathfrak{p}(G_\mathfrak{p}) = \{1\}$ pour tous les diviseurs premiers infinis de k. On a donc $w_\mathfrak{p}(\det s) = 1$, $s \in G$ pour tout $\mathfrak{p}$ infini. En vertu du théorème de Kronecker, $\det(G)$ est contenu dans le groupe des racines de l'unité de k, qui est d'ordre fini. Il en résulte que $\det(G_\mathfrak{p})$ est d'ordre fini pour tout diviseur premier de k, d'où $J = J^0$. Supposons maintenant qu'il y ait un diviseur premier infini $\mathfrak{q}$ de k tel que $V_\mathfrak{q}(G_\mathfrak{q}) \neq \{1\}$. Alors il résulte du lemme 2.3 que $V_\mathfrak{q}(G_\mathfrak{q}) = \mathbf{R}^+$. On peut donc trouver $s''_\mathfrak{q} \in G_\mathfrak{q}$ tel que

$$V_\mathfrak{q}(s''_\mathfrak{q}) = \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}} V_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p})^{-1}$$

([8]) Chevalley [3], chapitre II, paragraphe 9, proposition 5.

pour un G-idèle $\sigma = (s_{\mathfrak{p}}) \in J$. Si l'on détermine $s'_{\mathfrak{q}} \in G_{\mathfrak{q}}$ par $s_{\mathfrak{q}} = s'_{\mathfrak{q}} s''_{\mathfrak{q}}$, on a

$$\sigma = (s_{\mathfrak{q}}, \ldots, s_{\mathfrak{p}}, \ldots) = (s'_{\mathfrak{q}}, \ldots, 1, \ldots)(s''_{\mathfrak{q}}, \ldots, s_{\mathfrak{p}}, \ldots) \in J_{\infty}.J^{0},$$

C. Q. F. D.

Proposition 2.4. — *Soit G un groupe algébrique commutatif. Alors le groupe GJ_{∞} est un sous-groupe fermé de J.*

Cela résulte immédiatement de ce que J_{∞} est ouvert dans J, ce qui entraîne que tout sous-groupe de J contenant J_{∞} est à la fois ouvert et fermé.

Proposition 2.5. — *Soit G un groupe algébrique commutatif. Alors on a l'isomorphisme comme groupe topologique $J/GJ_{\infty} \cong J^{0}/GJ^{0}_{\infty}$.*

Cela résulte immédiatement des propositions 2.2 et 2.4.

Paragraphe 3. — Groupes diagonaux.

On note $D(n)$ le sous-groupe des matrices diagonales de $GL(n, k)$. Un sous-groupe de $D(n)$ est dit diagonal. Un groupe diagonal est naturellement commutatif. On désignera par J_k le groupe des idèles de k. On notera $\mathfrak{u}$ le groupe des unités de k et $\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$ le groupe des unités de $k_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}$ fini. Soit

$$J_{k,\infty} = \prod_{\mathfrak{p}\,:\,\text{infini}} k^{*}_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p}\,:\,\text{fini}} \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}.$$

On sait que le groupe $J_k/k^{*}J_{k,\infty}$ est isomorphe au groupe des classes d'idéaux de k et que ce dernier groupe est d'ordre fini. Soit $\mathbf{Z}^{n}$ le produit de n groupes isomorphes au groupe additif des entiers. Soit G un sous-groupe algébrique diagonal de $GL(n, k)$. Alors on sait qu'il existe un sous-groupe Λ de $\mathbf{Z}^{n}$ tel que $x = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$ est contenu dans G si et seulement si

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{e_i} = 1 \qquad \text{pour tout } e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda \quad (^9).$$

Théorème 3.1. — *Soient k un corps de nombres algébriques, G un sous-groupe algébrique diagonal dans $GL(n, k)$. Alors G est du type (F).*

Démonstration. — Nous montrerons d'abord que tout élément du groupe J/GJ_{∞} est d'ordre fini. Soit h le nombre des classes d'idéaux de k. Nous

(9) Chevalley [3], chapitre II, paragraphe 13, proposition 3; Borel [2], paragraphe 7, proposition 7.2, remarque.

montrerons que $\sigma^h \in GJ_\infty$ pour tout $\sigma \in J$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de k. Alors, par définition du nombre h, il existe $\alpha_\mathfrak{p} \in k$ tel que $\mathfrak{p}^h = (\alpha_\mathfrak{p})$. Soit

$$\sigma = (s_\mathfrak{p}), \qquad s_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} s_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{n,\mathfrak{p}} \end{pmatrix}, \qquad s_{i,\mathfrak{p}} \in k_\mathfrak{p} \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

On peut écrire $s_{i,\mathfrak{p}}^h = \alpha_\mathfrak{p}^{\nu_{i,\mathfrak{p}}} u_{i,\mathfrak{p}}$, avec $u_{i,\mathfrak{p}} \in \mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ pour tout $\mathfrak{p}$ fini. Soit Λ le sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ déterminé par le groupe G comme plus haut. Puisque $s_\mathfrak{p}^h \in G_\mathfrak{p}$, on a

$$\prod_i s_{i,\mathfrak{p}}^{he_i} = \prod_i \alpha_\mathfrak{p}^{\nu_{i,\mathfrak{p}} e_i} \prod u_{i,\mathfrak{p}}^{e_i} = 1$$

