

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE KAHANE

Généralisation d'un théorème de S. Bernstein

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 221-229

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__221_0

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE S. BERNSTEIN ;

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE.

S. Bernstein a démontré le théorème suivant ⁽¹⁾ : *Pour qu'une fonction 2π -périodique f soit somme d'une série trigonométrique absolument convergente $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi}$, il suffit que f satisfasse une condition de Lipschitz*

d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$; inversement, pour tout $\alpha \leq \frac{1}{2}$, il existe des fonctions lipschitziennes d'ordre α qui ne sont pas sommes de séries trigonométriques absolument convergentes. Le même énoncé vaut en remplaçant « f 2π -périodique » par « f définie sur un segment de longueur $< 2\pi$ ».

Le problème qui nous intéresse est celui-ci : E étant un ensemble fermé sur $[0, 2\pi]$, indiquer une condition suffisante, généralisant celle de S. Bernstein, pour qu'une fonction f , définie sur E , y soit représentable comme somme de série trigonométrique absolument convergente. On peut espérer que la condition est d'autant moins restrictive que E est plus clairsemé (dans un sens à préciser). On sait d'ailleurs que pour certains ensembles très clairsemés et jouissant de propriétés arithmétiques remarquables, aucune autre condition pour f n'est requise que la continuité sur E ⁽²⁾.

Notations :

A , classes des fonctions 2π -périodiques (à valeurs complexes) sommes de séries trigonométriques absolument convergentes ;

$A(E)$, classes des fonctions définies sur E , prolongeables en fonctions de la classe A ;

⁽¹⁾ Cf., par exemple, ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, chap. V.

⁽²⁾ Cf. L. CARLESON, *Acta Mathematica*, t. 87, 1952, p. 325-345 ; H. HELSON, *Studia Mathematica*, t. 14, 1954, p. 209-213 ; J.-P. KAHANE et R. SALEM, *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 1185-1187 et 1706-1708.

$\text{Lip } \alpha(E)$, classe des fonctions définies sur E , telles que

$$|f(x') - f(x)| < K |x' - x|^\alpha$$

quand x et x' appartiennent à E , K ne dépendant pas de x et x' ; E_h , réunion des segments de longueurs $2h$ dont les centres appartiennent à E ; $\mu = \mu(E)$, borne inférieure des ν pour lesquels $\text{mes. } E_h = O(h^{1-\nu})$ quand $h \rightarrow 0$.

Le problème posé admet la réponse suivante :

THÉOREME I. — On a $\text{Lip } \alpha(E) \subset A(E)$ dès que $\alpha > \frac{\mu}{2}$.

Pour illustrer ce résultat et montrer qu'en un certain sens on ne peut l'améliorer, nous considérons deux exemples.

Exemple 1. — E est l'ensemble parfait symétrique, construit sur $[0, 1]$, associé à la suite $\{\xi_p\}$ $\left(0 < \xi_p < \frac{1}{2}; p = 1, 2, \dots\right)$. Rappelons que E est l'intersection des ensembles fermés emboîtés E_p ainsi définis : $E_0 = [0, 1]$, et l'on passe de E_{p-1} à E_p en remplaçant chaque partie connexe $[g, d]$ de E_{p-1} par les deux segments $[g, g + \xi_p(d - g)]$ et $[d - \xi_p(d - g), d]$; ainsi E_p est réunion de 2^p segments de longueur $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_p$.

Exemple 2. — E est un ensemble dénombrable ayant 0 pour seul point d'accumulation, ainsi défini : on donne la suite positive $\{\lambda_n\}$, telle que $\lambda_0 = 1$ et $2\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ ($n = 0, 1, \dots$) et la suite d'entiers positifs $\{k_n\}$ tels que $k_n \lambda_n < \lambda_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$); E est l'ensemble des points $j\lambda_n$ ($j = 1, 2, \dots, k_n$ et $n = 1, 2, \dots$).

COMPLÉMENT AU THÉOREME I. — Dans l'exemple 1,

$$\mu = -\frac{\log 2}{\log \bar{\xi}}, \quad \text{avec } \bar{\xi} = \lim_{p \rightarrow \infty} (\xi_1 \dots \xi_p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans l'exemple 2,

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log k_n}{-\log \lambda_n}.$$

Remarquons que, dans l'exemple 1, si la suite ξ_p est constante, μ est la dimension de Hausdorff de E . Il est facile de voir que, quel que soit E , μ est au moins égal à la dimension de Hausdorff de E .

