BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD MALGRANGE

Plongement des variétés analytiques-réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 101-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__101_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 101 à 113.

PLONGEMENT DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES-RÉELLES;

PAR

BERNARD MALGRANGE.

Introduction. — En 1937, S. BOCHNER [1] a démontré le théorème suivant :

Toute variété analytique-réelle compacte, munie d'un ds^2 analytique peut être plongée, par une application analytique biunivoque et partout régulière, dans un espace euclidien.

Nous nous proposons ici d'étendre ce théorème aux variétés non compactes, et, plus précisément, de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit V une variété analytique-réelle, de dimension n, compacte ou dénombrable à l'infini, munie d'un ds^2 riemannien analytique. Il existe une application analytique de V dans un espace R^N, qui soit :*

1° *Propre* (i. e. *l'image réciproque de tout compact de R^N est compacte*).

2° *Biunivoque.*

3° *Régulière en tout point de V* (i. e. *pour tout point $a \in V$, on peut extraire, des N fonctions définissant le plongement, n fonctions qui soient des coordonnées locales en a sur V*).

Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer successivement qu'il existe des applications analytiques de V dans un espace euclidien vérifiant 1°, 3°, 3°. Ce sera l'objet des propositions **1**, **2**, **3**. Ces trois propositions seront déduites d'un lemme d'approximation des fonctions analytiques que nous allons commencer par établir.

REMARQUE. — Pour simplifier, nous supposerons V connexe.

1. Approximation des fonctions analytiques. — Commençons par rappeler quelques résultats relatifs aux fonctions harmoniques.

Soit W une variété analytique-réelle, de dimension m, non compacte munie d'un ds^2 riemannien analytique; toutes les fonctions considérées sur W seront supposées à valeurs réelles. Nous appellerons, suivant l'habitude, « harmoniques » les fonctions sur W qui vérifient

$$\Delta f (= \delta\, df) = 0$$

(notations d, δ, Δ habituelles, *voir* par exemple [9]).

a. Toute distribution (i. e. *tout courant de degré* 0) *sur* W *qui vérifie* $\Delta f = 0$ *est une fonction analytique.*

De nombreuses démonstrations de ce résultat ont été données (par exemple [5], [8], [9]. Elles entraînent le résultat suivant, un peu plus fort, que nous utiliserons.

Soient a *un point de* W, *et* $x_1, \ldots, x_m$ *des coordonnées locales en* a [*avec* $x_i(a) = 0$]; *il existe un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* a *tel que toute fonction harmonique sur* W *ait, en* a, *un développement suivant les puissances des* x_i *convergeant dans* $\mathcal{O}$.

b. Appelons :

$\mathcal{E}^0_W$ l'espace des fonctions continues sur W, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de W;

$\mathcal{E}_W$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur W, muni de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur les parties compactes de W;

H_W l'espace des fonctions harmoniques sur W;

D'après a, H_W est fermé dans $\mathcal{E}_W$ et dans $\mathcal{E}^0_W$; le théorème du graphe fermé montre alors que :

$\mathcal{E}_W$ *et* $\mathcal{E}^0_W$ *induisent la même topologie sur* H_W.

c. Généralisation du théorème de Runge. — Soit $\mathcal{O}$ *un ouvert* $\subset W$, *dont le complémentaire n'ait pas de composantes connexes compactes*; *toute fonction harmonique sur* $\mathcal{O}$ *est limite* (*dans* $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}$ *ou* $\mathcal{E}^0_{\mathcal{O}}$, *cela revient au même d'après b*) *de fonctions harmoniques sur* W.

Pour les grandes lignes de la démonstration, *voir* [6]; le cas plus général où Δ est remplacé par un opérateur elliptique est traité en détails dans [7] (1).

Reprenons maintenant la variété V considérée dans l'introduction; soit R la droite numérique, dont le point courant sera désigné par y; nous appellerons W la variété $V \times R$, munie de la métrique $ds^2 + dy^2$, ds^2 désignant la métrique de V, et nous identifierons V à la sous-variété $V \times \{0\}$ de W.