pour tout $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$, d'où $\alpha_\mathfrak{p}^{\sum_i \nu_{i,\mathfrak{p}} e_i} \in \mathfrak{u}_\mathfrak{p}$. Il en résulte que $\sum_i \nu_{i,\mathfrak{p}} e_i = 0$, d'où $\prod_i \alpha_\mathfrak{p}^{\nu_{i,\mathfrak{p}} e_i} = 1$, ce qui montre $\prod_i \alpha_\mathfrak{p}^{\nu_{i,\mathfrak{p}} e_i} = 1$ et $\prod_i u_{i,\mathfrak{p}}^{e_i} = 1$, pour tout $e \in \Lambda$. On voit donc que

$$x_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} \alpha_\mathfrak{p}^{\nu_{1,\mathfrak{p}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_\mathfrak{p}^{\nu_{n,\mathfrak{p}}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & u_{n,\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$$

sont contenus dans G. Posons $x = \prod_{\mathfrak{p}\,:\,\text{fini}} x_\mathfrak{p} \in G$. Si $\mathfrak{q}$ est un diviseur premier fini, la $\mathfrak{q}$-composante du G-idèle $\sigma^h x^{-1}$ est

$$\begin{pmatrix} u_{1,\mathfrak{q}} & & \\ & \ddots & \\ & & u_{n,\mathfrak{q}} \end{pmatrix} \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}} \begin{pmatrix} \alpha_\mathfrak{p}^{-\nu_{1,\mathfrak{p}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_\mathfrak{p}^{-\nu_{n,\mathfrak{p}}} \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on a $\alpha_\mathfrak{p} \in \mathfrak{u}_\mathfrak{q}$ $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q})$, il s'ensuit que $\sigma^h \in GJ_\infty$. Ensuite, nous montrerons que le groupe J/GJ_∞ possède un ensemble fini de générateurs. Soit $\sigma = (s_\mathfrak{p})$,

$$s_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} s_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{n,\mathfrak{p}} \end{pmatrix},$$ un G-idèle. Alors on voit tout de suite que $\sigma_i = (s_{i,\mathfrak{p}})$ est un élément de J_k $(1 \leqq i \leqq n)$. L'application $\varphi : \sigma \to (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est évidemment un homomorphisme de J dans $J_k \times \ldots \times J_k$. On a alors $\varphi(G) \subset k^* \times \ldots \times k^*$, $\varphi(J_\infty) \subset J_{k,\infty} \times \ldots \times J_{k,\infty}$. Cet homomorphisme φ

induit un homomorphisme $\hat{\varphi}$ de J/GJ_∞ dans $J_k/k^* J_{k,\infty} \times \ldots \times J_k/k^* J_{k,\infty}$. Puisque ce dernier groupe est d'ordre fini, il suffit de montrer que le noyau de $\hat{\varphi}$ possède un ensemble fini de générateurs. Soit Λ le sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ déterminé par G. Soit $\hat{G}_e$ le groupe de tous les $x = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in k$, tels que $\prod_i x_i^{e_i} \in \mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}$ étant le groupe d'unités de k. Posons $\hat{G} = \bigcap_{e \in \Lambda} \hat{G}_e$. On a alors $G \in \hat{G}$. Soient $e^{(1)}, \ldots, e^{(l)}$ des générateurs de Λ. On a alors $\hat{G} = \bigcap_{j=1}^{l} \hat{G}_{e^{(j)}}$. Soit ψ l'application $\begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \to \left(\prod_i x_i^{e_i^{(1)}}, \ldots, \prod_i x_i^{e_i^{(l)}} \right)$ de $\hat{G}$ dans $\mathfrak{u} \times \ldots \times \mathfrak{u}$. Alors il est clair que G est le noyau de ψ. On voit donc que $\hat{G}/G$ possède un ensemble fini de générateurs d'après le théorème bien connu de Dirichlet. Soit maintenant $\hat{J}_{\infty, e}$, le groupe de tous les D(n)-idèles $\tau = \left(\begin{pmatrix} t_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & t_{n,\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \right)$ tels que $\tau_i = (t_{i,\mathfrak{p}}) \in J_{k,\infty}$, et que $\prod_i t_{i,\mathfrak{p}}^{e_i}$ soient des unités de k ne dépendant que de τ et pas de $\mathfrak{p}$. Posons $\hat{J}_\infty = \bigcap_{e \in \Lambda} \hat{J}_{\infty, e}$.

Alors, on voit comme plus haut que $\hat{J}_\infty/J_\infty$ possède un ensemble fini de générateurs. Il en résulte que $\hat{G}\hat{J}_\infty/GJ_\infty$ possède aussi un ensemble fini de générateurs. Prenons maintenant $\sigma = (s_\mathfrak{p}) \in J$ tel que $\sigma \bmod GJ_\infty$ soit contenu dans le noyau de $\hat{\varphi}$. Alors on a

$$\sigma_i = (s_{i,\mathfrak{p}}) \in k^* J_{k,\infty} \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

d'où

$$\sigma_i = x_i \tau_i, \qquad x_i \in k^*, \qquad \tau_i = (t_{i,\mathfrak{p}}) \in J_{k,\infty}.$$

Puisque $\prod_i s_{i,\mathfrak{p}}^{e_i} = 1$ pour tout $e \in \Lambda$, on a $\prod_i x_i^{e_i} t_{i,\mathfrak{p}}^{e_i} = 1$ pour tout $\mathfrak{p}$. Il en résulte que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \in \hat{G} \qquad \text{et} \qquad \tau = \left(\begin{pmatrix} t_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & t_{n,\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \right) \in \hat{J}_\infty,$$

d'où $\sigma \in \hat{G}\hat{J}_\infty$, ce qui montre que le noyau de $\hat{\varphi}$ est contenu dans $\hat{G}\hat{J}_\infty/GJ_\infty$ qui possède un ensemble fini de générateurs. On voit donc que J/GJ_∞ est d'ordre fini. Le théorème est donc démontré d'après le corollaire 1.4.