THÉOREME II. — Dans l'exemple 1 (avec l'hypothèse $\lim \bar{\xi}_p < \frac{1}{2}$) et dans l'exemple 2, on peut construire sur E une fonction n'appartenant pas à $A(E)$, mais appartenant à $\text{Lip } \alpha(E)$ pour tout $\alpha < \frac{\mu}{2}$.

La démonstration du théorème II s'appuie sur le lemme suivant, qui est intéressant pour d'autres applications.

LEMME. — On considère les polynômes trigonométriques à p variables

$$P = P_t(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum r_m \varphi_m(t) e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p)}$$

dont le « degré » $\sup(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_p|)$ n'excède pas s ; on donne les amplitudes $r_m \geq 0$; $\varphi_m(t)$ désigne la $m^{\text{ième}}$ fonction de Rademacher ($0 \leq t \leq 1$; $\varphi_m(t) = \pm 1$); m est un nombre entier fonction biunivoque de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$. Alors, pour un ensemble de valeurs de t de mesure positive, on a

$$\max_{x_1, \dots, x_p} |P| < A \left(\sum r_m^2 p \log(s+1) \right)^{\frac{1}{2}},$$

A étant une constante absolue.

Ce lemme généralise un résultat de Salem et Zygmund, relatif au cas $p=1$ ⁽³⁾.

DÉMONSTRATIONS.

1. **Démonstration du théorème I.** — Soit $f \in \text{Lip } \alpha(E)$. Considérons la fonction 2π -périodique g , continue, égale à f sur E et linéaire sur les intervalles contigus à E . Montrons que $g \in \text{Lip } \alpha$. En effet, si x et x' appartiennent à E , on a $|g(x') - g(x)| < K|x' - x|^\alpha$. Si x et x' appartiennent au même segment $[y, y']$ contigu à E , on a

$$\begin{aligned} |g(x') - g(x)| &= |g(y') - g(y)| \left| \frac{x' - x}{y' - y} \right| \\ &< K|y' - y|^\alpha \left| \frac{x' - x}{y' - y} \right| < K|x' - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Et sinon, on écrit

$$g(x') - g(x) = g(x') - g(z') + g(z') - g(z) + g(z) - g(x),$$

z et z' étant respectivement sur $[x, x']$ les points de E les plus rapprochés de x et x' ; en majorant chaque différence on obtient

$$|g(x') - g(x)| < 3K|x' - x|^\alpha.$$

On reprend maintenant, en la modifiant à peine, la démonstration classique

⁽³⁾ Cf. SALEM et ZYGMUND, *Acta Mathematica*, t. 91, 1954, p. 265 et suiv.

du théorème de S. Bernstein ⁽¹⁾, en posant

$$g \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

$$\varphi_h(x) = g(x+h) + g(x-h) - 2g(x) \sim 4 \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \sin^2 nh e^{inx},$$

$$X(h) = \int_0^{2\pi} |\varphi_h(x)|^2 dx = 32\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \sin^4 nh.$$

Or

$$X(h) = \int_{E_{2h}} |\varphi_h(x)|^2 dx < K' h^{2\alpha} \text{mes. } E_{2h} < K'' h^{1-\nu+2\alpha} \quad \text{pour } \nu > \mu(E).$$

D'autre part,

$$\sum_{N < |n| \leq 2N} |c_n| < (2N)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{N < |n| \leq 2N} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < (2N)^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)^{-2} \left(X \left(\frac{\pi}{3N} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\sum_{N < |n| \leq 2N} |c_n| < K''' N^{\nu-2\alpha}.$$

En prenant $N = 2^j$, et en faisant la somme pour toutes les valeurs de j , on voit que la condition $\nu - 2\alpha < 0$, garantie pour un ν convenable dès que $\alpha > \frac{\mu}{2}$, entraîne que $g \in A$, donc $f \in A(E)$.