(1) Suivant l'usage, nous appellerons ici « elliptiques » les opérateurs appelés « de Petrovsky » dans [7], chap. 3, § 3.

Cela posé, nous pouvons démontrer le lemme d'approximation que nous avons en vue :

LEMME FONDAMENTAL. — *Soit* Ω_i *une suite (finie ou dénombrable; i entier* $\geqq 1$*) d'ouverts disjoints de V. On suppose en outre que les* Ω_i *tendent vers l'infini, c'est-à-dire que tout compact* $\subset V$ *ne rencontre qu'un nombre fini d'entre eux. Soit, pour tout i,* f_i *une fonction analytique sur* Ω_i*, et* u_i *un voisinage de zéro dans* $\mathcal{E}_{\Omega_i}$.

Il existe une fonction g analytique sur V telle que, pour tout i, on ait $g - f_i \in u_i$.

De plus, on peut supposer que g est la restriction à V d'une fonction harmonique sur W.

DÉMONSTRATION. — Posons $\Omega = \bigcup \Omega'_i$, et définissons une fonction analytique f sur Ω par la condition : pour tout i, $f = f_i$ sur Ω_i.

Nous dirons qu'une suite (Ω'_i, f'_i, u'_i), vérifiant les hypothèses du lemme fondamental, *minore* la suite (Ω_i, f_i, u_i) donnée si les conditions suivantes sont vérifiées :

a. Pour tout i, $\Omega'_i \subset \Omega$ (mais non nécessairement $\subset \Omega_i$).

b. Pour tout i, f'_i est la restriction de f à Ω'_i.

c. Si g est une fonction $\in \mathcal{E}_V$, la condition « pour tout i, on a $g - f'_i \in u'_i$ » entraîne « pour tout i, on a $g - f_i \in u_i$ ».

Il suffit évidemment de démontrer le lemme fondamental pour une suite minorant la suite donnée. Ceci dit, commençons par démontrer quelques résultats préliminaires.

1° Il existe une suite (Ω'_i, f'_i, u'_i) minorant la suite (Ω_i, f_i, u_i) donnée, et telle que les Ω'_i soient relativement compacts dans Ω.

En effet, d'après la définition des voisinages de zéro dans $\mathcal{E}_{\Omega_i}$, la condition « $g - f_i \in u_i$ » est entraînée par des inégalités portant sur les valeurs, sur un compact $K_i \subset \Omega_i$, de $g - f_i$ et (d'un nombre fini) de ses dérivées.

2° Il existe une suite $(\Omega''_i, f''_i, u''_i)$, minorant la suite (Ω_i, f_i, u_i), et une suite $\mathcal{O}_i$ d'ouverts relativement compacts dans V, telles qu'on ait

$$\overline{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_{i+1}; \qquad \bigcup \mathcal{O}_i = V; \qquad \Omega''_i \subset \mathcal{O}_i - \overline{\mathcal{O}}_{i-1}.$$

Lorsque V est compacte, il suffit en effet de prendre la suite $\mathcal{O}_i$ réduite à $\mathcal{O}_1 = V$, et la suite Ω''_i réduite à $\bigcup \Omega'_i$.

Supposons maintenant V non compacte; soit $(\mathcal{O}'_i)$ une suite d'ouverts relativement compacts $\subset V$ vérifiant $\mathcal{O}'_i \subset \mathcal{O}'_{i+1}$ et $\bigcup \mathcal{O}'_i = V$; modifions cette suite, de la manière suivante :

Posons $\mathcal{O}''_i = \mathcal{O}'_i \cup$ (l'ensemble des Ω'_j dont l'intersection avec $\mathcal{O}'_i$ n'est pas vide).

$\mathcal{O}''_i$ est encore relativement compact, et possède la propriété suivante :

— ou bien $\Omega'_j \subset \mathcal{O}''_i$;

— ou bien $\Omega'_j \cap \mathcal{O}''_i = \emptyset$, donc $\Omega'_j \cap \overline{\mathcal{O}}''_i = \emptyset$.

