BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE SAMUEL

La notion de place dans un anneau

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 123-133

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__123_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 123 à 133.

LA NOTION DE PLACE DANS UN ANNEAU;

PAR

P. SAMUEL

(Clermont-Ferrand).

1. Introduction. — La théorie des places dans un *corps* commutatif K repose, on le sait, sur le résultat fondamental suivant : étant donnés un sous-anneau A de K et une spécialisation f de A (c'est-à-dire un homomorphisme de A dans un corps), il existe dans la famille $\mathcal{F}$ des spécialisations de sous-anneaux B de K prolongeant f, une spécialisation maximale g, et le domaine de définition B de g est un *anneau de valuation* de K (c'est-à-dire que les relations $x \in K$ et $x \neq 0$ entraînent $x \in B$ ou $1/x \in B$); une telle spécialisation maximale est appelée une *place* de K; réciproquement, si B est un anneau de valuation de K, B admet un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$, et l'homomorphisme canonique de B sur $B/\mathfrak{m}$ est une spécialisation maximale. Ces faits, qui constituent ce qu'on appelle souvent le « théorème d'extension des spécialisations », ont été partiellement généralisés par M. N. BOURBAKI au cas des anneaux commutatifs quelconques, dans des travaux inédits dont il a eu l'amabilité de m'entretenir. La méthode de M. N. BOURBAKI consiste à étudier le prolongement de spécialisations à valeurs dans des corps projectifs (*cf.* [1]). J'essaie ici d'aborder la question par une autre méthode, basée sur les généralisations qu'on peut donner de la notion d'anneau de valuation.

Étant donnés un anneau commutatif quelconque R et un sous-anneau A de R, nous aurons à considérer les trois relations suivantes entre A et R :

(P_1) *Il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que, pour tout anneau B tel que $A \subset B \subset R$ et $A \neq B$ et tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, on ait $\mathfrak{q} \cap A \neq \mathfrak{p}$.*

(P_2) *Le complémentaire $S = R - A$ de A dans R est multiplicativement stable.*

(P_3) *Pour tout polynome $P(X_1, \ldots, X_n)$ de la forme*

$$X_1^{q(1)} \ldots X_n^{q(n)} + \sum_\lambda a_\lambda m_\lambda(X)$$

où les $m_\lambda(X)$ *sont des monomes dont le multidegré est* $< (q(1), \ldots, q(n))$ *(pour la relation d'ordre produit dans* Z^n*) et où* $a_\lambda \in A$, *et pour tout système* $(s_1, \ldots, s_n)$ *de* n *éléments de* $S = R - A$, *on a* $P(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.

Nous dirons qu'un sous-anneau A d'un anneau (commutatif) R est *de type* (P_i) (dans R) si la relation (P_i) est vérifiée. Un polynome P ayant la propriété décrite dans (P_3) sera appelé un polynome *dominé* à coefficients dans A; les polynomes dominés à une variable ne sont autres que les polynomes unitaires. La relation (P_1) exprime que A est le domaine de définition d'une spécialisation maximale, parmi les spécialisations définies sur des sous-anneaux de R.

Nous verrons que, dans le cas où R est un corps, les propriétés (P_1), (P_2) et (P_3) sont équivalentes, et expriment que A est un anneau de valuation de R. Dans le cas d'un anneau commutatif quelconque R, nous verrons que (P_1) implique (P_2) et (P_3), que (P_3) implique (P_2), mais qu'aucune autre implication n'est valable en général. Nous étudierons aussi ce que deviennent les propriétés (P_i) lorsqu'on remplace R par un sous-anneau, ou par un anneau contenant R. Nous montrerons enfin que la fermeture intégrale dans R d'un sous-anneau C de R est l'intersection des sous-anneaux de type (P_2) [resp. (P_3)] de R contenant C, mais que l'intersection des sous-anneaux de type (P_1) de R contenant C est en général strictement plus grande que la fermeture intégrale de C. De tout ceci il résulte que la notion d'anneau de type (P_3), malgré son apparente complication, est celle qui généralise le mieux la notion de sous-anneau de valuation d'un corps. Les anneaux de type (P_2) interviennent surtout comme intermédiaires dans les démonstrations.