PARAGRAPHE 4. — Sous-groupes multiplicatifs du corps.

Soit K un sur-corps de degré fini de k; K possède donc une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur k; nous désignerons cet espace vectoriel par V. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de V. A tout élément $a \neq 0$ de K nous associerons l'automorphisme $\mu(a) \in GL(n, k)$ défini par $\mu(a)(a') = aa'$ pour tout $a' \in K$. Il est clair que le groupe $G_K = \mu(K^*)$ est un groupe algébrique commutatif. De plus, ce groupe est un k-tore au sens de A. BOREL [10]. On notera J_{G_K} le groupe des G_K-idèles.

Soit $\mathfrak{p}$ un diviseur premier de k et soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_g^{e_g}$ la décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K. Soit $K_\mathfrak{p}$ l'algèbre déduite de K par extension à $k_\mathfrak{p}$ du corps de base. Alors on sait qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\iota_\mathfrak{p} : \quad K_{\mathfrak{P}_1} + \ldots + K_{\mathfrak{P}_g} \cong K_\mathfrak{p} \quad ({}^{10}).$$

Soit

$$\mu_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p} \to M(n, k_\mathfrak{p})$$

l'application $k_\mathfrak{p}$-linéaire déduite de $\mu : K \to M(n, k)$ [12]. Si l'on note $K_\mathfrak{p}^*$ le groupe multiplicatif de l'algèbre $K_\mathfrak{p}$, on voit que $\mu_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p}^*) = (G_K)_\mathfrak{p}$. On voit immédiatement que si $a_{\mathfrak{P}_i}$ sont des unités dans $K_{\mathfrak{P}_i}$ $(1 \leq i \leq g)$, on a $\mu_\mathfrak{p}(\iota_\mathfrak{p}(\ldots, a_{\mathfrak{P}_i}, \ldots)) \in (U_K)_\mathfrak{p}$ pour presque tous les $\mathfrak{p}$, où $(U_K)_\mathfrak{p}$ est le groupe des unités $(G_K)_\mathfrak{p}$.

Soit J_K le groupe des idèles de K. Alors à tout

$$\mathfrak{a} = (\ldots, a_{\mathfrak{P}_1}, \ldots, a_{\mathfrak{P}_g}, \ldots) \in J_K$$

on peut associer le G_K-idèle

$$M(\mathfrak{a}) = (\ldots, \mu_\mathfrak{p}(\iota_\mathfrak{p}(a_{\mathfrak{P}_1}, \ldots, a_{\mathfrak{P}_g})), \ldots) \in J_{G_K}.$$

On voit tout de suite que l'application M est un isomorphisme (de groupes topologiques) entre J_K et J_{G_K}. Il est clair qu'on a $M(K^*) = \mu(K^*) = G_K$. De plus, si $\mathfrak{a} = (a_\mathfrak{P}) \in J_K^0$, on a

$$\begin{aligned} V(M(\mathfrak{a})) &= \prod_\mathfrak{p} w_\mathfrak{p}(\det(\mu_\mathfrak{p}(\iota_\mathfrak{p}(a_{\mathfrak{P}_1}, \ldots, a_{\mathfrak{P}_g})))) \\ &= \prod_\mathfrak{p} w_\mathfrak{p}(N_{K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}} \iota_\mathfrak{p}(a_{\mathfrak{P}_1}, \ldots, a_{\mathfrak{P}_g})) \\ &= \prod_\mathfrak{p} \prod_{i=1}^{g} (N_{K_{\mathfrak{P}_i}/k_\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{P}_i}) = \prod_\mathfrak{P} w_\mathfrak{P}(a_\mathfrak{P}) = 1, \end{aligned}$$

---

[10] BOREL [2], chapitre II, paragraphe 7; ONO [8].

[11] DEURING [5], chapitre VI, paragraphe 11.

[12] $M(n, k)$ est l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans k.

ce qui montre que M induit un isomorphisme entre J_K^0 et $J_{G_K}^0$. Puisque J_K^0/K^* est compact ([13]), $J_{G_K}^0/G_K$ est aussi compact.

Suivant Chevalley, nous dirons qu'un sous-groupe G^* de K^* est algébrique si son image $G = \mu(G^*)$ dans $GL(n, k)$ est un groupe algébrique ([14]). On note J le groupe des G-idèles.

Proposition 4.1. — *JG_K est un sous-groupe fermé de J_{G_K}.*

Soit, en effet, L une extension galoisienne de degré fini de k contenant K, et soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les isomorphismes distincts de K dans L. Alors on sait qu'il existe un sous-groupe Λ du $\mathbf{Z}^n$ tel que le groupe algébrique G^* se compose de tous les éléments a de K^* dont les conjugués satisfont aux conditions $\prod_{i=1}^{n} (\sigma_i a)^{e_i} = 1$ pour tout $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda$ ([14]). A tout