Les $\mathcal{O}''_i$ forment une suite croissante d'ouverts relativement compacts telle que $\bigcup \mathcal{O}''_i = V$; pour tout i, il existe donc (Borel-Lebesgue) un j tel qu'on ait $\overline{\mathcal{O}}''_i \subset \mathcal{O}''_j$; par suite, on peut extraire de la suite $(\mathcal{O}''_i)$ une suite $(\mathcal{O}_i)$ telle qu'on ait $\overline{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_{i+1}$.

Posons alors $\Omega''_i = (\mathcal{O}_i - \overline{\mathcal{O}}_{i-1}) \cap \left(\bigcup \Omega'_j\right)$; Ω''_i est réunion d'un nombre fini d'ouverts Ω'_i; il est alors immédiat qu'il existe une suite $(\Omega''_i, f''_i, u''_i)$, qui minore la suite (Ω'_i, f'_i, u'_i), ce qui démontre 2°.

3° Démontrons maintenant le lemme fondamental pour la suite $(\Omega''_i, f''_i, u''_i)$ que nous appellerons désormais (Ω_i, f_i, u_i) pour simplifier les notations.

Identifions V à la sous-variété $V \times \{0\}$ de W. D'après le théorème de Cauchy-Kovalevska, il existe, pour tout i, un voisinage $\tilde{\Omega}_i$ de Ω_i dans W et une fonction $\tilde{f}_i$ *harmonique* dans $\tilde{\Omega}_i$, tels que la restriction de $\tilde{f}_i$ à Ω_i soit égale à f_i [il suffit, par exemple, de résoudre, au voisinage de chaque point de Ω_i, le problème aux limites : $\Delta \tilde{f}_i = 0$, $\tilde{f}_i(x, 0) = f_i$, $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{f}_i(x, 0) = 0$, où x désigne un point de V; les fonctions obtenues se « recollent » dans un voisinage de Ω_i].

En remplaçant au besoin $\tilde{\Omega}_i$ par un ouvert plus petit, nous pouvons supposer que $\tilde{\Omega}_i$ est réunion de segments ouverts $a \times]-\gamma_a, \gamma_a[$, avec $a \in \Omega_i$ et $0 < \gamma_a < 1$.

Soit $\tilde{u}_i$ l'image réciproque de u_i par l'application $f(x, y) \to f(x, 0)$ de $\mathcal{E}_{\tilde{\Omega}_i}$ dans $\mathcal{E}_{\Omega_i}$; le lemme sera démontré si nous prouvons qu'il existe une fonction harmonique $\tilde{g}$ sur W qui vérifie, pour tout i : $\tilde{g} - \tilde{f}_i \in \tilde{u}_i$; comme, sur $H_{\tilde{\Omega}_i}$, la topologie induite par $\mathcal{E}_{\tilde{\Omega}_i}$ et la topologie induite par $\overset{0}{\mathcal{E}}_{\tilde{\Omega}_i}$ coïncident, il suffit finalement de démontrer le résultat suivant :

Étant donné, pour chaque i, un compact $K_i \subset \tilde{\Omega}_i$ et un nombre $a_i > 0$, il existe une fonction harmonique sur W, soit $\tilde{g}$, qui pour tout i vérifie $|\tilde{g} - \tilde{f}_i| \leq a_i$ sur K_i.

D'abord, si V est compacte, les $\tilde{\Omega}_i$ sont en nombre fini; dans W, l'ensemble $\complement\left(\bigcup \tilde{\Omega}_i\right)$ n'a pas de composantes connexes compactes (d'après l'hypothèse faite plus haut sur les $\tilde{\Omega}_i$); le résultat est alors un cas particulier du théorème d'approximation des fonctions harmoniques rappelé en (c).