2. Propriétés des anneaux de type (P_2) :

THÉORÈME 1. — *Soient* R *un anneau commutatif,* A *un sous-anneau de* R *tel que* $S = R - A$ *soit non vide et multiplicativement stable. Alors :*

a. L'ensemble des éléments a *de* A *pour lesquels il existe* $s \in S$ *tel que* $sa \in A$ *est un idéal premier* $\mathfrak{p}_1$ *de* A.

b. L'ensemble des éléments a *de* A *tels que* $sa \in A$ *pour tout* $s \in S$ *est un idéal premier* $\mathfrak{p}_0$ *de* A; *on a* $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{p}_0$ *est un idéal premier de* R.

c. L'ensemble $\mathfrak{n}$ *des éléments* x *de* R *pour lesquels il existe* $s \in S$ *tel que* $sx = 0$ *est à la fois un idéal de* R *et un idéal de* A, *et l'on a* $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}_1$.

d. L'anneau A *est intégralement fermé dans* R.

Démontrons a. Si a et a' sont deux éléments de A pour lesquels il existe s et s' dans S tels que $sa \in A$ et $s'a' \in A$, on ne peut avoir à la fois $sa' \in S$ et $s'a \in S$ car, sinon, on aurait $sas'a' = sa's'a \in S$ puisque S est multiplicativement stable, en contradiction avec $sas'a' \in A$; on a donc, par exemple, $sa' \in A$, d'où $s(a + a') \in A$, ce qui montre que $a \in \mathfrak{p}_1$ et $a' \in \mathfrak{p}_1$ impliquent $a + a' \in \mathfrak{p}_1$. D'autre part, $a \in \mathfrak{p}_1$ et $b \in A$ entraînent évidemment $ba \in \mathfrak{p}_1$;

donc $\mathfrak{p}_1$ est un idéal de A. Pour montrer qu'il est premier, considérons deux éléments a, b de A tels que $ab \in \mathfrak{p}_1$; il existe alors $s \in S$ tel que $sab \in A$; si $a \notin \mathfrak{p}_1$ on a $sa \notin A$, c'est-à-dire $sa = s' \in S$, d'où $b \in \mathfrak{p}_1$ puisque $s'b = sab \in A$.

Le fait que $\mathfrak{p}_0$ est un idéal de A est évident, et l'inclusion $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$ résulte de ce que S est non vide. Si $a \in \mathfrak{p}_0$ et si $s \in S$, on a $as \in A$ et $ass' \in A$ pour tout $s' \in S$ puisque $ss' \in S$; donc $as \in \mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{p}_0$ est un idéal de R. Pour montrer que $\mathfrak{p}_0$ est premier dans A, considérons deux éléments a, b de A tels que $ab \in \mathfrak{p}_0$ et que $a \notin \mathfrak{p}_0$; il existe alors $s \in S$ tel que $sa \notin A$; on a $sas'b = ss'ab \in A$ pour tout $s' \in S$, d'où $s'b \in$ A puisque $sa \in S$ et que S est multiplicativement stable; par conséquent $b \in \mathfrak{p}_0$. Enfin, pour montrer que $\mathfrak{p}_0$ est un idéal premier de R, remarquons qu'une relation $xy \in \mathfrak{p}_0 (x, y \in R)$ implique que x ou y est dans A puisque S est multiplicativement stable; on peut ainsi se borner aux relations $as \in \mathfrak{p}_0$ où $a \in A$ et $s \in S$; on a alors $ass' \in A$ pour tout $s' \in S$, d'où $as' \in A$ puisque S est multiplicativement stable, et par suite $a \in \mathfrak{p}_0$. Ceci démontre b.

Dans c le fait que $\mathfrak{n}$ est un idéal de R est classique et immédiat, en tenant compte du fait que S est multiplicativement stable. Il reste à montrer qu'on a $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}_1$; or, pour $x \in \mathfrak{n}$, il existe $s \in S$ tel que $sx = 0$, donc $sx \in A$; ceci implique $x \in A$ puisque S est multiplicativement stable, et $x \in \mathfrak{p}_1$ d'après la définition de $\mathfrak{p}_1$.

Montrons, pour terminer, qu'aucun élément s de S n'est entier sur A. Raisonnons par l'absurde et considérons une équation de dépendance intégrale $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 (a_i \in A,\ s \in S)$ de plus petit degré possible vérifiée par s sur A. On a

$$s(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_0 \in A,$$

d'où $s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \ldots + a_1 \in A$ puisque S est multiplicativement stable; ceci contredit le caractère minimal de n si l'on a $n \geqq 2$. Si $n = 1$, l'équation s'écrit $s + a_0 = 0$, d'où $s \in A$, ce qui est encore contradictoire.

C. Q. F. D.

Remarques. — 1° L'idéal $\mathfrak{p}_0$ est évidemment le conducteur de A dans R.

2° D'après c tout élément nilpotent de R est dans $\mathfrak{p}_0$.