2. Démonstration du complément du théorème I.

Exemple 1. — Soit $\xi_1 \dots \xi_p \leq h < \xi_1 \dots \xi_{p-1}$. On vérifie facilement (en faisant la figure) que

$$2^{p-1} h < \text{mes. } E_h < 3 \cdot 2^p h.$$

Donc

$$\nu > \mu \Leftrightarrow 2^p h^\nu = O(1) \Leftrightarrow 2^p (\xi_1 \dots \xi_p)^\nu = O(1) \Leftrightarrow p(\log 2 + \nu \log \xi) < O(1),$$

d'où

$$\mu = -\frac{\log 2}{\log \xi}.$$

Exemple 2. — Si $\lambda_n \leq h < \lambda_{n-1}$, on a

$$\text{mes. } E_h = k_n \lambda_n + (\theta + k_{n-1} + \dots + k_1) h, \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Comme $\text{mes. } E_h - \theta h$ est une fonction linéaire de h sur les intervalles

$[\lambda_n, \lambda_{n-1}]$, on a

$$\text{mes. } E_h = O(h^{1-\nu}) \Leftrightarrow \text{mes. } E_{\lambda_n} = O(\lambda_n^{1-\nu}),$$

donc

$$\nu > \mu \Leftrightarrow k_n \lambda_n^\nu = O(1), \quad \text{soit} \quad \mu = \overline{\lim} \frac{\log k_n}{-\log \lambda_n}.$$

3. Démonstration du théorème II.

Exemple 1. — Posons $r_p = \xi_1 \dots \xi_{p-1} (1 - \xi_p)$. Les extrémités gauches g_m des 2^p segments constituant E_p s'écrivent

$$g_m = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_p r_p,$$

les ε_j prenant les valeurs 0 et 1. Admettons le lemme; on peut déterminer les coefficients $\varphi_m = \pm 1$ de façon que

$$\max_t \left| \sum \varphi_m e^{i g_m t} \right| < A \sqrt{2^p p \log p}.$$

Remarquons que les g_m , de même que les extrémités droites

$$d_m = g_m + \xi_1 \xi_2 \dots \xi_p,$$

appartiennent à E . Pour avoir $f \in A(E)$, c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i n x} \quad \text{sur } E, \quad \text{avec} \quad \sum |a_n| < \infty,$$

il est nécessaire que

$$\left| \sum \varphi_m f(g_m) \right| < A \sum |a_n| \sqrt{2^p p \log p}$$

et, de même,

$$\left| \sum \varphi_m f(d_m) \right| < A \sum |a_n| \sqrt{2^p p \log p},$$

d'où

$$(1) \quad \sum \varphi_m [f(d_m) - f(g_m)] = o \sqrt{2^p p \log p} \quad \text{quand } p \rightarrow \infty.$$

Choisissons une suite de valeurs p_i telle que $(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{p_i})^{\frac{1}{p_i}}$ tende vers ξ , et construisons f comme limite d'une suite de fonctions f_i , chaque f_i étant définie sur E_{p_i} et linéaire sur les segments constituant E_{p_i} . Pour passer de f_{i-1} à f_i , nous posons $f_i = f_{i-1}$ sur la frontière de $E_{p_{i-1}}$ et

$$(2) \quad f_i(d_m) - f_i(g_m) = p_i 2^{-\frac{p_i}{2}} \varphi_m,$$

g_m , d_m et φ_m ayant la signification de l'alinéa ci-dessus, pour $p = p_i$. En fixant arbitrairement f_0 , chaque f_i est bien déterminée; de plus, sur la frontière de E_{p_i} , on a

$$f_i = f_{i+1} = \dots = f.$$

D'après (2), on a donc

$$\sum \varphi_m [f(d_m) - f(g_m)] = p_i 2^{\frac{p_i}{2}},$$

ce qui contredit (1); donc $f \notin A(E)$.