Supposons maintenant V non compacte; nous pouvons supposer que la suite a_i est *décroissante*; posons

$$\tilde{\mathcal{O}}_i = \mathcal{O}_i \times]-2^i, 2^i[,$$

$$L_i = \bar{\tilde{\mathcal{O}}}_{i-1} \cup K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots ; \text{ on posera } \tilde{\mathcal{O}}_0 = \Omega_0 = \emptyset).$$

Nous nous trouvons dans la situation suivante : pour tout i,

— $\bar{\tilde{\mathcal{O}}}_i \subset \tilde{\mathcal{O}}_{i+1}$; $\tilde{\Omega}_i \subset \tilde{\mathcal{O}}_i$;

— $\tilde{\mathcal{O}}_{i-1} \cap \tilde{\Omega}_i = \emptyset$;

— $\complement(\tilde{\mathcal{O}}_{i-1} \cup \tilde{\Omega}_i)$ n'a pas de composantes connexes compactes (et est même connexe);

— $K_i \subset \tilde{\Omega}_i$, et L_i (compact) $\subset \tilde{\mathcal{O}}_i$.

D'après le théorème d'approximation des fonctions harmoniques appliqué à $\tilde{\mathcal{O}}_{i-1} \cup \tilde{\Omega}_i$, nous pouvons trouver par récurrence, une suite $(\tilde{g}_i)$ de fonctions harmoniques sur W, avec $\tilde{g}_0 = 0$, qui vérifient :

a. $|\tilde{g} - \tilde{g}_{i-1}| \leq \dfrac{a_i}{2^i}$ sur L_{i-1} ;

b. $|\tilde{g}_i - \tilde{f}_i| \leq \dfrac{a_i}{2}$ sur K_i.

Je dis : a. Que les $\tilde{g}_i$ convergent, uniformément sur tout compact de W, vers une fonction harmonique $\tilde{g}$. En effet, il suffit de démontrer ce résultat pour L_i (puisque tout compact de W est contenu dans un $\tilde{\mathcal{O}}_{i-1}$, donc un L_i); or sur L_i, on a

$$\begin{aligned}|\tilde{g}_{i+k+k'} - \tilde{g}_{i+k}| &\leq |g_{i+k+k'} - g_{i+k+k'-1}| + \ldots + |g_{i+k+1} - g_{i+k}| \\ &\leq \frac{a_{i+k+k'}}{2^{i+k+k'}} + \ldots + \frac{a_{i+k+1}}{2^{i+k+1}} \leq \frac{a_1}{2^{i+k}}\end{aligned}$$

(puisque la suite a_i est décroissante).

Les $\tilde{g}_i$ forment donc une suite de Cauchy pour la convergence uniforme sur tout compact de W, leur limite est une fonction harmonique $\tilde{g}$, ce qui démontre a.

b. Que g possède les propriétés voulues :

Puisque la suite a_i est décroissante, et puisque $K_i \subset L_i$, on a, sur K_i pour tout $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}|\tilde{g}_{i+k} - \tilde{f}_i| &\leq (|\tilde{g}_{i+k} - \tilde{g}_{i+k-1}| + \ldots + |\tilde{g}_{i+1} - \tilde{g}_i|) + |\tilde{g}_i - \tilde{f}_i| \\ &\leq \left(\frac{a_{i+k}}{2^{i+k}} + \ldots + \frac{a_{i+1}}{2^{i+1}}\right) + \frac{a_i}{2} \leq a_i,\end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite : $|\tilde{g} - \tilde{f}_i| \leq a_i$ sur K_i. C. Q. F. D.

Remarque 1. — Dans l'énoncé du lemme fondamental, on peut remplacer « f_i analytique sur Ω_i » par « f_i indéfiniment différentiable sur Ω_i » (i. e. $f_i \in \mathcal{E}_{\Omega_i}$).

Il suffit de se ramener au cas « f_i analytique » en démontrant que, quel que soit i, $f_i \in \mathcal{E}_{\Omega_i}$ est limite, dans $\mathcal{E}_{\Omega_i}$, de fonctions analytiques sur Ω_i; nous allons directement montrer un peu plus :

Soit Ω un ouvert $\subset V$; les restrictions à Ω de fonctions harmoniques sur W sont denses dans $\mathcal{E}_\Omega$.