Exemple. — Soient k un corps et $R = k[x, y]$, où x et y sont liés par la relation $xy = 0$. Tout élément de R s'écrit, d'une façon et d'une seule, sous la forme $a + xP(x) + yQ(y)$, où $a \in k$ et où P et Q sont des polynomes à une variable sur k. Le sous-anneau de polynomes $A = k[x]$ est de type (P_2). Les idéaux $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_0$ sont tous trois égaux à l'idéal maximal Ax.

Théorème 2. — *Soit R un corps. Les sous-anneaux de type (P_2) de R ne sont autres que les anneaux de valuation de R.*

Si A est de type (P_2), et si x est un élément non nul de R, on a

$$x(1/x) = 1 \in A,$$

d'où $x \in A$ ou $1/x \in A$ puisque $R - A$ est multiplicativement stable. Réciproquement, si $xy \in A$ et si $x \notin A$, on a $1/x \in A$, d'où $y = (xy)(1/x) \in A$, ce qui montre que $R - A$ est multiplicativement stable.

3. Implications toujours valables entre (P_1), (P_2) et (P_3) :

THÉORÈME 3. — *La relation* (P_3) *implique* (P_2).

Soient en effet s et s' deux éléments de $R - A$ tels que $ss' = a \in A$. On obtient une contradiction en appliquant (P_3) au polynome dominé $XX' - a$.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant démontrer que (P_1) implique (P_2), puis que (P_1) implique aussi la propriété plus forte (P_3). En vue de la démonstration du fait que (P_1) implique (P_2), rappelons le lemme suivant, dû à COHEN et SEIDENBERG [(2)] :

LEMME 1. — *Soient B un anneau commutatif, A un sous-anneau de B et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Pour qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de B tel que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, il faut et il suffit qu'on ait $B\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$.*

La nécessité est facile car on a $\mathfrak{p} \subset B\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. Réciproquement remarquons que l'ensemble des idéaux $\mathfrak{Q}$ de B tels que $\mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{p}$ est non vide, et est inductif si on l'ordonne par inclusion; soit $\mathfrak{M}$ un élément maximal de cet ensemble. Montrons que $\mathfrak{M}$ est premier. En effet, si x et x' sont des éléments de $B - \mathfrak{M}$, on a $(\mathfrak{M} + Bx) \cap A \neq \mathfrak{p}$ et $(\mathfrak{M} + Bx) \cap A \neq \mathfrak{p}$, et il existe donc des éléments a, a' de $A - \mathfrak{p}$ tels qu'on ait $a = m + bx$ et $a' = m' + b'x'$ avec m, $m' \in \mathfrak{M}$ et b, $b' \in B$. Si l'on avait, de plus, $xx' \in \mathfrak{M}$, on en déduirait $aa' \in \mathfrak{M}$, d'où $aa' \in \mathfrak{M} \cap A = \mathfrak{p}$, en contradiction avec le fait que $\mathfrak{p}$ est premier; on a donc $xx' \notin \mathfrak{M}$, et $\mathfrak{M}$ est premier.

Ceci étant, étant donnés un anneau (commutatif) R, un sous-anneau A de R et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, nous dirons que le couple $(A, \mathfrak{p})$ est *maximal* dans R si, pour tout anneau A' tel que $A \subset A' \subset R$ et $A' \neq A$, il n'existe aucun idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' tel que $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$. Pour que A soit de type (P_1) dans R, il faut et il suffit qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $(A, \mathfrak{p})$ soit maximal. D'après le lemme, pour que $(A, \mathfrak{p})$ soit maximal, il faut et il suffit qu'on ait $B\mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{p}$ pour tout anneau B tel que $A \subset B \subset R$ et $B \neq A$, ou encore qu'on ait $A[s]\mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{p}$ pour tout $s \in R - A$.

THÉORÈME 4. — *Si le couple $(A, \mathfrak{p})$ est maximal dans R, $R - A$ est multiplicativement stable; autrement dit* (P_1) *implique* (P_2) *et l'idéal $\mathfrak{p}$ contient l'idéal $\mathfrak{p}_1$ défini dans le théorème* 1 (a).

Nous allons utiliser la méthode classique de démonstration, due à C. CHEVALLEY, et permettant « d'éliminer l'élimination ». Supposons qu'il existe deux éléments s, s' de $R - A$ tels que $ss' = a \in A$. Par hypothèse il existe des éléments b, b' de $A - \mathfrak{p}$ tels que $b \in A[s]\mathfrak{p} \cap A$ et $b' \in A[s']\mathfrak{p} \cap A$.