Moyennant la condition $\xi_p < \theta < \frac{1}{2}$, et l'hypothèse $\alpha < -\frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log \xi}$, montrons que les f_i satisfont à une condition de Lipschitz uniforme

$$(3) \quad |f_i(x') - f_i(x)| < K_i |x - x'|^\alpha,$$

les constantes K_i étant bornées. Choisissons i_0 assez grand pour que $i > i_0$ entraîne $(\xi_i \dots \xi_{p_i})^\alpha > p_i^2 2^{-\frac{p_i}{2}}$ (c'est possible d'après les hypothèses faites sur les p_i et sur α); dans la suite on suppose $i > i_0 + 1$. Pour majorer le premier membre de (3), supposons d'abord x et x' sur un même segment $[g_m, d_m]$ de E_{p_i} : alors d'après (2)

$$\begin{aligned} |f_i(x') - f_i(x)| &< \frac{|x' - x|}{d_m - g_m} p_i 2^{-\frac{p_i}{2}} \\ &< p_i^{-2} |x' - x| (\xi_1 \dots \xi_p)^{\alpha-1} < p_i^{-2} |x' - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Supposons maintenant x et x' sur un même segment de $E_{p_{i-1}}$, mais non sur un même segment de E_{p_i} ; désignons par y et y' respectivement les points de la frontière de $E_{p_{i-1}}$ les plus rapprochés de x et x' ; alors

$$\begin{aligned} |f_i(x') - f_i(y')| &< p_i^{-2} |x' - y'|^\alpha, \\ |f_i(y') - f_i(y)| &= |f_{i-1}(y') - f_{i-1}(y)| < p_{i-1}^{-2} |y' - y|^\alpha, \\ |f_i(y) - f_i(x)| &< p_i^{-2} |y - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Or, la condition $\xi_p < \theta < \frac{1}{2}$ entraîne

$$|y' - y| \leq \frac{|x' - x|}{1 - 2\theta}, \quad |y - x| \quad \text{et} \quad |x' - y'| \leq \frac{\theta |x' - x|}{1 - 2\theta},$$

d'où

$$|f_i(x') - f_i(x)| < K(\theta) p_{i-1}^{-2} |x' - x|^\alpha.$$

Supposons enfin que le segment $[x, x']$ contienne des points frontières de $E_{p_{i-1}}$; soient respectivement z et z' les points frontières de $E_{p_{i-1}}$ les plus rapprochés de x et x' sur $[x, x']$ alors

$$\begin{aligned} |f_i(z') - f_i(z)| &= |f_{i-1}(z') - f_{i-1}(z)| < K_{i-1} |z' - z|^\alpha < K_{i-1} |x' - x|^\alpha, \\ |f_i(x') - f_i(z')| \quad \text{et} \quad |f_i(z) - f_i(x)| &< K(\theta) p_{i-1}^{-2} |x' - x|^\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$|f_i(x') - f_i(x)| < K_i |x' - x|^{\alpha}$$

dans tous les cas, avec

$$K_i = K_{i-1} + 2K(\theta)p_{i-1}^{-2}.$$

L'inégalité (3) est bien vérifiée avec $\overline{\lim} K_i = K < \infty$. Donc, en tous les points x et x' frontières pour un E_p , on a

$$|f(x') - f(x)| < K |x' - x|^{\alpha}$$

et comme ces points sont denses sur E , on a bien $f \in \text{Lip } \alpha(E)$.

Exemple 2. — Appliquons le lemme pour $p = 1$; on peut déterminer les coefficients $\varphi_j = \pm 1$ de façon que

$$\max_i \left| \sum_{j=1}^{k_n} \varphi_j e^{ijt} \right| < A \sqrt{k_n \log k_n}.$$

Pour avoir $f \in A(E)$, il est donc nécessaire que

$$\sum_{j=1}^{k_n} \varphi_j f(j\lambda_n) = O(\sqrt{k_n \log k_n}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Choisissons une suite de valeurs n_i telle que $\frac{\log k_{n_i}}{-\log \lambda_{n_i}}$ tende vers μ , avec $n_{i+1} \geq n_i + 2$. Posons

$$f(j\lambda_n) = 0 \quad (j = 1, \dots, k_n)$$

chaque fois que n n'appartient pas à la suite $\{n_i\}$, et

$$f(j\lambda_{n_i}) = \varphi_j k_{n_i}^{-\frac{1}{2}} \log k_{n_i} \quad (j = 1, \dots, k_{n_i}),$$

φ_j ayant la signification donnée ci-dessus pour $n = n_i$. Alors $f \notin A(E)$.