$$e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Lambda,$$

l'application $\psi_e : a \to \prod_{i=1}^{n} (\sigma_i a)^{e_i}$ de K dans L est une application rationnelle de l'espace vectoriel K dans l'espace L. Soit $\psi_{e,\mathfrak{p}}$ l'application rationnelle de $K_\mathfrak{p}$ dans $L_\mathfrak{p}$ déduite de ψ_e par extension à $k_\mathfrak{p}$ du corps de base. Il en résulte tout de suite que $\psi_{e,\mathfrak{p}}$ induit un homomorphisme de $K_\mathfrak{p}^*$ dans $L_\mathfrak{p}^*$. En vertu des isomorphismes canoniques $K_{\mathfrak{P}_1} + \ldots + K_{\mathfrak{P}_g} \cong K_\mathfrak{p}$, $L_{\mathbf{P}_1} + \ldots + L_{\mathbf{P}_h} \cong L_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_g^{e_g}$, $\mathfrak{p} = \mathbf{P}_1^{E_1} \ldots \mathbf{P}_h^{E_h}$, on peut déterminer au moyen des $\psi_{e,\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}$ un homomorphisme continu $\tilde{\psi}_e : J_K \to J_L$. Il est clair que $\tilde{\psi}_e$ coïncide avec ψ_e sur K^*. Soit M l'isomorphime $J_K \cong J_{G_K}$ défini comme plus haut. Soit Φ_e le noyau de l'application de J_{G_K} dans $J_L/\psi_e(K^*)$ défini par le diagramme suivant :

$$J_{G_K} \xrightarrow{M^{-1}} J_K \xrightarrow{\tilde{\psi}_e} J_L \xrightarrow{\text{l'homomorphisme canonique}} J_L/\psi_e(K^*).$$

Alors on voit tout de suite que $JG_K = \bigcap_{e \in \Lambda} \Phi_e$, C. Q. F. D.

Théorème 4.2. — *Soient k un corps de nombres algébriques, K un surcorps de degré n de k. Soit G^* un sous-groupe algébrique du groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K et soit $\mu(G^*) = G \subset GL(n, k)$. Soit de plus J le groupe des G-idèles. Alors le groupe J^0/G est compact.*

En effet, il est clair que l'injection $J \to J_{G_K}$ induit des injections $G \to G_K$ et $J^0 \to J_{G_K}^0$. On a alors un homomorphisme continu $\varphi : J^0/G \to J_{G_K}^0/G_K$, où ce

([13]) Iwasawa [7], paragraphe 4.

([14]) Chevalley [3], chapitre II, paragraphe 13.

dernier groupe est compact. D'après la proposition 4.1, $J^0 G_K$ est un sous-groupe fermé de $J^0_{G_K}$, donc $J^0 G_K/G_K$ est compact, ce qui montre que φ est une application ouverte de J^0/G sur $J^0 G_K/G_K$ [15]. Pour montrer que J^0/G, est compact, il suffit donc de faire voir que φ est un monomorphisme. Soit $\sigma = (s_\mathfrak{p}) \in J^0 \cap G_K$. On a alors $s_\mathfrak{p} \in G_\mathfrak{p} \cap GL(n, k) = G$ pour tout $\mathfrak{p}$, d'où $J^0 \cap G_K = G$, ce qui démontre notre assertion.

THÉORÈME 4.3. — *Soient k un corps de nombres algébriques, G un groupe algébrique commutatif d'automorphismes d'un espace vectoriel V sur k. Supposons que la représentation identique de G dans $GL(n, k)$ soit simple. Alors le groupe J^0/G est compact.*

En effet, puisque la représentation identique de G est simple, l'algèbre enveloppante K de G est une algèbre associative commutative simple, c'est-à-dire un sur-corps de degré fini de k [16]. Il en résulte que G est un sous-groupe algébrique du groupe multiplicatif K^*. Puisque l'application identique $K \to K$ est équivalente à la représentation régulière μ définie plus haut, notre théorème est réduit au théorème 4.2.

Du fait que J^0/G est compact (théorème 4.3) et que J^0_∞ est ouvert dans J^0, résulte le théorème suivant d'après le corollaire 1.4 et la proposition 2.5 :

THÉORÈME 4.4. — *Soient k un corps de nombres algébriques, G un sous-groupe algébrique commutatif de $GL(n, k)$. Supposons que la représentation identique de G dans $GL(n, k)$ soit simple. Alors le groupe G est du type (F).*

PARAGRAPHE 5. — Groupes formés de matrices semi-simples.

Soit k un corps de nombres algébriques, K une extension galoisienne de k de degré fini; on désignera par $\mathfrak{G}$ le groupe de Galois de K sur k. Soient G un sous-groupe algébrique de $GL(n, k)$, G^K le groupe déduit de G par extension à K du corps de base. Soit $x = (x_{ij}) \in G^K$, $x_{ij} \in K$. Posons $x^\sigma = (x_{ij}^\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}$. On a alors $x^\sigma \in G^K$, car le groupe G^K est défini par un système d'équations à coefficients dans k. On voit tout de suite que G est l'ensemble des éléments de G^K invariants par tout $\sigma \in \mathfrak{G}$. Supposons maintenant que G soit commutatif. Alors, il est clair que l'élément $\prod_{\sigma \in \mathfrak{G}} x^\sigma$ est dans G pour tout $x \in G^K$; on désignera cet élément par $N(x)$. Il est clair que l'application $x \to N(x)$ est un homomorphisme de G^K dans G. Nous allons

[15] PONTRJAGIN [9], chapitre III, paragraphe 19, théorème 13.
[16] VAN DER WAERDEN [10], chapitre XVII, paragraphe 136.