Supposons V orientable, pour simplifier (sinon, le raisonnement serait le même, à condition de remplacer « courant » par « courant d'espèce impaire » *cf.* [9]). Le dual $\mathcal{E}'_\Omega$ de $\mathcal{E}_\Omega$ est l'espace des courants de degré n, à support compact dans Ω. L'image de $\mathcal{E}'_\Omega$ par l'application $\Omega \to W$, envoie $\mathcal{E}'_\Omega$ sur un sous-espace de $\mathcal{E}'_W$, espace des courants de degré $n+1$ à support compact dans W; nous appellerons cette application $\mathcal{E}'_\Omega \to \mathcal{E}'_W$ « extension à W des courants $\in \mathcal{E}'_\Omega$ ». Rappelons que tout courant $\mu \in \mathcal{E}'_W$, μ à support compact dont Ω se décompose d'une manière et d'une seule en une somme $\mu = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^l}{\partial y^l} \mu_l$, $k \to 0$ et fini, μ_i extensions à W de courants $\in \mathcal{E}'_\Omega$ (*cf.* [10], tome 1, p. 102; la démonstration, donnée dans un cas légèrement différent, se transpose ici sans difficulté). Nous appellerons « ordre transversal de μ » le plus grand entier k tel que $\mu_k \neq 0$.

Cela rappelé, démontrons le résultat annoncé par l'absurde; si les restrictions à Ω de fonctions harmoniques sur W n'étaient pas denses dans $\mathcal{E}_\Omega$, il existerait un courant $\sigma \in \mathcal{E}'_\Omega$, $\sigma \neq 0$, dont l'extension $\tilde{\sigma}$ à W serait orthogonale à toutes les formes harmoniques sur W; dans $\mathcal{E}'_W$ (muni, par exemple de sa topologie faible de dual), $\tilde{\sigma}$ serait adhérente à $\Delta\mathcal{E}'_W$ (puisque l'orthogonal de $\Delta\mathcal{E}'_W$ est précisément H_W). Mais on sait que $\Delta\mathcal{E}'_W$ est fermé ([6] ou [7]); il existe donc $\tau \in \mathcal{E}'_W$ tel qu'on ait $\tilde{\sigma} = \Delta\tau$.

Soit alors K le support de σ; le complémentaire de K dans W est un ouvert connexe, sur lequel τ est harmonique, et nul pour $|y|$ assez grand, donc identiquement nul; le support de τ est donc contenu dans K.

Soit alors k l'ordre transversal de τ; de la formule $\tilde{\sigma} = \Delta\tau$, résulte que $\tilde{\sigma}$ est d'ordre transversal $= k+2$, ce qui contredit le fait que $\tilde{\sigma}$ est extension à W d'une distribution $\in \mathcal{E}'_\Omega$. C. Q. F. D.

(Notons en passant que le résultat précédent aurait pu être utilisé dans la démonstration du lemme fondamental, au lieu du théorème de Cauchy-Kovalevska.)

Remarque 2. — Soit V une variété analytique-réelle, compacte ou dénombrable à l'infini, connexe; supposons qu'il existe sur V un opérateur différentiel D d'ordre p; $\mathcal{E}_V \to \mathcal{E}_V$, *elliptique* et à coefficients analytiques [2]. Sur

[2] *Cf.* note [1]; dans [7], un tel opérateur serait appelé ($V \times C$, $V \times C$)-opérateur

$W = V \times R$, l'opérateur $\tilde{D} = \frac{\partial^{2p}}{\partial y^{2p}} + \bar{D}D$ est elliptique (et à coefficients réels).

Si, dans tout ce qui précède, nous remplaçons « harmonique » par « solution de l'équation $\tilde{D}f = 0$ », les résultats rappelés en a, b et c subsistent, et aussi le fait que $\tilde{D}'\mathcal{E}'_W$ est fermé ($\tilde{D}'$ désignant le transposé de $\tilde{D}$) *cf.* [7].

Par suite, le lemme fondamental et la remarque 1 subsistent, avec la même démonstration.

2. Plongement des variétés analytiques-réelles. — Dans tout ce paragraphe, V désignera une variété analytique-réelle, possédant les propriétés énoncées dans l'introduction, et W la variété $V \times R$ munie de la métrique déjà introduite. Nous nous bornerons à étudier le cas où V n'est pas compacte (le cas où V est compacte s'y ramène trivialement, par exemple en remplaçant V par W).

