

BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE LELONG

Intégration sur un ensemble analytique complexe

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 239-262

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__239_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__239_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRATION SUR UN ENSEMBLE ANALYTIQUE COMPLEXE;

PAR

PIERRE LELONG.

Une partie A d'une variété analytique complexe X est appelée un ensemble analytique complexe si A est fermé sur X et si chaque point $a \in A$ possède un voisinage U_a dans lequel A peut être défini en annulant un système fini de fonctions holomorphes dans U_a . Un tel ensemble n'est pas en général, une variété. On appellera *point ordinaire* de A un point au voisinage duquel A est une sous-variété régulièrement et analytiquement plongée dans X .

L'existence de points non ordinaires conduit à chercher si un ensemble analytique complexe A se comporte comme une chaîne finie pour la définition de l'intégrale

$$(1) \quad t(\varphi) = \int_A \varphi.$$

La forme φ sera prise dans l'espace $\mathcal{O}^0(X)$ des formes différentielles à coefficients continus, à support $K(\varphi)$ compact dans X ; on notera que φ est donc supposée définie non seulement sur A mais sur X . Le but de ce travail est d'établir l'existence et des propriétés de l'opérateur $t(\varphi)$, qui avaient été énoncées succinctement dans la Note [6]; $t(\varphi)$ est un courant ⁽¹⁾ (au sens de G. DE RHAM) qui a la continuité d'ordre nul et s'étend aux formes de $\mathcal{O}^0(X)$. Il aura les deux propriétés essentielles :

(¹) Cf. [2] : Rappelons qu'un courant $t(\varphi)$ défini sur l'espace $\mathcal{O}(X)$ des formes à coefficients indéfiniment dérivables, à support compact dans X , est dit continu d'ordre $s \geq 0$, si $t(\varphi_n) \rightarrow 0$ pour toute suite φ_n de formes, $\varphi_n \in \mathcal{O}(X)$, qui vérifient les conditions : a . les supports $K(\varphi_n)$ appartiennent à un compact fixe $K \subset X$; b . on a $\lim_n m_n^\alpha = 0$ pour $\alpha \leq s$, m_n^α désignant le maximum du module des dérivées partielles d'ordre total α des coefficients de φ_n . Un courant continu d'ordre s s'étend à l'ensemble $\mathcal{O}^s(X)$ des formes à support compact dans X , dont les coefficients ont des dérivées continues dans X jusqu'à l'ordre total s .

- a. $t(\varphi)$ est un courant fermé;
- b. $t(\varphi)$ est une somme graduée de courants positifs (fermés).

La notion de courant positif, définie dans [5] et [6] est étudiée plus particulièrement dans [7]; nous en rappellerons ici quelques propriétés qui, conjointement avec les résultats d'une étude [9] de R. REMMERT et K. STEIN des ensembles analytiques complexes, concourent à la démonstration de l'existence et des propriétés indiquées pour $t(\varphi)$. La restriction de $t(\varphi)$ aux formes de $\mathcal{O}^0(X)$ dont le support ne contient que des points ordinaires de A étant connue, on résoudra un problème de prolongement d'un courant fermé par un courant fermé. Ce problème, intéressant en lui-même, sera étudié indépendamment de la structure complexe, mais on se limitera à l'étude d'un cas particulier seul utile ici.

Le courant $t(\varphi)$ obtenu est relatif à l'ensemble A considéré comme un ensemble de points de X : pour un diviseur $f^q = 0$, il aura la même valeur quel que soit l'entier q positif. De l'existence de $t(\varphi)$ et de ses propriétés découlent l'existence et des propriétés précises des mesures positives $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ qui sont les aires (finies sur tout compact de X) de dimensions complexes $1, \dots, p$ qu'on peut attribuer à un ensemble analytique complexe A de dimension complexe maxima p . On avait déjà rencontré ces propriétés dans [3] pour $p = n - 1$: elles sont des conséquences directes du fait que t est la somme graduée de courants positifs fermés.

1. Prolongement d'un courant. — Soit V^m une variété à structure réelle, indéfiniment différentiable, de dimension m , à base dénombrable de voisinages. Une forme φ sera dite de classe (C^p) sur V^m si ses coefficients ont des dérivées continues, jusqu'à l'ordre p compris, par rapport aux coordonnées locales; $K(\varphi)$ désignera le support (supposé compact) d'une forme φ ; $\mathcal{O}^p(\Omega)$ [respectivement $\mathcal{O}(\Omega)$] désigneront l'ensemble des formes (C^p) [respectivement (C^∞)], à support compact dans l'ouvert Ω . Un courant $t(\varphi)$ est dit défini dans Ω s'il est défini sur les formes de $\mathcal{O}(\Omega)$; on désignera par $\mathcal{O}^p(\Omega)$ l'ensemble des courants définis et continus d'ordre p , ($p \geq 0$), dans Ω .

Un courant défini sur V^m induit un courant sur un ouvert Ω de V^m . On est alors conduit à la définition :

DÉFINITION. — *Un courant $\tilde{t}(\varphi)$ défini dans V^m est dit un prolongement du courant $t(\psi)$ défini dans Ω si $t(\psi)$ est la restriction de \tilde{t} aux formes de $\mathcal{O}(\Omega)$.*

En général, il ne sera pas possible de trouver un prolongement \tilde{t} d'un courant t donné dans Ω , et si \tilde{t} existe, il ne sera pas unique.

Nous ne considérerons ici que des courants et des prolongements continus d'ordre zéro. La norme $\|\psi\|$ d'une forme $\psi \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ sera définie

comme le maximum du module des coefficients de ψ . La norme d'un courant $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ dans un ouvert G (non nécessairement contenu dans Ω) sera défini par

$$\|t\|_G = \sup |\langle t, \psi \rangle|$$

pour les formes $\psi \in \mathcal{O}(\Omega \cap G)$ pour lesquelles on a $\|\psi\| \leq 1$.

L'énoncé qui suit est classique, quand t est une mesure :

PROPOSITION 1. — *Étant donné un ouvert Ω sur une variété V^m , pour qu'un courant $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ (c'est-à-dire défini et continu d'ordre nul dans Ω) admette un prolongement dans $\mathcal{O}^0(V^m)$, il faut et il suffit que $\|t\|_G$ soit fini pour tout domaine G d'adhérence compacte dans V^m .*

La condition est évidemment nécessaire car si $\tilde{t} \in \mathcal{O}^0(V^m)$ prolonge t , \tilde{t} est défini sur les formes de $\mathcal{O}(\Omega \cap G)$ et l'on a

$$\tilde{t}(\psi) = t(\psi) \quad \text{pour } \psi \in \mathcal{O}(\Omega \cap G),$$

ce qui entraîne

$$(2) \quad \|t\|_G \leq \|\tilde{t}\|_G.$$

On établira la réciproque en construisant un prolongement particulier \tilde{t}_0 de t . Soit $\varphi \in \mathcal{O}^0(V^m)$, et G un domaine contenant le support $K(\varphi)$ et d'adhérence \overline{G} compacte dans V^m . On considère un recouvrement localement fini de $\Omega \cap G$ par des ouverts U_j d'adhérence compacte dans $\Omega \cap G$; soit $\beta_j(x)$ une partition de l'unité, de classe (C^∞) , subordonnée au recouvrement $\{U_j\}$. La forme

$$\psi = \sum_1^N \varphi \beta_j$$

appartient à $\mathcal{O}(\Omega \cap G)$ et par suite

$$(3) \quad t\left(\sum_1^N \varphi \beta_j\right) = \sum_1^N t(\varphi \beta_j)$$

est défini quel que soit N . Soit S'_N la somme des termes, d'indices $j' \leq N$, qui sont positifs dans (3), S''_N la somme des termes négatifs. On a

$$S'_N = t\left(\sum_{j'} \varphi \beta_{j'}\right) \leq \|t\|_G \cdot \|\varphi\|,$$

$$|S''_N| = \left|t\left(\sum_{j''} \varphi \beta_{j''}\right)\right| \leq \|t\|_G \cdot \|\varphi\|.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{\infty} |t(\varphi \beta_j)| \leq 2 \|t\|_G \cdot \|\varphi\|.$$

Posons

$$(4) \quad \tilde{t}_0(\varphi) = \sum_j t(\varphi \beta_j),$$

la série étant absolument convergente. On remarque que sa somme n'est pas modifiée si on la calcule pour un autre recouvrement $\{V_s\}$ de $\Omega \cap G$ de même nature que $\{U_j\}$ et pour une partition de l'unité γ_s subordonnée à V_s ; il suffit en effet de comparer les deux séries obtenues à la série $\sum_{j,s} t(\varphi \beta_j \gamma_s)$.