On a alors, pour b par exemple, une relation de la forme

$$b = p_0 + p_1 s + \ldots + p_n s^n \qquad \text{où} \quad p_i \in \mathfrak{p};$$

en remplaçant b par $b - p_0$ on peut supposer qu'on a $p_0 = 0$; parmi les éléments b de $A - \mathfrak{p}$ exprimables sous la forme

$$b = p_1 s + \ldots + p_{n-1} s^{n-1} + p_n s^n \qquad (p_i \in \mathfrak{p})$$

nous en choisirons un, tel que n soit le plus petit possible. De même choisissons b' dans $A - \mathfrak{p}$ de sorte que, dans la relation

$$b' = p'_1 s' + \ldots + p'_q s'^q \qquad (\text{où } p'_j \in \mathfrak{p}),$$

le degré q soit le plus petit possible. Supposons, par exemple, qu'on ait $n \geqq q$. En multipliant la seconde relation par $p_n s^n$ et en tenant compte de $ss' = a$, on obtient

$$p_n s^n b' = p_n p'_1 a s^{n-1} + \ldots + p_n p'_q a^q s^{n-q},$$

d'où en reportant dans la première relation

$$bb' = b' p_1 s + \ldots + b' p_{n-1} s^{n-1} + p_n p'_1 a s^{n-1} + \ldots + p_n p'_q a^q s^{n-q}.$$

Ceci contredit le caractère minimal de n, puisque $bb' \in A - \mathfrak{p}$. Donc $R - A$ est multiplicativement stable.

Pour démontrer l'inclusion $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$, considérons un élément a de $\mathfrak{p}_1$ (*cf.* th. 1, a); il existe s dans $R - A$ tel que $sa \in A$. Comme on a $A[s]\mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{p}$, il existe, comme ci-dessus, un élément b de $A - \mathfrak{p}$ tel que $b = p_1 s + \ldots + p_n s^n$ avec $p_i \in \mathfrak{p}$. En multipliant par a^n, on voit que $ba^n \in \mathfrak{p}$, d'où $a \in \mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{p}$ est premier et que $b \in A - \mathfrak{p}$. C. Q. F. D.

Avant de montrer que (P_1) implique (P_3) démontrons un lemme qui nous sera utile.

Lemme 2. — *Étant donnés un anneau commutatif R, un sous-anneau C de R et un idéal premier $\mathfrak{q}$ de R, il existe un couple $(A, \mathfrak{p})$ maximal dans R tel que $C \subset A$ et que $\mathfrak{q} = C \cap \mathfrak{p}$.*

La démonstration est classique : on considère l'ensemble des couples $(A', \mathfrak{p}')$ formés d'un anneau A' tel que $C \subset A' \subset R$ et d'un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' tel que $\mathfrak{p}' \cap C = \mathfrak{q}$. Cet ensemble est inductif pour la relation d'ordre évidente $A' \subset A''$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'' \cap A'$. Il admet donc un élément maximal $(A, \mathfrak{p})$.

Théorème 5. — *La relation* (P_1) *implique* (P_3).

Considérons un couple $(A, \mathfrak{p})$ maximal dans R, et posons $S = R - A$; nous savons déjà que S est multiplicativement stable (th. 4). Soit $\mathfrak{n}$ l'idéal formé par les éléments x de R pour lesquels il existe s dans S tel que $sx = 0$ (th. 1, c); on a $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$ (th. 4). L'anneau $A' = A/\mathfrak{n}$ est un sous-anneau de

$R' = R/\mathfrak{n}$, qui est lui-même un sous-anneau de l'anneau de fractions $T' = R_S$ ([3], chap. I). Notons $\mathfrak{p}'$ l'idéal premier $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ de A'; il existe un couple maximal $(B', \mathfrak{q}')$ dans T' tel que $A' \subset B'$ et $A' \cap \mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$ (lemme 2). Montrons que, pour tout $s \in S$, la classe s' de s mod $\mathfrak{n}$ n'appartient pas à B'; en effet, dans le cas contraire, l'idéal premier $\mathfrak{q}'_1 = \mathfrak{q}' \cap A'[s']$ vérifierait $\mathfrak{q}'_1 \cap A' = \mathfrak{p}'$; or l'image réciproque de $A'[s']$ par l'application canonique $R \to R/\mathfrak{n}$ est $A[s]$ car $\mathfrak{n} \subset A[s]$, et l'image réciproque $\mathfrak{q}_1$ de $\mathfrak{q}'_1$ par cette application est un idéal premier de $A[s]$; on a $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}$ car $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_1 \cap A$ est évident et, si $x \in \mathfrak{q}_1 \cap A$, x est congru mod $\mathfrak{n}$ à un élément y de $\mathfrak{p}$ (puisque $\mathfrak{q}'_1 \cap A' = \mathfrak{p}'$), d'où $x \in \mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$. Comme $T' - B'$ est multiplicativement stable (th. 4), la relation $s's'^{-1} = 1$ montre qu'on a $s'^{-1} \in B'$, et $s'^{-1} \in \mathfrak{q}'$ (th. 4). Alors, si