définir un homomorphisme $\tilde{N}$ du groupe des G^K-idèles J^K dans le groupe des G-idèles J comme suit. Soit $\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g)^e$ dans K. Posons $G_\mathfrak{p} = G^{k_\mathfrak{p}}$, $G_\mathfrak{P} = G^{K_\mathfrak{P}} = (G^K)^{K_\mathfrak{P}}$. Puisque $K_\mathfrak{P}$ est aussi une extension galoisienne de $k_\mathfrak{p}$, on peut définir l'application $N_\mathfrak{P} : G_\mathfrak{P} \to G_\mathfrak{p}$ comme plus haut. Si $x \in G^K$, on a $N(x) = \prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} N_\mathfrak{P}(x)$ (17). Soit $\xi = (x_\mathfrak{P}) \in J^K$. Posons $x_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} N_\mathfrak{P}(x_\mathfrak{P}) \in G_\mathfrak{p}$. De la relation

$$
\begin{aligned}
w_\mathfrak{P}(\det x_\mathfrak{P}) = w_\mathfrak{p}(N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(\det x_\mathfrak{P})) &= w_\mathfrak{p}\left(\prod_\sigma (\det x_\mathfrak{P})^\sigma\right) \\
&= w_\mathfrak{p}\left(\prod_\sigma \det x_\mathfrak{P}^\sigma\right) = w_\mathfrak{p}(\det(N_\mathfrak{P}(x_\mathfrak{P}))),
\end{aligned}
$$

on voit tout de suite que $\xi' = (x_\mathfrak{p})$ est contenu dans J. De plus, si $\xi \in J^K_\infty$, on a $\xi' \in J_\infty$. On désignera par $\tilde{N}$ l'application $\xi \to \xi'$ de J^K dans J. On voit immédiatement que $\tilde{N}$ induit N sur G^K.

Proposition 5.1. — $J^n \subset \tilde{N}(J^K)$.

Soit $\xi = (x_\mathfrak{p}) \in J$. Posons $x_\mathfrak{P} = x_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$. Alors $\tilde{\xi} = (x_\mathfrak{P}) \in J^K$. On a alors

$$
\tilde{N}(\tilde{\xi}) = \left(\prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} N_\mathfrak{P}(x_\mathfrak{p})\right) = \left(\prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} x_\mathfrak{p}^{[K_\mathfrak{P} : k_\mathfrak{p}]}\right) = \left(x_\mathfrak{p}^{\sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} [K_\mathfrak{P} : k_\mathfrak{p}]}\right) = (x_\mathfrak{p}^n) = \xi_n,
$$

ce qui démontre notre assertion.

Corollaire 5.2. — *Tout élément de $J/\tilde{N}(J^K)$ est d'ordre fini.*

Théorème 5.3. — *Soient k un corps de nombres algébriques, G un sous-groupe algébrique commutatif de $GL(n, k)$. Supposons que la représentation identique de G dans $GL(n, k)$ soit semi-simple. Alors le groupe G est du type* (F).

Démonstration. — Par hypothèse sur G, on voit que G est formé de matrices semi-simples (18). Alors il existe une extension galoisienne K de degré fini de k telle que le groupe G^K soit équivalent, par un automorphisme intérieur de $GL(n, K)$, à un groupe diagonal. On voit alors que G^K est du type (F) d'après le corollaire 1.3 et le théorème 3.1. On a vu que l'appli-

---

(17) $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ signifie que $\mathfrak{P}$ est un diviseur premier de K sur $\mathfrak{p}$.

(18) Chevalley [3], chapitre I, paragraphe 8, proposition 2, corollaire

cation $\tilde{N} : J^K \to J$ induit des homomorphismes $J^K_\infty \to J_\infty$, $G^K \xrightarrow{N} G$, d'où elle induit l'homomorphisme ν de $J^K/G^K J^K_\infty$ dans J/GJ_∞. Puisque $J^K/G^K J^K_\infty$ est d'ordre fini, il suffit de montrer que l'image $\nu(J^K/G^K J^K_\infty)$ est d'indice fini dans J/GJ_∞, c'est-à-dire que $J/\tilde{N}(J^K)\, GJ_\infty$ est d'ordre fini. Cependant on voit d'après le corollaire 5.2 que tout élément de $J/\tilde{N}(J^K)GJ_\infty$ est d'ordre fini. Il reste alors à démontrer que ce groupe possède un ensemble fini de générateurs. Dans la suite nous montrerons plus précisément que le groupe J/GJ_∞ possède un ensemble fini de générateurs. Soit $V = V_1 + \ldots + V_r$ la décomposition de V comme somme directe des sous-espaces $V_i (1 \leqq i \leqq r)$ intervertis simples par rapport à G. Soit G'_i la restriction de G à V_i pour chaque i. Par G_i on désignera le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de V_i contenant G'_i. Il est clair que la représentation identique de G_i dans $GL(V_i)$ est simple. Il s'ensuit alors que l'algèbre enveloppante K_i de G_i est un surcorps de degré fini de k. Posons $A = K_1 + \ldots + K_r$ (somme directe des algèbres sur k). Comme plus haut (§ 4), on peut associer à tout $a \in A$ l'application $\mu(a) : a' \to aa'$, $a' \in A$ de A dans l'espace $\mathfrak{E}(A)$ des endomorphismes de l'espace vectoriel A sur k. Soit G^* l'ensemble de tous les $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, tels que tous les x_i soient des restrictions à V_i des $x \in G$. Puisque l'application identique $K_i \to K_i$ est équivalente à la représentation régulière de K_i, on voit tout de suite qu'il existe une base de A telle que $G = \mu(G^*)$ au moyen de cette base c'est-à-dire que, plus exactement, si l'on représente les éléments de $\mu(G^*)$ par des matrices au moyen de cette base, on obtient le même ensemble de matrices que G, ceci montre qu'il suffit, sans perte de généralité, de considérer le cas suivant. Rejetant ici les notations précédentes (en ne retenant que celle de k, qui désigne un corps de nombres algébriques), soient $K_1, \ldots, K_r$, r sur-corps quelconques de k de degrés finis, et A la somme directe des K_i : $A = K_1 + \ldots + K_r$. Pour tout $z \in A$, posons