Montrons alors :

1° $\tilde{t}_0(\varphi)$ défini par (4) est un courant continu d'ordre nul dans V^m . En effet \tilde{t}_0 est une opération linéaire sur les formes de $\mathcal{O}(V^m)$ et l'on a de plus

$$(5) \quad |\tilde{t}_0(\varphi_n)| \leq \|t\|_G \cdot \|\varphi_n\|$$

pour une suite $\varphi_n \in \mathcal{O}(G)$, ce qui montre que \tilde{t}_0 est continu d'ordre zéro.

2° \tilde{t}_0 prolonge t : on a en effet pour $\psi \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$\tilde{t}_0(\psi) = \sum_{j=1}^{j=\nu} \tilde{t}_0(\psi \beta_j) = t(\psi),$$

la somme étant finie puisque le support $K(\psi)$ est compact dans Ω .

DÉFINITION. — L'ensemble E étant fermé sur V^m , nous appellerons famille (F_r) un ensemble de fonctions $\alpha_r(x)$ dépendant d'un paramètre $r > 0$ et ayant les propriétés suivantes :

- (a₁) $\alpha_r(x)$ est défini, de classe (C^∞) pour $x \in V^m$; on a $0 \leq \alpha_r(x) \leq 1$.
- (a₂) Il existe un ouvert ω'_r de V^m contenant E sur lequel on a $\alpha_r(x) = 1$; on a $\alpha_r(x) = 0$ hors d'un ouvert $\omega_r \supset \omega'_r$.
- (a₃) Quand r décroît, $\alpha_r(x)$ est fonction non croissante de r ; quand r tend vers zéro, l'ouvert $\omega_r(x)$ tend vers E .

En nous servant de cette définition, nous démontrerons :

3° On a, pour toute famille (F_r) relative à l'ensemble fermé $E = V^m - \Omega$:

$$(6) \quad \tilde{t}_0 = \lim t(1 - \alpha_r).$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{O}(V^m)$; pour tout $r > 0$, α_r appartenant à (F_r) , $\varphi(1 - \alpha_r)$ appartient à $\mathcal{O}(\Omega)$, $t[(1 - \alpha_r)\varphi]$ est défini, et le courant $t(1 - \alpha_r)$ défini par $t(1 - \alpha_r)(\varphi) = t[(1 - \alpha_r)\varphi]$ s'applique aux formes $\varphi \in \mathcal{O}(V^m)$. Posons, r_q décroissant et tendant vers zéro :

$$\gamma_1 = 1 - \alpha_{r_1} \geq 0, \quad \dots, \quad \gamma_q = \alpha_{r_{q-1}} - \alpha_{r_q} \geq 0.$$

On a sur Ω :

$$\sum_i \gamma_i(x) = 1,$$

$\gamma_i(x)$ est une partition de l'unité; si φ est une forme de support $K(\varphi)$ compact dans V^m et $g(x)$ une fonction (C^∞) à support compact dans V^m , valant 1 sur $K(\varphi)$, on aura, d'après (4) en posant $\gamma'_q = g\gamma_q$:

$$\tilde{t}_0(\varphi) = \sum_q t(\varphi\gamma'_q) = \sum_q t(\varphi\gamma_q) = \lim_n \sum_{q \leq n} t(\varphi\gamma_q) = \lim_{n \rightarrow \infty} t[\varphi(1 - \alpha_{r_n})]$$

qui établit (6). L'existence de \tilde{t}_0 avec les propriétés 1° et 2° établit la proposition 1.

2. Extension simple d'un courant continu d'ordre nul. — Nous utiliserons les expressions suivantes :

DÉFINITION. — 1° Un courant t défini et continu d'ordre nul dans un ouvert Ω est dit *borné en un point frontière* m de Ω s'il existe un voisinage U de m tel que $\|t\|_U = \sup |t(\varphi)|$ pour $\|\varphi\| = 1$, $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega \cap U)$, soit fini.

2° Soit Ω un ouvert de V^m ; on appellera *extension simple d'un courant t défini et continu d'ordre nul dans Ω , borné aux points de V^m qui sont points frontières de Ω* , le courant \tilde{t}_0 défini par

$$(7) \quad \tilde{t}_0(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} t[(1 - \alpha_r)\varphi]$$

pour une famille (F_r) relative à une partie fermée de $E = V^m - \Omega$, contenant $E \cap K(\varphi)$.

Pour que l'extension simple \tilde{t}_0 existe il faut et il suffit que t soit borné en tout point frontière commun à E et à Ω sur V^m ; on dit encore que t est convergent et converge selon (7) vers l'extension simple \tilde{t}_0 .

PROPOSITION 2. — Pour qu'un courant $\tilde{t} \in \mathcal{O}^0(V^m)$ qui prolonge $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ soit l'extension simple de t , il faut et il suffit que pour tout domaine G d'adhérence compacte dans V^m , on ait

$$(8) \quad \|\tilde{t}\|_G = \|t\|_G,$$

c'est-à-dire que le prolongement n'augmente pas la norme.

En effet on a $\|\tilde{t}\|_G \geq \|t\|_G$ d'après (2) pour tout prolongement $\tilde{t} \in \mathcal{O}^0(V^m)$.

Pour l'extension simple \tilde{t}_0 , on a d'après (7) appliqué à $\varphi \in \mathcal{O}(V^m \cap G)$, satisfaisant à $\|\varphi\| < 1$:

$$\|\tilde{t}_0\|_G = \sup_\varphi |\tilde{t}_0(\varphi)| = \sup_\varphi \left| \lim_{r \rightarrow 0} t[(1 - \alpha_r)\varphi] \right| \leq \|t\|_G.$$

On a donc

$$(9) \quad \|t_0\|_G = \|t\|_G$$

qui montre que l'extension simple n'accroît pas la norme. Réciproquement soit $\tilde{t} \in \mathcal{O}^0(V^m)$ un prolongement satisfaisant (8) pour tout domaine G d'adhérence \overline{G} compacte dans V^m : $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe une forme $\psi \in \mathcal{O}(\Omega)$, telle que l'on ait $\|\psi\| \leq 1$ et

$$(10) \quad |t(\psi)| \geq \|t\|_G - \varepsilon.$$

Soit φ une forme de $\mathcal{O}(V^m)$, G un domaine d'adhérence \overline{G} compacte dans V^m et contenant le support $K(\varphi)$; soit (F_r) une famille de noyaux α_r , relative à $E_1 = \overline{G} - (\Omega \cap G)$: il existe une valeur $r_0 > 0$ telle que pour $r < r_0$, le support $K(\alpha_r)$ soit étranger à $K(\psi)$. On considère pour $r < r_0$ l'une des deux formes

$$\varphi_1 = \psi \pm \alpha_r \|\varphi\|^{-1} \varphi,$$

ψ et $\alpha_r \varphi$ ayant des supports disjoints. On a $\|\varphi_1\| \leq 1$, $\varphi_1 \in \mathcal{O}(V^m)$ et

$$\tilde{t}(\varphi_1) = t(\psi) \pm \tilde{t}[\alpha_r \|\varphi\|^{-1} \varphi].$$

On choisit alors le signe à prendre devant le second terme de manière que son signe soit celui de $t(\psi)$. On a dans ces conditions :

$$|\tilde{t}(\varphi_1)| = |t(\psi)| + \|\varphi^{-1}\| |\tilde{t}(\alpha_r \varphi)| \leq \|t\|_G,$$

ce qui, compte tenu de (10), donne

$$|\tilde{t}(\alpha_r \varphi)| \leq \varepsilon \|\varphi\|$$

et montre qu'on a

$$\lim_{r=0} \tilde{t}(\alpha_r \varphi) = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{t}(\varphi) = \lim_{r=0} t[(1 - \alpha_r) \varphi];$$

\tilde{t} coïncide donc avec l'extension simple \tilde{t}_0 définie par (7).