$$P(X_1, \ldots, X_r) = X_1^{n(1)} \ldots X_r^{n(r)} + \sum_{\lambda} a_\lambda m_\lambda(X) \qquad a_\lambda \in (A)$$

est un polynome dominé sur A, une relation de la forme $P(s_1, \ldots, s_r) = 0$ avec $s_i \in S$ pour $i = 1, \ldots, r$ donnerait, par réduction mod $\mathfrak{n}$ et division par $s_1'^{n(1)} \ldots s_r'^{n(r)}$ (s'_i classe de s_i (mod $\mathfrak{n}$)), la relation $1 \in \mathfrak{q}'$, ce qui est absurde. Donc A est de type (P_3) dans R. C. Q. F. D.

4. Modifications de l'anneau R :

THÉORÈME 6. — *Soient R un anneau commutatif et A un sous-anneau de type* (P_2) [resp. (P_3)] *de R. Si R' est un sous-anneau de R, $R' \cap A$ est de type* (P_2) [resp. P_3)] *dans R'.*

Vérification immédiate.

THÉORÈME 7. — *Soient R un anneau commutatif et A un sous-anneau de type* (P_1) [resp. (P_3)] *de R. Si R' est un anneau commutatif contenant R, il existe un sous-anneau A' de type* (P_1) [resp. (P_3)] *de R' tel que $A' \cap R = A$.*

Pour (P_1), soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $(A, \mathfrak{p})$ soit maximal dans R. D'après le lemme 2, il existe un couple $(A', \mathfrak{p}')$ maximal dans R' tel que $A \subset A'$ et que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$. Pour montrer qu'on a $A' \cap R = A$, il suffit de montrer que tout élément x de $A' \cap R$ est dans A; or l'idéal premier $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}' \cap A[x]$ de $A[x]$ vérifie $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$, ce qui montre que $A[x] = A$ puisque le couple $(A, \mathfrak{p})$ est maximal dans R.

Si A est de type (P_3) dans R, l'ensemble $S = R - A$ est multiplicativement stable (th. 3). Considérons l'anneau de fractions R'_S et l'homomorphisme canonique h de R' dans R'_S; les restrictions de h à A et R ont même noyau $\mathfrak{n} \subset A$ (th. 1, c). L'ensemble B des éléments de R'_S de la forme $h(a) + \sum h(a_i) h(s_i)^{-1}$ (a, $a_i \in A$, $s_i \in S$) est évidemment un sous-anneau de R'_S (contenu d'ailleurs dans R_S) et l'ensemble $\mathfrak{b}$ des éléments de la forme

$\sum_i h(a_i)h(s_i)^{-1}$ $(a_i \in A,\ s_i \in S)$ est évidemment un idéal $\mathfrak{b}$ de B. On a $\mathfrak{b} \neq B$ car, sinon, une relation $\sum_{i=1}^{n} h(a_i)h(s_i)^{-1} = 1$ donnerait

$$h\left(s_1\ldots s_n - \sum_{i=1}^{n} a_i s_1\ldots s_{i-1}s_{i+1}\ldots s_n\right) = 0,$$

d'où

$$s_1\ldots s_n - \sum_{i=1}^{n} a_i s_1\ldots s_{i-1}s_{i+1}\ldots s_n = a \in \mathfrak{n} \subset A,$$

ce qui est contraire à (P_3). Donc $\mathfrak{b}$ est contenu dans un idéal premier $\mathfrak{m}$ de B, par exemple un idéal maximal. D'après le lemme 2, il existe un couple $(A'', \mathfrak{p}'')$ maximal dans R'_S tel que $B \subset A''$ et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}''$. Posons $A' = h^{-1}(A'')$ et $\mathfrak{p}' = h^{-1}(\mathfrak{p}'')$; il est clair que $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier de A'; comme A'' est de type (P_3) dans R'_S (th. 5), on voit aussitôt que A' est de type (P_3) dans R'. Il reste à montrer que $A' \cap R = A$; or, si A' contient un élément s de S, on a $h(s) \in A''$ et $h(s)^{-1} \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}''$, d'où $1 = h(s)h(s)^{-1} \in \mathfrak{p}''$ ce qui est contraire au fait que $\mathfrak{p}''$ est un idéal premier. C. Q. F. D.