$$\mu(z)(z') = zz', \qquad z' \in A.$$

Soit G^* un sous-groupe du groupe multiplicatif de A. Supposons que $G = \mu(G^*)$ soit un sous-groupe algébrique de $GL(A) = GL(n, k)$, où n est la dimension de l'espace vectoriel A sur k. Il est clair que le groupe G satisfait à la condition de notre théorème. Soit $\bar{k}$ la fermeture algébrique de k. Soient $\sigma_j^{(i)} (1 \leqq j \leqq n_i)$ les isomorphismes distincts de K_i dans $\bar{k}$. Soit M une extension galoisienne de degré fini de k contenant tous les corps $\sigma_j^{(i)}(K_i)$ $(1 \leqq j \leqq n_i,\ 1 \leqq i \leqq r)$. Chacune des applications $\sigma_j^{(i)}$ est une application linéaire de K_i dans la structure d'espace vectoriel de M sur k et se prolonge par linéarité en une fonction linéaire (que nous désignerons encore par $\sigma_j^{(i)}$) sur l'espace vectoriel K_i^M déduit de K_i par extension à M du corps de base. Soit $\mu^{(i)}(z_i)$ l'application $K_i \to K_i$ définie par

$$\mu^{(i)}(z_i)(z'_i) = z_i z'_i, \qquad z_i,\ z'_i \in K_i, \qquad (1 \leqq i \leqq r).$$

Si nous désignons encore par $\mu^{(i)}(z_i)$ l'application $K_i^M \to K_i^M$ déduite de $\mu^{(i)}(z_i)$ par linéarité, il en résulte qu'il existe une base $\{x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\}$ de K_i^M telle qu'on ait

$$\mu^{(i)}(z_i)(x_j^{(i)}) = \sigma_j^{(i)}(z_i)\,x_j^{(i)} \qquad \text{pour tout } z_i \in K_i.$$

Il s'ensuit qu'il existe un sous-groupe Λ de $\mathbf{Z}^n$, $n = n_1 + \ldots + n_r$, tel que G^* se compose de tous les éléments $z = (z_1, \ldots, z_r) \in A$ dont les conjugués satisfont aux conditions $\prod_{i,j} \sigma_j^{(i)}(z_i)^{e_j^{(i)}} = 1$ pour tout $e = (\ldots, e_j^{(i)}, \ldots) \in \Lambda$ [19].

Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un diviseur premier de k. On a $A_\mathfrak{p} = K_{1,\mathfrak{p}} + \ldots + K_{r,\mathfrak{p}}$, où $A_\mathfrak{p}$, $K_{i,\mathfrak{p}}$ sont les algèbres déduites des A, K_i par extension à $k_\mathfrak{p}$ du corps de base. On peut alors définir $\mu_\mathfrak{p}$, $\mu_\mathfrak{p}^{(i)}$ comme plus haut. De plus soient $\sigma_{j,\mathfrak{p}}^{(i)}$ les applications $K_{i,\mathfrak{p}} \to M_\mathfrak{p}$ déduites des $\sigma_j^{(i)}$ par linéarité. Alors on a $G_\mathfrak{p} = \mu_\mathfrak{p}(G_\mathfrak{p}^*)$, où $G_\mathfrak{p}^*$ se compose de tous les éléments $z = (z_1, \ldots, z_r) \in A_\mathfrak{p}$ tels que

$$\prod_{i,j} \sigma_{j,\mathfrak{p}}^{(i)}(z_i)^{e_j^{(i)}} = 1 \qquad \text{pour tout } e = (\ldots, e_j^{(i)}, \ldots) \in \Lambda,$$

Soit $X = \mu(x) \in G$, $x = (x_1, \ldots, x_r) \in A$. Prenant une base de A composée des bases des K_i on peut écrire

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_r \end{pmatrix}, \qquad \text{où } X_i = \mu^{(i)}(x_i) \in GL(K_i).$$

De plus soit

$$X_\mathfrak{p} = \mu_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) \in G_\mathfrak{p}, \qquad x_\mathfrak{p} = (x_{1,\mathfrak{p}}, \ldots, x_{r,\mathfrak{p}}) \in A_\mathfrak{p},$$

alors on a

$$X_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} X_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{r,\mathfrak{p}} \end{pmatrix}, \qquad \text{où } X_{i,\mathfrak{p}} = \mu_\mathfrak{p}^{(i)}(x_{i,\mathfrak{p}}).$$

Pour chaque i, soit G_i le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(K_i)$ contenant les restrictions X_i à K_i de tous $X \in G$. Alors on a un homomorphisme φ de J dans $J_1 \times \ldots \times J_r$ par $(X_\mathfrak{p}) \to (X_{1,\mathfrak{p}}) \times \ldots \times (X_{r,\mathfrak{p}})$, où J, J_i sont les groupes des G-idèles et G_i-idèles. Il est clair que φ induit l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de J/GJ_∞ dans $J_1/G_1J_{1,\infty} \times \ldots \times J_r/G_rJ_{r,\infty}$, ce dernier groupe étant d'ordre fini d'après le theorème 4.3. Alors il suffit de montrer que le noyau de cet homomorphisme $\tilde{\varphi}$ possède un ensemble fini de générateurs. Soit alors $\mathfrak{X} = (X_\mathfrak{p}) \in J$ tel que la classe de $\mathfrak{X}$ modulo GJ_∞ soit contenue dans le noyau de $\tilde{\varphi}$. On a

$$X_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} X_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{r,\mathfrak{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & Y_{r,\mathfrak{p}} \end{pmatrix},$$