3. Cas d'un courant fermé. — Considérons maintenant le cas où $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$, borné (donc convergent) aux points de la frontière E^* de Ω relative à V^m , est de plus un courant fermé, c'est-à-dire, vérifie

$$bt(\psi) = t(d\psi) = 0.$$

pour toute forme $\psi \in \mathcal{O}(\Omega)$. Soit $\tilde{t} \in \mathcal{O}^0(V^m)$ un prolongement de t dans V^m . On aura, $\alpha_r(x)$ étant une famille (F_r) relative à une partie fermée de $E = V^m - \Omega$ contenant $E \cap K(\varphi)$.

$$d[(1 - \alpha_r) \varphi] = -d\alpha_r \wedge \varphi + (1 - \alpha_r) d\varphi.$$

D'où

$$\tilde{t}(d\varphi) = \tilde{t}(\alpha_r d\varphi) + \tilde{t}(d\alpha_r \wedge \varphi) + \tilde{t}[d(1 - \alpha_r) \varphi].$$

Le dernier terme est nul car la forme $(1 - \alpha_r)\varphi$ appartient à $\mathcal{O}(\Omega)$. On a donc

$$(11) \quad t(d\alpha_r \wedge \varphi) = \tilde{t}(d\varphi) - \tilde{t}(\alpha_r d\varphi).$$

En particulier, si \tilde{t} est l'extension simple \tilde{t}_0 :

$$(12) \quad \begin{aligned} t(d\alpha_r \wedge \varphi) &= \tilde{t}_0(d\varphi) - \tilde{t}_0(\alpha_r d\varphi), \\ \lim_{r \rightarrow 0} t(d\alpha_r \wedge \varphi) &= \tilde{t}_0(d\varphi). \end{aligned}$$

Le courant $t \wedge d\alpha_r$ a son support dans Ω , pour $r > 0$; on peut l'identifier à un courant de $\mathcal{O}^0(V^m)$ nul en dehors du support de $d\alpha_r$. On obtient à partir de (12) :

THÉOREME 1. — *Pour qu'un courant t fermé, continu d'ordre nul dans l'ouvert Ω , borné sur tout domaine G d'adhérence \bar{G} compacte dans V^m ait pour extension simple un courant fermé, il faut et il suffit que le courant*

$$\theta_r = t \wedge d\alpha_r$$

converge vers zéro sur tout domaine G quand $r \rightarrow 0$, α_r étant une famille (F_r) relative au compact $[V^m - \Omega] \cap \bar{G}$.

Il faut et il suffit encore qu'on ait dans les mêmes conditions :

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \|t \wedge d\alpha_r\|_G = 0.$$

COROLLAIRE 1. — *Le courant $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ étant fermé, pour qu'il ait une extension simple \tilde{t}_0 fermée, il faut et il suffit que $\varepsilon > 0$ étant donné, on puisse déterminer pour tout compact \bar{G} , et pour une famille (F_r) relative à $\bar{G} \cap E$, où $E = V^m - \Omega$, un nombre $r > 0$ tel qu'on ait :*

- a. $\|t(\alpha_r - \alpha_\rho)\|_G < \varepsilon$ quel que soit $\rho < r$;
- b. $\|t \wedge d\alpha_r\|_G < \varepsilon$.

REMARQUES. — 1° Le théorème 1 s'applique si V^m est supposé de classe (C^p) , $p \geq 2$, au lieu d'être (C^∞) : on choisira (F_r) de classe (C^p) .

2° Si $E = V^m - \Omega$ n'est pas compact on peut le décomposer en une somme $\sum \bar{E}_i$ de compacts et écrire que les propriétés précédentes sont vérifiées séparément pour des familles $(F_{i,r})$ de noyaux $\alpha_{i,r}$ relatives aux \bar{E}_i , \bar{E}_i étant obtenu à partir d'un recouvrement de E par des ouverts U_i et étant l'adhérence de $E_i = U_i \cap E$.

3° L'énoncé s'applique si $E = V^m - \Omega$ a un intérieur : l'extension simple y est alors un courant nul.

4. **Cas où E est un sous-espace ou son image.** — Interprétons la condition (13) en supposant que V^m est un domaine D de l'espace euclidien $R^m(x_1, \dots, x_m)$, E étant un sous-espace R^s qu'on supposera défini par $[x_{s+1} = 0, \dots, x_m = 0]$, $0 \leq s \leq m-1$. On prendra $\alpha_1(x_{s+1}, \dots, x_m)$ de classe (C^∞) , $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, α_s étant nul en dehors de la boule unité de centre l'origine dans $R^{m-s}(x_{s+1}, \dots, x_m)$, et valant 1 sur un voisinage de cette origine. On construira une famille (F_r) par homothétie en posant pour $0 < r < 1$:

$$(14) \quad \alpha_r(x_{s+1}, \dots, x_m) = \alpha_1\left(\frac{x_{s+1}}{r}, \dots, \frac{x_m}{r}\right).$$

Si L majore les modules des coefficients de la forme $d\alpha_1$, nous aurons

$$(15) \quad \|d\alpha_r\| \leq L r^{-1}.$$

D'autre part G étant un domaine d'adhérence compacte dans D nous noterons $\|t\|_G^0$ la norme de $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ dans l'ouvert des points de G dont la distance δ à R^s satisfait à $0 < \delta < \rho$. On a, d'après (15) :

$$\|t d\alpha_r\|_G \leq L r^{-1} \|t\|_G^0.$$

Nous énoncerons donc :

THÉOREME 2. — *Pour que le courant $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$, [où $\Omega = D - R^s$ s'obtient en enlevant du domaine $D \subset R^m$ ($0 \leq s \leq m-1$), un sous-espace R^s], fermé dans Ω , ait une extension simple fermée dans D , il faut et il suffit que $\|t\|_G$ soit borné pour tout domaine G d'adhérence compacte dans D et qu'on ait $\lim_{r=0} \|t d\alpha_r\|_G = 0$, pour une famille (F_r) construite selon (14) par homothétie.*

Il suffit pour que ces conditions soient réalisées qu'on ait

$$(16) \quad \lim_{r=0} r^{-1} \|t\|_G^r = 0,$$

où $\|t\|_G^r$ est le sup de $|t(\varphi)|$ pour $\|\varphi\| \leq 1$, le support $K(\varphi)$ étant dans G et ne comportant que des points dont la distance δ à R^s satisfait $0 < \delta < r$.

L'énoncé qui suit, relatif à la même configuration, sera utilisé plus loin :

THÉOREME 3. — *Si t est un courant fermé, continu d'ordre nul, dans l'ouvert $\Omega = D - R^s$ ($0 \leq s \leq m-1$) de R^m , si à tout domaine G d'adhérence compacte dans D , on peut associer un nombre fini $k(G)$, tel qu'on ait pour toute boule $B \subset G$:*

$$(17) \quad \|t\|_B \leq k(G) r^\gamma,$$

r étant le rayon de B , et si $\gamma > s+1$, la simple extension de t existe et est un courant fermé dans D .

En effet recouvrons R^m par un pavage dont les éléments sont des cubes (à m dimensions) égaux, de côté $2r$, le sommet d'un des éléments étant un point O pris dans R^s , et indépendant de r . Le nombre des éléments qui contiennent un point de $G \cap R^s$ est $N_r < L_1 r^{-s}$, L_1 étant indépendant de r pour r inférieur à une valeur r_0 . Les boules égales $\beta_i^{(r)}$ circonscrites à ces éléments ont une somme $\sum_i \beta_i^{(r)}$ qui appartient à un domaine G_1 compact dans D . On a alors d'après (17) :

$$\|t\|_G \leq \sum_i \|t\|_{\beta_i^{(r)}} \leq N_r \cdot k(G_1) (r\sqrt{m})^\gamma \leq k'(G_1) r^{\gamma-s}.$$

La condition (16) est donc satisfaite pour $\gamma > s + 1$, ce qui établit l'énoncé.