5. La fermeture intégrale d'un sous-anneau :

THÉORÈME 8. — *Soient R un anneau commutatif et C un sous-anneau de R. La fermeture intégrale de C dans R est l'intersection des sous-anneaux de type* (P_2), *et aussi celle des sous-anneaux de type* (P_3), *de R contenant C.*

Comme tout sous-anneau de type (P_2) de R, et *a fortiori* tout sous-anneau de type (P_3) (th. 3), est intégralement fermé dans R (th. 1, d), il suffit de montrer que, pour tout élément x de R qui n'est pas entier sur C, il existe un sous-anneau A de type (P_3) de R, contenant C et tel que x ne soit pas entier sur A. Pour cela nous remarquons que l'ensemble des sous-anneaux de R contenant A et sur lesquels x n'est pas entier est un ensemble ordonné inductif; soit A un élément maximal de cet ensemble. Nous allons montrer que A est de type (P_2), puis qu'il est de type (P_3).

Pour montrer que A est de type (P_2), considérons deux éléments s, t de $R - A$, et supposons qu'on ait $st = a \in A$. D'après le caractère maximal de A, x est entier sur $A[s]$ et sur $A[t]$; on a donc des relations de dépendance intégrale de la forme $f(s, x) = 0$ et $g(t, x) = 0$, où f et g sont des polynomes à deux variables sur A, unitaires en x. Choisissons-les de telle sorte que leurs degrés d et e par rapport à s et t soient les plus petits possibles. Les relations $f(s, x) = 0$ et $g(t, x) = 0$ peuvent s'écrire, en les ordonnant par rapport à s et à t,

$$u(x) = u_1(x)s + \ldots + u_d(x)s^d, \qquad v(x) = v_1(x)t + \ldots + v_e(x)t^e,$$

où u et v sont des polynomes unitaires en x, et où

$$d^0(u_i) < d^0(u), \qquad d^0(v_j) < d^0(v).$$

Supposons, par exemple, $d \geqq e$. En multipliant la seconde relation par s^d et en tenant compte de $st = a$, on obtient

$$s^d v(x) = av_1(x)s^{d-1} + \ldots + a^e v_e(x)^{d-e}.$$

En reportant dans la première préalablement multipliée par $v(x)$ on trouve

$$\begin{aligned} u(x)v(x) = u_1(x)v(x)s + \ldots + u_{d-1}(x)v(x)s^{d-1} \\ + au_d(x)v_1(x)s^{d-1} + \ldots + a^e u_d(x)v_e(x)s^{d-e}. \end{aligned}$$

Le premier membre est un polynome unitaire de degré $d^0(u) + d^0(v)$; les coefficients des puissances de s dans le second membre sont tous des polynomes de degrés $< d^0(u) + d^0(v)$; cette relation est donc une relation $h(s, x) = 0$ de dépendance intégrale pour x sur $A[s]$, dont le degré par rapport à s est $\leqq d - 1$. Ceci contredit le caractère minimal de d. Donc l'hypothèse $st = a \in A$ est intenable, et $R - A$ est multiplicativement stable.

Pour montrer que A est de type (P_3) dans R considérons, comme dans le théorème 5, l'idéal $\mathfrak{n}$ formé des éléments y de R pour lesquels il existe s dans S tel que $sy = 0$, ainsi que les anneaux $A' = A/\mathfrak{n} \subset R' = R/\mathfrak{n} \subset T' = R_S$. Soit h l'homomorphisme canonique de R sur R'. L'élément $h(x)$ n'est pas entier sur A', sinon l'on aurait une relation de la forme

$$h(x)^n + h(a_{n-1})h(x)^{n-1} + \ldots + h(a_0) = 0 \quad (a_i \in A),$$

d'où $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathfrak{n}$, et x serait entier sur A puisque $\mathfrak{n} \subset A$. Comme dans la première partie de la démonstration il existe alors, parmi les sous-anneaux de T' contenant A et sur qui $h(x)$ n'est pas entier, un sous-anneau maximal B'; d'après la première partie B' est de type (P_2) dans R'. Pour tout $s \in R - A$, on a $h(s) \notin B'$, car sinon, comme x est entier sur $A[s]$ d'après le caractère maximal de A, $h(x)$ serait entier sur $A'[h(s)]$ donc sur B'. Donc la relation $h(s)h(s)^{-1} = 1 \in B'$ implique $h(s)^{-1} \in B'$ et aussi $h(s)^{-1} \in \mathfrak{p}'_1$, $\mathfrak{p}'_1$ désignant l'idéal premier formé des éléments y' de B' pour lesquels il existe $z' \in T' - B'$ tel que $y'z' \in B'$ (*cf.* th. 1, a; remarquons que $\mathfrak{p}'_1 \neq B'$). Alors si $P(X_1, \ldots, X_r)$ est un polynome dominé sur A dont le terme dominant est $X_1^{n(1)} \ldots X_r^{n(r)}$, une relation de la forme $P(s_1, \ldots, s_r) = 0$ avec $s_i \in R - A$, donnerait, par réduction mod $\mathfrak{n}$ et division par