[19] CHEVALLEY [3], chapitre II, paragraphe 13.

où les $Y_{i,\mathfrak{p}}$ sont contenus dans les groupes $U_{\mathfrak{p}}^{(i)}$ des unités des $G_{i,\mathfrak{p}}$ pour tous les $\mathfrak{p}$ finis. Soient $X_{\mathfrak{p}} = \mu_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})$, $x_{\mathfrak{p}} = (x_{1,\mathfrak{p}}, \ldots, x_{r,\mathfrak{p}})$, $X_i = \mu^{(i)}(x_i)$, $x_i \in K_i$, et $Y_{i,\mathfrak{p}} = \mu_{\mathfrak{p}}^{(i)}(y_{i,\mathfrak{p}})$, $y_{i,\mathfrak{p}} \in K_{i,\mathfrak{p}}$. Il en résulte aussitôt que

$$x_{\mathfrak{p}} = (x_{1,\mathfrak{p}}y_{1,\mathfrak{p}}, \ldots, x_r y_{r,\mathfrak{p}}).$$

Puisque $x_{\mathfrak{p}} \in G_{\mathfrak{p}}^{\star}$, on a

$$(\star) \qquad \prod_{i,j} \sigma_{j,\mathfrak{p}}^{(i)}(x_i y_{i,\mathfrak{p}})^{e_j^{(i)}} = \prod_{i,j} \sigma_j^{(i)}(x_i)^{e_j^{(i)}} \prod_{i,j} \sigma_{j,\mathfrak{p}}^{(i)}(y_{i,\mathfrak{p}})^{e_j^{(i)}} = 1$$

pour tous les $\mathfrak{p}$ et pour tout $e = (\ldots, e_j^{(i)}, \ldots) \in \Lambda$. Soit ρ l'application

$$(Y_{1,\mathfrak{p}}, \ldots, Y_{r,\mathfrak{p}}) \to \prod_{i,j} \sigma_{j,\mathfrak{p}}^{(i)}(y_{i,\mathfrak{p}})^{e_j^{(i)}}$$

de $U_{\mathfrak{p}}^{(1)} \times \ldots \times U_{\mathfrak{p}}^{(r)}$ dans $\mathrm{M}_{\mathfrak{p}}$. Soit $\mathfrak{P}$ un diviseur de M sur $\mathfrak{p}$ et soit π la projection canonique de $M_{\mathfrak{p}}$ sur $M_{\mathfrak{P}}$. Alors de la compacité de $U_{\mathfrak{p}}^{(i)}$, résulte que l'image $\pi \circ \rho(U_{\mathfrak{p}}^{(1)} \times \ldots \times U_{\mathfrak{p}}^{(r)})$ est contenue dans le groupe des unités de $M_{\mathfrak{P}}$. Des relations $(\star)$ pour tous les $\mathfrak{p}$ finis, résulte que $\prod_{i,j} \sigma_j^{(i)}(x_i)^{e_j^{(i)}}$ sont des unités de M pour tout $e = (\ldots, e_j^{(i)}, \ldots) \in \Lambda \subset \mathbf{Z}^n$. Soit $\hat{G}_e^{\star}$ le groupe de tous les $x = (x_1, \ldots, x_r) \in A$ tels que $\prod_{i,j} \sigma_j^{(i)}(x_i)^{e_j^{(i)}} \in$ le groupe des unités de M pour un $e = (\ldots, e_j^{(i)}, \ldots) \in \Lambda \subset \mathbf{Z}^n$. Posons $\hat{G}^{\star} = \bigcap_{e \in \Lambda} \hat{G}_e^{\star}$. On a alors $G^{\star} \subset \hat{G}^{\star}$. Soient $e_k = (\ldots, e_{j,k}^{(i)}, \ldots)$, $(1 \leqq k \leqq l)$, des générateurs de Λ. Soit ψ l'application

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \to \left(\ldots, \prod_{i,j} \sigma_j^{(i)}(x_i)^{e_{j,k}^{(i)}}, \ldots\right)$$

de $\hat{G}^{\star}$ dans le groupe-produit de l groupes isomorphes au groupe des unités de M. Il est clair que $G^{\star}$, est le noyau de ψ. On voit donc que $\hat{G}^{\star}/G^{\star}$ possède un ensemble fini de générateurs d'après le théorème de Dirichlet. Si l'on pose $\hat{G} = \mu(\hat{G}^{\star})$, on voit que $\hat{G}/G$ possède un ensemble fini de générateurs. Soit maintenant $\hat{J}_{\infty,e}$ le groupe de tous les $GL(A)$-idèles $\mathfrak{Y} = (Y_{\mathfrak{p}})$, $Y_{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} Y_{1,\mathfrak{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & Y_{r,\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$ tels que $Y_{i,\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ et $\prod_{i,j} \sigma_{j,\mathfrak{p}}^{(i)}\left(\mu_{\mathfrak{p}}^{(i)-1}(Y_{i,\mathfrak{p}})\right)^{e_j^{(i)}}$ sont unités de M ne dépendant que de $\mathfrak{Y}$ et pas de $\mathfrak{p}$. Posons $\hat{J}_\infty = \bigcap_{e \in \Lambda} \hat{J}_{\infty,e}$. Alors, on voit comme plus haut que $\hat{J}_\infty/J_\infty$ possède un ensemble fini de générateurs. Or, d'après la relation ($\bigstar$) pour tout $e \in \Lambda$, on voit tout de suite que le noyau de $\hat{\varphi}$ est contenu dans $\hat{G}\hat{J}_\infty/GJ_\infty$ qui possède un ensemble fini de générateurs On voit donc que J/GJ_∞ est d'ordre fini. Le théorème est démontré d'après le corollaire 1.4.