On appliquera plus généralement en opérant une application biunivoque de classe (C^p) ($p \geq 2$). L'image d'un courant t continu d'ordre nul, par une telle application $\xi = \mu(x)$ est le courant défini par $\mu t[\psi_\xi] = t[\mu^* \psi]$ où $\mu^* \psi$ est obtenu en substituant x à ξ dans la forme ψ ; μt est continu d'ordre nul et fermé si t l'est. On supposera que l'ensemble E^* des points frontières (relatifs à V^m) de Ω peut localement être appliqué par une transformation de classe (C^p) dans un sous-espace R^s de l'espace euclidien R^m . On obtient ainsi :

THÉOREME 4. — Soit V^m une variété de classe (C^p) , ($p \geq 2$), à base dénombrable de voisinages ouverts, Ω un ouvert de V^m , $E = V^m - \Omega$, E^* étant l'ensemble des points frontières de Ω sur V^m . Pour que le courant fermé t , continu d'ordre nul dans Ω se prolonge par extension simple en un courant fermé sur V^m , il suffit :

- qu'il existe un recouvrement de E^* par des ouverts U_i , U_i étant appliqué par un homéomorphisme μ_i de classe C^p dans un domaine D de R^m , et $E^* \cap U_i$ étant appliqué dans un sous-espace R^s ($0 \leq s \leq m - 1$).
- que les courants t_i images par μ_i de t dans D satisfassent à la majoration (16) ou à la majoration (17) pour tout domaine G d'adhérence compacte dans D .

4. Courants positifs. — Nous supposerons maintenant que V^m est un domaine D de l'espace numérique complexe C^n ($m = 2n$).

DÉFINITION. — Un courant t dans D sera dit positif de degré q , de dimension complexe $n - q$ ($0 \leq q \leq n$) si :

1° Il est homogène, de degré (q, q) par rapport aux $dz_i, d\bar{z}_j$, c'est-à-dire nul sur les formes homogènes de $\omega(D)$ qui ne sont pas de degré $(n - q, n - q)$.

2° Pour tout système de formes

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n a_k^i(M) dz_i \quad (k = 1, \dots, n - q)$$

à coefficients $a_k^i(M)$ (C^∞) dans D , le courant (de degré maximum)

$$t \wedge \left(\frac{i}{2}\right)^{n-q} \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-q} \wedge \bar{\omega}_{n-q}$$

est une mesure positive.

On désignera par Θ_q^+ la classe des courants positifs de degré q : Θ_n^+ est l'ensemble des mesures positives. Une forme sera dite positive si elle a des coefficients continus et si elle représente un courant positif; les formes positives de degré zéro sont les fonctions continues positives. Les courants positifs sont réels.

Un p -vecteur complexe A^p par le point $z^0 = (z_i^0)$ est la variété analytique complexe d'équations

$$(18) \quad z_i = z_i^0 + \sum_{k=1}^p a_i^k u_k \quad (i = 1, \dots, n).$$

Les a_i^k sont les coordonnées de A^p , les déterminants

$$\alpha_{(i)} = |a_i^k|_{\substack{k=1, \dots, p \\ i=i_1, \dots, i_p}} \quad [(i) = (i^1 < i_1 < \dots < i_p)]$$

sont les paramètres de A^p . Un changement de représentation : $u_k = \sum_{j=1}^p c_k^j v_j$ donne les nouveaux paramètres

$$\beta_{(i)} = \gamma \cdot \alpha_{(i)}$$

où γ est le déterminant $|c_k^j|$; s'ils correspondent à une représentation unitaire

de (18) on aura $\sum_{(i)} |\beta_{(i)}|^2 = 1$, d'où

$$\beta_{(i)} = \alpha_{(i)} \sigma_\alpha^{-1},$$

où $\sigma_\alpha^2 = \sum_{(i)} |\alpha_{(i)}|^2$. Au p -vecteur A^p nous ferons correspondre la forme différentielle suivante, égale sur A^p à l'élément d'espace $d\tau_{2p}(A^p)$ de A^p :

$$\begin{aligned} \omega(A^p) &= \left(\frac{i}{2}\right)^p dv_1 \wedge d\bar{v}_1 \wedge \dots \wedge dv_p \wedge d\bar{v}_p \\ &= k_p \sum_{(i), (\bar{j})} \beta_{(i)} \bar{\beta}_{(\bar{j})} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_p} \end{aligned}$$

où l'on pose $k_p = \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$; c'est une forme positive; son adjointe est ${}^*\omega(A^p) = \omega(B^{n-p})$, B^{n-p} étant le $(n-p)$ -vecteur complexe orthogonal à A^p . On établit [6] et [7] :

Pour qu'un courant t homogène de degré (p, p) soit positif, il faut et il suffit que pour tous les p -vecteurs A^p , la distribution (au sens de L. SCHWARTZ) :

$$(19) \quad T(A^p)(f) = \int t \wedge {}^*\omega(A^p)f = \int k_p^{-1} \left[\sum_{(i)(\bar{j})} t_{(i)(\bar{j})} \beta_{(i)} \bar{\beta}_{(\bar{j})} \right] f d\tau_{2n}$$

soit une mesure positive sur les $f \in \mathcal{O}(D)$; dans (19) on suppose le courant t écrit sous la forme

$$t = \sum_{(i)(\bar{j})} t_{(i)(\bar{j})} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\bar{j}_p}.$$

A un courant $t \in \Theta_p^+$ dans D correspond donc une mesure positive dans D , soit $T(A^p)$ donnée par (19), et fonction du p -vecteur A^p considéré.

Un système (Σ) de $N = (C_n^p)^2$ p -vecteurs A_s^p , $s = 1, 2, \dots, N$, $[A_s^p = (a_{i,s}^k)]$, sera dit régulier si le déterminant, d'ordre N :

$$\Delta = |\alpha_{(i),s} \cdot \bar{\alpha}_{(\bar{j}),s}|_{\substack{1 \leq s \leq N \\ (i)(\bar{j})}}$$

n'est pas nul. On montre (cf. [7]) que $\Delta = 0$ définit une variété algébrique dans l'espace des coordonnées $a_{i,s}^k, \bar{a}_{\bar{j},s}^k$, où l'on écrit $a_{j,s}^k = a_{j,s}^k + i a_{j,s}^n$. On en déduit :

PROPOSITION 3. — Les nombres $(a_{i,0}^k)$ ($1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq n$) ainsi que $\varepsilon > 0$ étant donnés, on peut toujours trouver un système régulier (Σ) de N p -vecteurs $A_s^p(a_{i,s}^k)$ pour lesquels on a

$$|a_{i,s}^k - a_{i,0}^k| < \varepsilon.$$

Si les $a_{i,0}^k$ correspondent à une représentation unitaire d'un p -vecteur A_0^p non dégénéré, on pourra choisir les $a_{i,s}^k$ de manière qu'ils correspondent à des représentations unitaires des A_s^p d'un système régulier (Σ) .

A un système régulier (Σ) il correspond des coefficients numériques $h_{(i)(\bar{j})}^s$ tels qu'on ait par la résolution des N équations analogues à (18) :

$$(20) \quad T_{(i)(\bar{j})}(f) = \int t_{(i)(\bar{j})} f d\tau_{2n} = \sum_s h_{(i)(\bar{j})}^s T[A_s^p](f).$$

Un courant positif est donc continu d'ordre nul; les distributions $T_{(i)(\bar{j})}$ relatives à ses coefficients $t_{(i)(\bar{j})}$ sont des mesures complexes; de plus elles sont

majorées d'après (20) en fonction des mesures positives $T(A_s^p)$. On obtient alors l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4. — *A un système régulier (Σ) de p -vecteurs A_s^p il correspond un nombre C_Σ fini, tel que pour tout courant positif dans D et de degré p on ait*

$$(21) \quad \|t\|_D \leq C_\Sigma \sup_s \|T(A_s^p)\|_D.$$

6. Intégration aux points ordinaires d'un ensemble analytique de dimension homogène. — Soit A un ensemble analytique complexe dans un domaine D de C^n : $a \in A$ sera dit point ordinaire de A s'il existe un voisinage U_a de a et une transformation biunivoque analytique complexe $\zeta = F(z)$ telle que $F[A \cap U_a]$ soit l'intersection de $F(U_a)$ avec un sous-espace complexe $C^{s(a)}$. L'ensemble des points ordinaires de A sera désigné par A^* .