D'autre part, si $\alpha > \frac{\mu}{2}$, on peut choisir i assez grand pour que

$$k_{n_i}^{-\frac{1}{2}} \log k_{n_i} < \lambda_{n_i}^{\alpha},$$

d'où, immédiatement,

$$f \in \text{Lip } \alpha(E).$$

4. Démonstration du lemme. — Nous reprenons la méthode de Salem et Zygmund⁽³⁾. Posons

$$P_1 = \text{partie réelle de } P = \sum X_m \varphi_m(t) \quad \text{et} \quad R = \sum r_m^2.$$

D'après l'indépendance des $\varphi_m(t)$, et le fait que $\text{Ch } X < e^{\frac{X^2}{2}}$, on a

$$\int_0^1 e^{\lambda P_1} dt = \prod_m \int_0^1 e^{\lambda X_m \varphi_m(t)} dt = \prod \text{Ch}(\lambda X_m) < e^{\frac{1}{2} \lambda^2 R},$$

d'où

$$(4) \quad \int_0^1 e^{\lambda |P_1|} dt < \int_0^1 e^{\lambda P_1} dt + \int_0^1 e^{-\lambda P_1} dt < 2 e^{\frac{1}{2} \lambda^2 R}.$$

Posons

$$M_1 = \max_{x_1, \dots, x_p} |P_1| = \varepsilon P_1(x_1^0, \dots, x_p^0) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

On a

$$P_1(x_1, \dots, x_p) - \varepsilon M_1 = (x_1 - x_1^0) \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \dots + (x_p - x_p^0) \frac{\partial P_1}{\partial x_p},$$

les dérivées partielles étant prises en un point convenable entre (x_1^0, \dots, x_p^0) et (x_1, \dots, x_p) . Or

$$\varepsilon_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \dots + \varepsilon_p \frac{\partial P_1}{\partial x_p} \quad (\varepsilon_j = \pm 1)$$

est la dérivée de $P_1(\varepsilon_1 u, \dots, \varepsilon_p u)$ qui est un polynôme trigonométrique en u de degré $\leq s$; d'après un théorème bien connu de S. Bernstein, cette dérivée n'excède pas $M_1 s$ en module. Donc

$$|P_1 - \varepsilon M_1| < \theta M_1 \quad \text{pour} \quad |x_j - x_j^0| < \frac{\theta}{s} \quad (j = 1, 2, \dots, p; 0 < \theta < 1).$$

Ainsi $|P_1| > M_1(1 - \theta)$ dans un hypercube \mathcal{H} de volume $\left(\frac{2\theta}{s}\right)^p$, et

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\theta}{s}\right)^p \int_0^1 e^{\lambda M_1(1-\theta)} dt &< \int_0^1 \int \dots \int_{\mathcal{H}} e^{\lambda |P_1|} dx_1 \dots dx_p dt \\ &< (2\pi)^p \sup_{x_1, \dots, x_p} \int_0^1 e^{\lambda |P_1|} dt. \end{aligned}$$

En utilisant (4), on obtient

$$\int_0^1 \exp\left(\lambda M_1(1-\theta) - p \log \frac{\pi s}{\theta} - \frac{\lambda^2 R}{2} - \xi\right) dt < 2 e^{-\xi}.$$

Donc sur un ensemble en t de mesure supérieure à $1 - 2e^{-\xi}$, on a

$$M_1(1-\theta) < \frac{1}{\lambda} \left(p \log \frac{\pi s}{\theta} + \xi\right) + \frac{\lambda R}{2},$$

d'où, par un choix convenable de λ ,

$$M_1(1-\theta) < \sqrt{2} \sqrt{R \left(p \log \frac{\pi s}{\theta} + \xi\right)}.$$

On obtiendrait le même résultat en remplaçant P_1 par la partie imaginaire de P , soit P_2 , et M_1 par $M_2 = \max |P_2|$. Comme

$$M \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (M_1 + M_2),$$

on a, sur un ensemble en t de mesure supérieure à $1 - 4e^{-\frac{\varepsilon}{2}}$,

$$M(1 - \theta) < 2 \sqrt{R \left(p \log \frac{\pi s}{\theta} + \frac{\varepsilon}{2} \right)},$$

ce qui démontre le lemme.

Manuscrit reçu le 22 janvier 1957.