Paragraphe 6. — Groupes formés de matrices unipotentes.

Théorème 6.1 — *Soient k un corps de nombres algébriques, G un sous-groupe algébrique commutatif de $GL(n, k)$. Supposons que G soit formé de matrices unipotentes* [20]. *Soit r la dimension de G. Alors on a $J = J^0$ et le groupe J/G est isomorphe, comme groupe topologique, au produit de r groupes isomorphes au groupe $\tilde{k}/k$, où $\tilde{k}$ désigne le groupe additif des vecteurs-valuations de k au sens d'Artin* [21].

En effet, puisque G est commutatif, tout élément de G est simultanément transformé dans k en un élément de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & \bigstar \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, d'où $J = J^0$ [22]. De plus, il en résulte que G est un groupe algébrique irréductible [23]. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $\{X_1, \ldots, X_r\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Posons

$$\log s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{-1} (s-1)^k = \sum_{i=1}^{r} t_i(s) X_i.$$

Alors on sait que l'application $\tau : s \to (\ldots, t_i(s), \ldots)$ est une application polynome biunivoque de G sur k^r [23]. Puisque G est commutatif, on a $\log ss' = \log s + \log s'$, $s, s' \in G$. Alors τ est un isomorphisme entre G et k^r, et se prolonge en un isomorphisme $\tau_\mathfrak{p}$ de $G_\mathfrak{p}$ sur $k_\mathfrak{p}^r$. Il est clair que $\tau_\mathfrak{p}$ applique $U_\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}^r$ pour presque tous les $\mathfrak{p}$. Alors on voit qu'il existe un isomorphisme entre J et $\tilde{k}^r$, C. Q. F. D.

Du fait que $\tilde{k}/k$ est compact [24] et que J_∞ est ouvert dans J résulte le théorème suivant :

Théorème 6.2. — *Soient k un corps de nombres algébriques, G un sous-groupe algébrique commutatif de $GL(n, k)$. Supposons que G soit formé de matrices unipotentes. Alors G est du type* (F).

---

[20] Borel [2], chapitre II, paragraphe 6.
[21] Artin [1], chapitre XIII.
[22] Borel [2], chapitre II, paragraphe 6; *cf.* la démonstration du lemme 6.4.
[23] Chevalley [4], chapitre V, paragraphe 4, proposition 14, corollaire 1.
[24] Iwasawa [7], paragraphe 3.

PARAGRAPHE 7. — Fin de la démonstration du théorème principal.

Soit G un sous-groupe algébrique commutatif de $GL(n, k)$. On sait que les éléments semi-simples (resp. unipotents) de G forment un sous-groupe G_s, (resp. G_u), algébrique, et G est le produit direct de G_s et G_u : $G = G_s \times G_u$ (25). D'après les théorèmes 5.3, 6.2, G_s, G_u sont du type (F). Soit J_s (resp. J_u) le groupe des G_s (resp. G_u)-idèles. Puisque $G_\mathfrak{p} = (G_s)_\mathfrak{p} \times (G_u)_\mathfrak{p}$ pour tous les $\mathfrak{p}$, on a $J = J_s \times J_u$. De plus on a $J_\infty \supset J_{s,\infty} \times J_{u,\infty}$, d'où $GJ_\infty \supset G(J_{s,\infty} \times J_{u,\infty})$. Alors notre théorème est la conséquence de l'isomorphisme $J_s/G_s J_{s,\infty} \times J_u/G_u J_{u,\infty} \cong J/G(J_{s,\infty} \times J_{u,\infty})$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. ARTIN, *Algebraic numbers and algebraic functions*, I, Princeton University, New-York University, 1950-1951,

[2] A. BOREL, *Groupes linéaires algébriques* (*Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 20-82).

[3] C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie*, II : *Groupes algébriques*, Paris, Hermann, 1951, (*Act. scient. et ind.* n° 1152).

[4] C. CHEVALLEY, *Théories des groupes de Lie*, III : *Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie*, Paris, Hermann, 1955, (*Act. scient. et ind.*, n° 1226).

[5] M. DEURING, *Algebren*, Berlin, Springer, 1935, (*Ergebnisse der Math.*, Vierter Band, 1).

[6] M. EICHLER, *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Berlin, Springer, 1952 (*Grundlehren der math. Wiss.*, Band 63).

[7] K. IWASAWA, *On the ring of valuation vectors* (*Ann. Math.*, t. 57, 1953, p. 331-356).

[8] T. ONO, *On algebraic groups defined by norm forms of separable extensions* (*Nagoya math. J.*, t. 11, 1957, p. 125-130).

[9] L. PONTRJAGIN, *Topological groups*, Princeton, Princeton University Press, 1946 (*Princeton mathematical Series*, n° 2).

[10] B.-L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, II, 3e édit., Berlin, Springer, 1955 (*Grundl, math. Wiss.*, Band 34).

[11] A. WEIL, *Sur la théorie du corps de classes* (*J. math. Soc. Japan*, *t.* 3, 1951, p. 1-35).

(Manuscrit reçu le 15 août 1957).

---

(25) BOREL [2], chapitre II, paragraphe 9.