La dimension complexe $d(a)$ de A en $a \in A$ est définie (cf. [9]) par $d(a) = n - q_a$, où q_a est le maximum de l'entier q tel qu'il passe par a un q -vecteur A^q non dégénéré, et que a soit point isolé de l'intersection $A \cap A^q$. En un point ordinaire, $d(a) = s(a)$. On peut encore définir ⁽²⁾ $d(a)$ comme une fonction à valeurs entières positives, semi-continue supérieurement sur A et valant $s(a)$ aux points ordinaires de A . Le maximum de $d(a)$ pour $a \in A$ est appelé la dimension (complexe) de A ; A est dit de dimension homogène p , si $d(a) = p$ en tout point a de A . Nous étudierons d'abord l'intégration d'une forme φ sur un tel ensemble. L'ensemble $E = A - A^*$ des points non ordinaires de A est fermé et constitue ⁽³⁾ un ensemble analytique dans D , de dimension au plus $p - 1$.

DÉFINITION. — Soit A un ensemble analytique de dimension homogène p , dans D et $\Omega = D - [A - A^*] = D - E$ l'ouvert de D obtenu en retirant de D les points non ordinaires de A . On appellera courant d'intégration sur les points ordinaires de A dans D le courant

$$t_0(\varphi) = \int_{A^*} \varphi$$

défini sur les formes $\varphi \in \mathcal{O}^0(\Omega)$, à support compact dans $D - E = \Omega$.

La définition précédente est justifiée par le fait que le support $K(\varphi)$ étant compact dans Ω , $A^* \cap K(\varphi)$ se compose d'une réunion finie de variétés. Soit $\{U_j\}$ un recouvrement localement fini de Ω par des domaines d'adhérence compacte dans Ω , les U_j qui intersectent A^* étant choisis de manière qu'il existe un isomorphisme analytique $\zeta = \mu_j(z)$ appliquant $U_j \cap A$ sur un ouvert $I_j = \mu_j(I_j)$ d'un sous-espace C_j^p . Alors on a pour $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$, α_j étant une

⁽²⁾ Cf. [9] : c'est une conséquence du théorème 3 de [9].

⁽³⁾ Cf. [1], exposé IX: ainsi que [8] et [9].

partition (C^z) de l'unité dans Ω subordonnée à $\{U_j\}$:

$$(22) \quad t_0(\varphi) = \sum_j \int_{l_j} \varphi \alpha_j = \sum_j \int_{l'_j} \mu_j^*(\alpha_j \varphi) = \sum_j \int_{l'_j} \alpha'_j \varphi'_j,$$

où $\alpha'_j = \mu_j^* \alpha_j$, $\varphi'_j = \mu_j^* \varphi$. La somme ne comprend qu'un nombre fini de termes non nuls. De (22) résulte alors :

1° t_0 est un courant homogène de degré $(n-p, n-p)$. En effet il en est ainsi de chacun des termes qui figurent au second membre de (22);

2° t_0 est un courant fermé : en effet on a

$$t_0(d\psi) = \sum_i \int_{l_i} \alpha_i d\psi = \sum_i \int_{l_i} d(\alpha_i \psi) - \sum_i \int_{l_i} d\alpha_i \wedge \psi.$$

Les termes de la première somme sont nuls d'après

$$\int_{l_i} d(\alpha_i \psi_i) = \int_{l'_i} d(\alpha'_i \psi'_i) = 0.$$

Ceux de la seconde le sont dans leur ensemble d'après

$$\sum_i \alpha_i = 1 \quad \sum_i d\alpha_i = 0;$$

3° t_0 est un courant positif. En effet de la définition donnée plus haut il résulte (cf. [7]) que l'image d'un courant positif par un isomorphisme analytique complexe est un courant positif. Il suffit alors de montrer que le courant

$$\int_{l'_j} \mu_j^*(\alpha_j \varphi)$$

qui figure dans (22) appartient à Θ_{n-p}^+ : il consiste à intégrer la forme φ , multipliée par une fonction $\alpha'_j \geq 0$, à support compact, sur le sous-espace C_{ζ}^p . On a bien

$$\int_{C^p} \alpha'_j \varphi \geq 0$$

pour $\alpha'_j \geq 0$, $\varphi = \left(\frac{i}{2}\right)^p \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \wedge \bar{\omega}_p$, les ω_k ($1 \leq k \leq p$) ayant l'expression $\omega_k = \sum_{i=1}^n a_k^i dz_i$, où les coefficients a_k^i sont des fonctions complexes continues, et C_{ζ}^p est défini par $\zeta_{p+1} = 0, \dots, \zeta_n = 0$.

7. Majoration du courant t_0 . — Les hypothèses demeurant les mêmes

sur A , on va majorer le courant

$$t_0(\varphi) = \int_{A^*} \varphi$$

défini, fermé, positif (donc continu d'ordre nul) dans l'ouvert $\Omega = D - E$, où $E = A - A^*$. Soit m_0 un point de A (non nécessairement dans A^*). Il existe un $(n-p)$ -vecteur complexe A_0^{n-p} par m_0 tel que $A \cap A_0^{n-p}$ ait m_0 comme point isolé. Si m_0 est pris pour origine, A_0^{n-p} étant défini par $z_1 = z_2 = \dots = z_p = 0$, il existe un voisinage (U_0) de m_0 et un ensemble analytique A' défini par $n-p$ équations dans (U_i) :

$$(23) \quad f_{p+j}(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, n-p),$$

les f_{p+j} étant holomorphes dans (U_0) , de manière qu'on ait $(A \cap U_0) \subset A'$.

Les f_{p+j} peuvent être pris égaux à des pseudo-polynômes

$$f_{p+j} \equiv (z_{p+j})^{\lambda_j} + \sum_{s=\lambda_j-1}^0 C_{p+j}^s(z_1, \dots, z_p) z_{p+j}^s = 0,$$

les coefficients C_{p+j}^s étant holomorphes au voisinage de l'origine et s'annulant en celle-ci. Il en résulte que $m_0 \subset A'$ est *point isolé* de $A' \cap A_0^{n-p}$. Nous supposons maintenant l'origine quelconque, m_0 ayant des coordonnées z_i^0 et A_0^{n-p} étant représenté par des équations

$$(24) \quad z_i = z_i^0 + \sum_k \alpha_{i,0}^k u_k \quad (1 \leq k \leq n-p),$$

où les $\alpha_{i,0}^k$ correspondent à une représentation unitaire de A_0^{n-p} . Étudions alors l'intersection de A' avec un $(n-p)$ -vecteur A^{n-p} défini par

$$(24') \quad z_i = z_i' + \sum_k \alpha_i^k u_k$$

sous les hypothèses

$$(25) \quad |\alpha_i^k - \alpha_{i,0}^k| < \varepsilon; \quad |z_i' - z_i^0| < \varepsilon'$$

qui définissent une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ de A^{n-p} voisins de A_0^{n-p} .

Par substitution dans (23) des expressions (24') on obtient un système

$$(26) \quad \psi_j(z_i'; \alpha_i^k; u_k) = 0 \quad (j = 1, \dots, n-p)$$

où les ψ_j sont continus des variables indiquées. Pour les valeurs $z_i' = z_i^0$, $\alpha_i^k = \alpha_{i,0}^k$, ce système admet par rapport aux inconnues u_1, \dots, u_{n-p} , la

solution isolée $u_k = 0$; il existe alors une boule $b: \sum_{k=1}^{n-p} |u_k|^2 < \rho^2, \rho > 0$ telle qu'on

(¹) Cf. [9], théorème 1.

ait $\sum_j |\psi_j|^2 \geq m > 0$ sur la frontière de b pour les valeurs $[z_i' = z_i^0; a_i^k = a_{i0}^k]$

des z_i' , et des a_i^k considérées comme des paramètres, et que $u_k = 0$ soit la seule solution du système dans b . Il existe donc une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ définie par (25), $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, de $(n-p)$ -vecteurs définis par (24') tels qu'on ait

$\sum_j |\psi_j|^2 \geq \frac{m}{2} > 0$ pour $\sum_{k=1}^{n-p} |u_k|^2 = \rho^2$, c'est-à-dire sur la frontière de b

considérée dans les A^{n-p} appartenant à $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$. Dans ces conditions pour $A^{n-p} \in \Phi(\varepsilon, \varepsilon')$, $A^{n-p} \cap A'$ est un ensemble analytique dans b qui ne contient pas de points dans un voisinage de la frontière de b : c'est alors un ensemble analytique de dimension zéro ⁽⁵⁾, donc constitué de points isolés. Leur nombre, chacun d'eux étant affecté d'une multiplicité positive, peut être calculé par l'intégrale de Kronecker du système (26) dans b ; ce nombre est constant et égal à la multiplicité $N'(m_0)$ du point m_0 sur $A' \cap A_0^{n-p}$. On obtient donc :

PROPOSITION 5. — *Si m_0 appartient à un ensemble analytique A , de dimension p en m_0 , il existe un $(n-p)$ -vecteur A_0^{n-p} , une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ définie par (25) de A^{n-p} voisins, un nombre $\rho > 0$, tels que l'intersection*

$A^{n-p} \cap A'$ ne contienne dans b définie par les équations (24) et $\sum_{k=1}^{n-p} |u_k|^2 < \rho^2$,

que des points isolés dont le nombre est borné [par $N'(m_0)$ défini plus haut].