$$h(s_1)^{n(1)} \ldots h(s_r)^{n(r)},$$

la relation $1 \in \mathfrak{p}'_1$, ce qui est absurde. Donc A est de type (P_3) dans R.

C. Q. F. D.

6. Quelques contre-exemples :

1° *Ni* (P_2), *ni* (P_3) *n'impliquent* (P_1).

Prenons en effet pour A un corps K et pour R l'anneau de polynomes $K[X]$. Comme A est l'intersection de R avec l'anneau de la valuation à l'infini de $K(X)$, A est de types (P_2) et (P_3) dans R (th. **6**). Cependant le seul idéal premier de A, qui est (O), est l'intersection de A et de l'idéal (X) [ou (O)] de R; ainsi A n'est pas de type (P_1) dans R. Cet exemple montre aussi que :

2° *Le théorème* **6** *ne s'étend pas aux anneaux de type* (P_1).

3° *Anneau de type* (P_2) *où l'idéal* $\mathfrak{p}_1$ (th. **1**, *a*) *n'est pas maximal.*

On prend $R = K[X, Y, 1/X]$ (K : corps) et $A = K[X, Y]$. Le couple (A, AX) est maximal dans R : en effet tout élément de $R - A$ est de la forme $P(X, Y)/X^n$ où $n > 1$ et où $P(X, Y)$ est un polynome non multiple de X; si l'on pose $B = A[P(X, Y)/X^n]$, on a

$$P(X, Y) \in BX \qquad \text{d'où} \qquad BX \cap A \neq AX.$$

Or l'idéal AX est premier non maximal. On sait que $\mathfrak{p}_1 \subset AX$ (th. **4**), et l'on voit d'ailleurs aisément que $\mathfrak{p}_1 = AX$ dans ce cas. Notons qu'ici A est même de type (P_1) [donc (P_3)] dans R.

4° *La fermeture intégrale d'un sous-anneau C de R n'est pas l'intersection des sous-anneaux de type* (P_1) *de R contenant C.*

On prend $C = K$ (un corps) et $R = K[X]$. Un sous-anneau B de R contenant K et distinct de K contient un polynome unitaire non constant $P(X)$, donc R est entier sur B; ainsi B ne peut être de type (P_2) dans R (th. **1**, *d*), ni *a fortiori* de type (P_1) sauf si $B = R$. On a vu que K n'est pas de type (P_1) dans R. Donc le seul sous-anneau de type (P_1) de R contenant $K = C$ est R lui-même.

5° *La relation* (P_2) *n'implique pas* (P_3).

On prend pour A un corps, et pour R l'anneau $R = A[x, y, z]$, où x, y, z sont liés par la relation $xyz + x + y + z = 0$ (anneau de coordonnées affines d'une surface cubique irréductible). Comme $XYZ + X + Y + Z$ est un polynome dominé, A n'est pas de type (P_3) dans R. Montrons qu'il est cependant de type (P_2), c'est-à-dire, puisque A est un corps, que les seuls éléments inversibles de R sont ceux de A^*. Si $P(x, y, z)$ est un élément inversible de R, il induit un élément inversible dans l'anneau de coordonnées de la section de la surface cubique par $z = h$ (h transcendant sur A), c'est-à-dire de l'hyperbole $[Z = h, (Xh + 1)(Yh + 1) = 1 - h^2]$. Or, en posant $K = A(h)$ et $T = Xh + 1$, cet anneau de coordonnées est $K[T, 1/T]$.

et, comme on le voit aussitôt, ses éléments inversibles sont ceux de la forme aT^n ($a \in K^*$, n entier rationnel). On a donc

$$P(x, y, z) = (xz + 1)^n f(z)/g(z),$$

où f et g sont des polynomes à une variable sur A. En s'induisant sur la droite ($X = 0$, $Y + Z = 0$), on voit que $f(z)/g(z)$ doit être inversible dans l'anneau de coordonnées de cette droite, et est donc une constante. On peut ainsi supposer que $P(x, y, z) = (xz + 1)^n$. Or, cette fonction rationnelle sur la surface cubique a des pôles à distance finie si $n < 0$, ou des zéros à distance finie si $n > 0$, à savoir sur la droite ($Z = 1$, $X = -1$); donc, si $n \neq 0$, cette fonction rationnelle ne peut être un élément inversible de l'anneau de coordonnées affines $R = A[x, y, z]$. Par conséquent $P(x, y, z) = 1$.