On en déduit :

PROPOSITION 6. — *Si m_0 appartient à l'ensemble analytique A , de dimension homogène p dans D , il existe une boule B_0 de centre m_0 , un nombre $k_1(B_0)$ fini et une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ de $(n-p)$ -vecteurs complexes A^{n-p} tels que $t_0(\varphi)$ étant le courant d'intégration sur les points ordinaires de A , on ait*

$$(27) \quad \|T_0(A^{n-p})\|_{B'} < k_1(B_0) r'^{2p}$$

pour la mesure positive $T_0(A^{n-p})$ associée à t_0 et à un $(n-p)$ -vecteur quelconque de $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ et pour toute boule B' , de rayon r' contenue dans B_0 .

Faisons la démonstration pour la boule B_0 elle-même : la configuration étant celle de la proposition 5, on choisira son rayon r satisfaisant à

$$0 < r < \inf \left(\varepsilon', \frac{\rho}{2} \right)$$

et assez petit pour que B_0 soit dans (u_0) . Cela fait, si le point q de coordonnées $z_i^{(q)}$ appartient à B_0 , les $A^{n-p} \in \Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ pour lesquels on choisit $z_i' = z_i^{(q)}$

(⁵) Cf. [9], théorème 7.

dans (24') coupent B_0 en des points pour lesquels on a $\sum |u_k|^2 < \rho^2$. On a donc

$$[A^{n-p} \cap B_0 \cap A] \subset [A^{n-p} \cap B_0 \cap A'],$$

où la seconde intersection comprend au plus $N'(m_0)$ points.

Il est alors aisé d'en déduire (27) pour B_0 . Fixons $A^{n-p} \subset \Phi(\varepsilon, \varepsilon')$; si A^{n-p} est la direction de $(n-p)$ -vecteur $[z_1 = z_1^0, \dots, z_p = z_p^0]$, on a, pour $f \in \mathcal{O}(B_0 \cap \Omega)$:

$$(28) \quad T_0(A^{n-p})(f) = \int_{\sigma} \left(\frac{i}{2}\right)^p f dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_p \wedge d\bar{z}_p$$

où $\sigma = A^* \cap K(f)$ est une somme finie de variétés. Au-dessus d'un point $\zeta = (z_1, \dots, z_p)$ de C^p (on pose $C^n = C^p \times C^{n-p}$), il y a au plus $N'(m_0)$ points de σ , et ceci pour $|\zeta| < r$. Or ζ parcourt dans C^p une boule de rayon r , de mesure $r^{2p} \tau_{2p}(1)$, où $\tau_{2p}(1)$ est la mesure de la boule unité de C^p . On a donc pour $|f| \leq 1$,

$$(29) \quad \|T_0(A^{n-p})\| \leq N'(m_0) \tau_{2p}(1) r^{2p} = k_1(B_0) r^{2p},$$

ce qui établit (27) pour B_0 , et aussi pour toute boule $B' \subset B_0$, le nombre des points de $\sigma \cap B'$ projetés en ζ étant *a fortiori* borné par $N'(m_0)$.

En utilisant alors les propositions 3 et 4 on obtient :

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses de la proposition 6, il existe une boule B_0 de centre m_0 , et un nombre fini $k(B_0)$ tel que pour toute boule $B' \subset B_0$ le courant d'intégration sur A^* satisfasse à*

$$(30) \quad \|t_0\|_{B'} \leq k(B_0) r'^{2p},$$

r' étant le rayon de B' .

On arrive alors à l'énoncé suivant qui joue un rôle essentiel :

THÉOREME 5. — *Soit A un ensemble analytique complexe dans un domaine D de C^n , de dimension homogène p , ($1 \leq p \leq n-1$). A tout domaine G d'adhérence $\overline{G} \subset D$, il correspond un nombre fini $k(G)$ tel qu'on ait :*

$$(31) \quad \|t_0\|_B \leq k(G) r^{2p}$$

pour toute boule $B \subset G$, t étant le courant d'intégration sur A^* et r le rayon de B .

En effet recouvrons le compact $\overline{G} \cap A$ par des boules ouvertes de rayons r_i , centrées sur A , notées β_1, \dots, β_v ; complétons par des boules $\beta_{v+1}, \dots, \beta_\mu$ de manière à recouvrir \overline{G} , ces dernières étant prises d'adhérence compacte

dans $D - A$. Soit $\sum_i \beta_i = G'$. On a

$$(32) \quad \|t_0\|_{G'} \leq \sum_i \|t_0\|_{\beta_i} < \infty.$$

Si l'énoncé était en défaut, il existerait une suite $B_j \subset G$ de boules tendant vers une boule $B_l \subset \overline{G}$, et pour lesquelles $r_j^{-2p} \|t_0\|_{B_j} \rightarrow +\infty$. Si le rayon r de B_l n'est pas nul, on aboutit à une contradiction avec (32). Si $r_j \rightarrow 0$, on a $B_l = m_0 \subset A \cap \overline{G}$, B_l étant réduite à un point m_0 ; alors, d'après le corollaire 2, B_j appartient à partir d'un certain rang j à une boule B_0 centrée en m_0 sur A , compacte dans D , pour laquelle (30) est vérifiée. On aboutit ainsi à une contradiction. L'énoncé est donc établi.

Résumons alors les propriétés du courant $t_0 \in \mathcal{O}^0(\Omega)$, $\Omega = D - (A - A^*)$ sur les points ordinaires d'un ensemble analytique A de dimension homogène p défini dans un domaine D de C^n :

- a. t_0 est un courant positif et fermé;
- b. $\|t_0\|_G < \infty$;
- c. $r^{-2p} \|t_0\|_B < k(G)$

pour G d'adhérence compacte dans D et toute boule $B \in G$, r étant le rayon de B .

8. Intégration sur un ensemble analytique de dimension homogène. —

Nous aurons à considérer des ensembles analytiques, réunions finies $\eta = \sum_i A_i$

d'ensembles analytiques dans D . La dimension de η sera le maximum de la dimension (complexe) des A_i . Un tel ensemble η est une réunion finie d'ensembles analytiques irréductibles dans G , pour tout domaine G d'adhérence compacte dans D .

DÉFINITION. — Soit $\eta = \sum_i A_i$ une réunion finie d'ensembles analytiques

irréductibles dans G sur lesquels on suppose : a. ils sont distincts; b. aucun d'entre eux n'est contenu dans un autre ensemble de la réunion. Nous appellerons alors point ordinaire de η tout point m qui n'appartient qu'à un A_i et est point ordinaire sur cet A_i . Nous dirons que les A_i (irréductibles dans G) sont séparés s'ils satisfont aux conditions a et b.

PROPOSITION 7. — L'ensemble des points non ordinaires d'une réunion finie d'ensembles analytiques irréductibles dans D , de dimension complexe p au plus est contenu dans un ensemble analytique de dimension complexe $p - 1$ au plus dans D .

Écrivons en effet

$$(33) \quad \eta = \sum_{i,k} A_i^k \quad (k = 0, 1, \dots, p; i = 1, \dots, i = i_k)$$

les A_i^k étant des ensembles irréductibles dans D , de dimension (homogène) k . A l'ensemble A_i^p associons l'ensemble A_{ij}^{p-1} des points non ordinaires de A_i^p : c'est un ensemble analytique dans D de dimension au plus $p-1$. Considérons d'autre part l'intersection de deux composantes de (33), A_i^p, A_j^p , de même dimension : elle est un ensemble analytique A_{ij}^{p-1} de dimension complexe ^(*) $p-1$ au plus. Ainsi l'ensemble η' des points non ordinaires de η satisfait à

$$\eta' \subset \sum_{i,s} A_i^s + \sum_{i,j} A_{ij}^{p-1} + \sum_i A_i^{p-1},$$

la première somme au second membre étant relative aux valeurs $0 \leq s \leq p-1$ de l'indice ; l'énoncé est donc établi.

Nous démontrerons maintenant :

THÉORÈME 6. — Soit η un ensemble analytique dans D , de dimension maxima $d \leq p-1$ ($p \geq 1$) ; soit $\Omega = D - \eta$ et soit $t \in \mathcal{O}^0(\Omega)$ un courant continu d'ordre nul, défini et fermé dans Ω . Si à tout domaine G d'adhérence compacte dans D il correspond un nombre fini $k(G)$ tel que pour toute boule $B \subset G$, on ait

$$(34) \quad \|t\|_B < k(G) r^{2p-1+\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

alors la simple extension \tilde{t}_0 de t existe dans D et est un courant fermé.

En effet l'énoncé est vrai pour $d=0$; η est alors formé de points isolés sur G ; soit m_0 l'un d'entre eux, G_1 une boule de centre m_0 , de rayon r_0 assez petit pour ne pas contenir d'autre point de η et être contenue dans G . Alors la norme $\|t\|_{G_1}^c$ de t dans l'ouvert constitué des points de G_1 pour lesquels la distance δ à m_0 vérifie $0 < \delta < r < r_0$, satisfait à $\|t\|_{G_1}^c \leq k(G) r^{1+\lambda}$ et l'énoncé actuel découle du théorème 3, appliqué pour $s=0$, $\gamma=1+\lambda$.

Procédons alors par récurrence en montrant que si le théorème 6 est vrai pour $d=k-1$, il est vrai pour $d=k (\leq p-1)$.

Soit m_0 un point ordinaire de η où η est de dimension maxima $d=k$. Soit U_0 un domaine contenant m_0 , choisi de manière qu'il existe un isomorphisme analytique $\zeta = \mu(z)$ tel que $\mu[\eta \cap U_0] \subset \mu[U_0] \cap C_\xi^k$, où C_ξ^k est le sous-espace complexe $\zeta_{k+1}=0, \dots, \zeta_n=0$, μ amenant m_0 à l'origine de C_ξ^n . Si g est un domaine contenant m_0 , compact dans U_0 , il existe deux nombres positifs finis, $0 < a < b$, tels que le rapport de la distance des images $\zeta^{(1)} = \mu(z^{(1)})$,

(*) Cf. [8], p. 416.

$\zeta^{(2)} = \mu(z^{(2)})$ à la distance $|z^{(1)} - z^{(2)}|$ demeure compris entre a et b pour $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ pris dans g . Alors $t' = \mu t$ étant l'image du courant t dans $g' = \mu(g)$, on a $t'(\psi) = t(\mu^* \psi)$. Pour $\psi \in \mathcal{O}(g')$ on a par un calcul facile en supposant $b > 1$:

$$\|\mu^* \psi\| \leq [b^n n!]^2 \|\psi\| = L \|\psi\|;$$

$\mu^* \psi$ appartient à $\mathcal{O}(g)$. De plus les points d'une boule de rayon r' dans g' proviennent d'une boule de rayon $r \leq r' a^{-1}$.

Finalement l'image t' donnée par μ du courant t est un courant défini dans $g' - C_\zeta^k$, ($k \leq p - 1$), fermé, continu d'ordre nul et à tout domaine Γ d'adhérence compacte dans g' , correspond $k(\Gamma)$ fini, tel qu'on ait

$$\|t'\|_{B'} \leq k(\Gamma) r'^{2p-1+\lambda}.$$

pour toute boule $B' \subset \Gamma$, r' étant le rayon de B' . Le théorème 3 (appliqué ici pour les valeurs $\gamma = 2p - 1 + \lambda$ et $s = 2k \leq 2p - 2$) montre alors que t' a une extension simple à g' et que cette extension est un courant fermé de même norme que t' dans g' . Revenant à t par l'image μ^{-1} , on voit que t se prolonge par extension simple en un courant fermé en tout point ordinaire de η , où η est de dimension k . L'extension simple \tilde{t}_0 de t est donc connue et a même norme que t dans $D - \eta'$, où η' est l'ensemble des points non ordinaires des A_i^k de la décomposition (33), augmenté des A_j^q pour lesquels on a $q \leq k - 1$; η' appartient à une réunion finie d'ensembles analytiques dans D de dimension au plus $k - 1$, et est une somme finie d'ensembles analytiques irréductibles, de dimension au plus $k - 1$ sur tout domaine d'adhérence compacte dans D . D'autre part les extensions simples successives n'augmentent pas la norme du courant, ceci d'après la proposition 2. La propriété à démontrer, supposée établie pour $d = k - 1$, est donc encore vraie pour $d = k (\leq p - 1)$, ce qui établit l'énoncé par récurrence.

Nous donnerons alors la définition :

DÉFINITION. — Soit A un ensemble analytique de dimension complexe homogène p , défini dans un domaine D . On appellera intégration sur A , d'une forme $\varphi \in \mathcal{O}^0(D)$, le courant positif, fermé, homogène de dimension complexe p , qui est l'extension simple du courant

$$(35) \quad t_0(\varphi) = \int_{A^*} \varphi$$

défini dans $\Omega = D - (A - A^*)$.

THÉORÈME 7 (théorème d'existence). — Le courant (35) a une extension simple qui est un courant positif, homogène de dimension complexe p et fermé.

En effet le théorème 6 s'applique ici car $E = A - A^*$ est un ensemble

analytique dans D de dimension $d \leq p - 1$, et l'on a établi pour $t_0(\varphi)$ la propriété (34), λ ayant la valeur 1. De plus l'extension simple d'un courant positif est évidemment un courant positif de même dimension.

REMARQUE. — Si deux courants t et t' continus d'ordre nul, coïncident dans $D - \eta$, η étant une réunion d'ensembles analytiques de dimension maxima $d \leq p - 1$, et si t et t' satisfont à (34), leurs extensions simples coïncident. On obtient donc, comme conséquence de la proposition 6 :

THÉORÈME 8. — Soit $A = \sum_i A_i$ un ensemble analytique dans D de dimension homogène p , décomposé en somme d'ensembles analytiques irréductibles (et séparés) dans D . Alors le courant d'intégration t sur A est la somme des courants t_i d'intégration relatifs aux A_i .

9. Cas général. — Soit A un ensemble analytique de dimension maxima p dans D . Nous désignerons par A^s l'ensemble des points ordinaires de A où la dimension de A est s .

DÉFINITION. — On appelle courant d'intégration de la dimension (complexe) s ($1 \leq s \leq p$), sur A l'extension simple $\tilde{t}^{(s)}$ du courant

$$(36) \quad t^{(s)}(\varphi) = \int_{A^s} \varphi.$$

où φ est pris dans $\mathcal{O}^0(\Omega)$, avec $\Omega = D - (\overline{A^s} A^s)$, $\overline{A^s}$ étant l'ensemble des points non ordinaires de A adhérents à A^s .

THÉORÈME 9 (théorème d'existence). — Soit

$$(37) \quad A = \sum_i A_i^q \quad (i = 1, 2, \dots, i_q, 0 \leq q \leq p)$$

la décomposition de A en ensembles irréductibles dans un domaine G d'adhérence compacte dans D ; nous supposons les éléments de la décomposition (37) séparés : ils sont distincts et un élément n'est pas contenu dans un autre élément. Alors $\tilde{t}^{(s)}(\varphi)$ existe et est dans G égal à la somme des courants d'intégration $\tilde{t}_i^{(s)}$ sur les A_i^q de la décomposition (37) qui sont de dimension $q = s$.

Soit en effet m_0 un point non ordinaire de A , limite de points de A^s : il appartient à un A_i^s de (37) et alors, ou bien il appartient à l'ensemble $A_i^{(s-1)}$ des points non ordinaires de A_i^s , ou bien il appartient à l'intersection $A_i^s \cap A_j^q$ de deux éléments de la décomposition (37). Mais $A_i^s \cap A_j^q$ est un ensemble analytique de dimension $s - 1$ au plus. Un point non ordinaire de A , limite

de points de A^{**} appartient ainsi dans G , à un ensemble analytique η dans G , de dimension $s - 1$ au plus.