Remarque. — L'exemple précédent amène à étudier en général les éléments inversibles d'un anneau d'intégrité de la forme $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ où K est un corps (on dit que R est une algèbre affine, ou un anneau d'intégrité de type fini). On a le résultat suivant, analogue, en bien plus facile, au classique théorème des unités de Dirichlet :

Théorème 9. — *Soit $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ une algèbre affine sur un corps algébriquement clos K, et U le groupe multiplicatif des éléments inversibles de R; alors U/K^* est un groupe abélien libre de type fini.*

Soit R' la clôture intégrale de R; c'est une algèbre affine d'après le théorème de normalisation; comme le groupe multiplicatif U' des éléments inversibles de R' contient U, il suffit de démontrer le théorème 9 pour R'; on peut donc supposer R intégralement clos. Par normalisation de la variété projective lieu de ($1, x_1, \ldots, x_n$) sur K, on peut considérer R comme l'anneau de coordonnées affines sur une variété normale projective V. Alors, pour qu'un élément u de R soit inversible, il faut et il suffit que son diviseur (u) ait toutes ses composantes à l'infini sur V. Donc, si l'on note $\mathfrak{H}$ le groupe additif des diviseurs à l'infini sur V et $\mathfrak{G}$ le groupe des diviseurs linéairement équivalents à 0 sur V, U/K^* est évidemment isomorphe à $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}$, et est un groupe abélien libre de type fini puisqu'il en est ainsi de $\mathfrak{H}$.

Dans le théorème 9 on peut éviter de supposer K algébriquement clos, à condition de remplacer U/K^* par U/K'^*, où K' est le corps formé par les éléments de R qui sont algébriques sur K.

7. Conclusions. — Dans le cas où R est un *corps* (commutatif) les notions de sous-anneaux de type (P_1), (P_2) et (P_3) de R coïncident avec la notion de sous-anneau de valuation de R. Nous l'avons en effet vu pour (P_2) (th. 2). En vertu des théorèmes 3, 4 et 5, il suffit alors de montrer que tout sous-anneau de valuation A du corps R est de type (P_1) dans R, ce qui est classique et facile (prendre pour $\mathfrak{p}$ l'unique idéal maximal de R); la démonstration directe du fait que A est de type (P_3) dans R est d'ailleurs facile dans ce cas. La seule démonstration dont la théorie ne soit pas très facile est alors celle de l'analogue du théorème **4**.

Dans le cas général la notion de sous-anneau de type (P_1) semble trop restrictive puisqu'elle ne vérifie pas le « théorème de descente » (*cf.* th. **6**, *voir* § **6**, 2°) et ne donne pas la caractérisation classique de la fermeture intégrale d'un sous-anneau (*cf.* th. **8** et exemple § **6**, 4°). Par contre la notion de sous-anneau de type (P_2) n'est pas assez restrictive; il résulte de l'exemple (§ **6**, 5°) qu'elle ne vérifie pas le « théorème de montée » (*cf.* th. **7**), car, sinon, en prenant pour R' le corps des fractions $A(x, y, z)$ de R, A serait de type (P_3) d'après le théorème **6**.

La notion de sous-anneau de type (P_3), qui vérifie les théorèmes **6**, **7** et **8**, paraît donc être la généralisation naturelle de la notion de sous-anneau de valuation d'un corps. Si A est un sous-anneau de type (P_3) de R, et si $\mathfrak{p}_1$ est l'idéal premier de A défini dans le théorème **1**, a, on pourra définir (à une équivalence près) la *place* p associée à A en posant $p(a) =$ classe de $a \bmod \mathfrak{p}_1$ lorsque $a \in A$, et $p(x) = \infty$ lorsque $x \in R - A$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI, *Algèbre Linéaire*, 2ᵉ éd., App. III, Hermann, Paris, 1955; *Act. Sc. et Ind.*, n° 1236.

[2] COHEN-SEIDENBERG, *Prime ideals and integral dependence* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1946, p. 252-261).

[3] SAMUEL, *Algèbre locale* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 123, Gauthier-Villars, Paris, 1953).

Manuscrit reçu le 1er décembre 1956.