Les courants $t^{(s)}(\varphi)$ définis par (36) d'une part et la somme $\sum_i t_i^{(s)}$ des courants d'intégration sur les A_i^s d'autre part coïncident dans $G - \eta$ et vérifient les hypothèses du théorème 6 pour $\lambda = 1$, $p = s$. D'après la remarque faite plus haut leurs extensions simples coïncident dans D , ce qui établit l'énoncé.

On peut encore énoncer pour des ensembles de dimension non homogène :

DÉFINITION. — On appellera courant d'intégration sur un ensemble analytique A défini dans D l'extension simple \tilde{t} du courant

$$t(\varphi) = \int_{A^*} \varphi$$

qui est l'intégration sur les points ordinaires de A .

THÉOREME 10 (théorème d'existence). — Le courant $\tilde{t}(\varphi)$ existe, est fermé et est la somme

$$(38) \quad \tilde{t}(\varphi) = \sum_{s=1}^{s=p} \tilde{t}^{(s)}(\varphi)$$

de courants positifs fermés $\tilde{t}^{(s)}$ de dimension complexe s , ($1 \leq s \leq p$), p étant la dimension complexe maxima de A .

En effet on a

$$\int_{A^*} \varphi = \sum_s \int_{A^{**}} \varphi = \sum_s t^{(s)}(\varphi)$$

et l'on sait que chacun des termes $t^{(s)}$ a une extension simple $\tilde{t}^{(s)}$ qui est un courant positif fermé.

10. Applications. — Pour obtenir des propriétés métriques d'un ensemble analytique complexe A à partir des énoncés précédents, nous considérerons les formes différentielles

$$(39) \quad \beta_1 = \frac{i}{2} \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_j = \frac{i}{2} d_z d_{\bar{z}} \left[\sum_j z_j \bar{z}_j \right],$$

$$(40) \quad \alpha = \frac{i}{2} d_z d_{\bar{z}} \log \left[\sum_j z_j \bar{z}_j \right],$$

où d_z , $d_{\bar{z}}$ sont les différentiations extérieures par rapport aux z_j (respectivement aux \bar{z}_j) seuls ; α et β_1 sont des formes positives comme on le vérifie

aisément; pour α cela résulte aussi du fait que $\log \left[\sum_j z_j \bar{z}_j \right]$ est une fonction plurisousharmonique (cf. [4]). Le produit d'un courant $t \in \Theta_p^+$ par une forme $\varphi \in \Theta_1^+$ est un courant de Θ_{p+1}^+ (cf. [7]). Il en résulte que les puissances β_1^p , α^p sont des formes positives; $\beta_p = \frac{1}{p!} \beta_1^p$ n'est autre que l'élément de volume $d\tau_{2,p}$ sur une variété complexe de dimension complexe p .

Nous démontrerons alors :

THÉOREME 11. — *Si t est un courant positif fermé dans un domaine D , et de degré $(n - p)$, la mesure positive*

$$d\sigma = t \wedge \beta_p$$

possède de la propriété suivante : si $\sigma(R)$ est la mesure contenue dans une boule $B(O, R)$, de centre l'origine de rayon R , intérieure à D , le quotient $R^{-2p} \sigma(R)$ est fonction croissante de R .

La mesure positive

$$d\nu = \pi^{-p} t \wedge \alpha^p$$

définie dans l'ouvert $B^(O, R)$ obtenu à partir de la boule $B(O, R)$ par suppression du centre O , a une norme finie dans $B^*(O, R)$.*

En effet supposons d'abord t égal à une forme : puisqu'on a $dt = 0$ dans $B(O, R)$, il existe une forme θ telle que

$$t = d\theta.$$

Soient $0 < r_1 < r_2 < R$ et $B_2 = B(O, r_2)$, $B_1 = B(O, r_1)$ les deux boules de centre O , de rayons r_1 et r_2 . On a

$$\begin{aligned} \nu_{r_2}^{r_1} &= \int_{B_2 - B_1} d\nu = \pi^{-p} \int_{B_2 - B_1} d\theta \wedge \alpha^p \\ &= \pi^{-p} \int_{B_2 - B_1} d(\theta \wedge \alpha^p) = \pi^{-p} \left[\int_{B_2'} \theta \wedge \alpha^p - \int_{B_1'} \theta \wedge \alpha^p \right], \end{aligned}$$

en appelant B_2' , B_1' les frontières de B_2 et B_1 . Or on a en calculant α^p :

$$\alpha^p = \left[\sum_j z_j \bar{z}_j \right]^{-p} \beta_1^p - p \left[\sum_j z_j \bar{z}_j \right]^{-p-1} \beta_1^{p-1} \wedge \sum_i \bar{z}_i dz_i \wedge \sum_j z_j d\bar{z}_j.$$

Sur B_2' et B_1' , $\sum_j z_j \bar{z}_j$ est constant et l'on a

$$\sum_i \bar{z}_i dz_i \wedge \sum_j z_j d\bar{z}_j = 0.$$

On en déduit sur B'_1 :

$$\alpha^p = r_1^{-2p} \beta_1''.$$

D'où

$$\nu_{r_1}^{r_2} = \pi^{-p} \left[\int_{B'_1} \theta \wedge r_2^{-2p} \beta_1'' - \int_{B'_1} \theta \wedge r_1^{-2p} \beta_1'' \right].$$

D'autre part, on a

$$\sigma(r_2) = \int_{B_2} d\sigma = \frac{1}{p!} \int_{B'_1} \theta \wedge \beta_1''.$$

On a donc

$$(41) \quad \nu_{r_1}^{r_2} = p! \pi^{-p} \left[\frac{\sigma(r_2)}{r_2^{2p}} - \frac{\sigma(r_1)}{r_1^{2p}} \right] \geq 0,$$

ce qui établit la première partie du théorème 11. De plus si laissant r_2 fixe, on fait tendre r_1 vers zéro, $\nu_{r_1}^{r_2}$ croît et est borné, donc $\nu_{r_1}^{r_2}$ a une limite, ce qui établit la seconde partie. On a alors dans une boule B^* , de rayon R , pointée au centre o :

$$(42) \quad \nu_o^R = \int_{B^*} d\nu = \tau_{2p}^{-1}(1) \frac{\sigma(R)}{R^{2p}},$$

où $\tau_{2p}(1)$ est la mesure de la boule unité à $2p$ dimensions.

Si maintenant t est un courant positif qui n'est pas représenté par une forme, on procédera en approchant t par son produit de composition avec une suite de noyaux dérivables positifs. On obtient un courant positif fermé pour lequel (41) est établi : l'énoncé en résultat en passant à la limite, au sens de la convergence faible, pour les suites de mesures σ et ν obtenues.

L'application du théorème 11 aux ensembles analytiques complexes donne alors.

COROLLAIRE 3. — Soit A un ensemble analytique complexe dans D : les mesures $d\sigma_s = t^{(s)} \wedge \beta_s$ définissent les aires (à s dimensions complexes) de A , finies sur tout compact de D . Si l'on considère des boules concentriques $B(r)$ de rayon r , et si l'on pose

$$\sigma(R) = \int_{B(R)} d\sigma_s$$

le rapport $\frac{\sigma(R)}{R^{2s}}$ est une fonction croissante de R .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. CARTAN, *Séminaire Éc. Norm. Sup.*, t. 6, 1953-1954.
- [2] G. DE RHAM, *Variétés différentiables* (*Actualités scientifiques*, n° 1222, 1955, Hermann, Paris).
- [3] P. LELONG, *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 67, 1950, p. 393-419).
- [4] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles, 1953, p. 22-40).
- [5] P. LELONG, *Sur les dérivées d'une fonction plurisousharmonique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2276-2278).
- [6] P. LELONG, *Integration of a differential form on an analytic subvariety* (*Proc. nat. Acad. Sc.*, t. 43, 1957, p. 246-248).
- [7] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, à paraître prochainement).
- [8] R. REMMERT, *Projektionen analytischer Mengen* (*Math. Ann.* t. 130, 1956, p. 410-441).
- [9] R. REMMERT et K. STEIN, *Ueber die wesentlichen singularitäten analytischer Mengen* (*Math. Ann.*, t. 126, 1953, p. 263-305).
- [10] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I (1950), t. II (1951), Hermann, Paris,

Manuscrit reçu le 5 mai 1957.