PROPOSITION 1. — *Il existe une application analytique $V \to R$ propre* (i. e. *l'image réciproque de tout compact est compacte*).

Soit, en effet, $\mathcal{O}_i$ une suite d'ouverts relativement compacts $\subset V$, tels qu'on ait

$$\bar{\mathcal{O}}_i \subset \mathcal{O}_{i+1} \quad \text{et} \quad \bigcup \mathcal{O}_i = V \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Posons $K_1 = \bar{\mathcal{O}}_1$ et $K_i = \bar{\mathcal{O}}_{2i+1} - \mathcal{O}_{2i}$ ($i > 1$). D'après le lemme fondamental, il existe une fonction analytique g sur V, qui, pour tout i, vérifie $|g - 2^{i+1}| \leq \frac{1}{2}$ sur K_i, d'où $g > 2^i$ sur K_i.

Posons ensuite $L_i = \bar{\mathcal{O}}_{2i} - \bar{\mathcal{O}}_{2i-1}$; il existe de même une fonction analytique h sur V qui, pour tout i, vérifie $h > 2^i$ sur L_i. L'ensemble des points $a \in V$ qui vérifient $g^2(a) + h^2(a) \leq 2^{2i}$ est contenu dans $\bar{\mathcal{O}}_{2i-1}$; par suite l'application $a \to g^2(a) + h^2(a)$ est propre. C. Q. F. D.

REMARQUE 1. — L'application de V dans R^2 : $a \to (g(a), h(a))$ est évidemment propre, elle aussi. Par ailleurs, on peut supposer (lemme fondamental) que g et h sont restrictions à V de fonctions harmoniques sur W; ce fait nous servira dans la proposition 2.

Pour les démonstrations qui vont suivre, nous aurons besoin de considérer des sous-ensembles analytiques de V (i. e. des sous-ensembles de V définis, au voisinage de chaque point de V, par l'annulation d'un nombre fini de fonctions analytiques); nous opérerons de la manière suivante :

D'après a, les fonctions harmoniques sur W possèdent la propriété

---

différentiel du type (P); nous excluons donc ici le cas des (W_1, W_2)-opérateurs différentiels, W_1, W_2 étant des fibrés de base V, de fibre C, non analytiquement triviaux.

suivante : tout point $a \in V$ possède un voisinage $\mathcal{O}$ qu'on peut supposer relativement compact, isomorphe à un ouvert $\mathcal{O}' \subset R^n$, tel que les restrictions à V de fonctions harmoniques sur W aient, au point a' (image de a dans $\mathcal{O}'$) un développement convergeant dans $\mathcal{O}'$; choisissons, une fois pour toutes, parmi les ouverts $\mathcal{O}$, une suite $(\mathcal{O}_i)$ qui soit un recouvrement localement fini de V, et désignons par a_i les points correspondants.

Soit f_i une fonction analytique sur $\mathcal{O}_i$; si son image f'_i sur $\mathcal{O}'_i$ admet, en a_i un développement convergeant dans $\mathcal{O}'_i$, f' se prolonge en une fonction analytique-complexe $\hat{f}'$ dans un voisinage $\hat{\mathcal{O}}'_i$ de $\mathcal{O}'_i$ dans C^n, indépendant de f; choisissons un tel système d'ouverts $\hat{\mathcal{O}}'_i \subset C^n$.

Tout sous-ensemble analytique (noté E, par exemple) de V que nous considérerons possédera la propriété suivante *que nous supposerons implicitement vérifiée* : au-dessus de chaque $\mathcal{O}_i$, E est défini par l'annulation d'un nombre fini de fonctions analytiques $f_{i,1}; \ldots; f_{i,k}$ (k dépendant éventuellement de i) possédant les propriétés ci-dessus; appelons alors M l'ensemble pour tout i, des équations $f_{i,1} = \ldots = f_{i,k} = 0$; et appelons $\hat{M}'_i$ le sous-ensemble analytique-complexe de $\hat{\mathcal{O}}'_i$ défini par les équations $\hat{f}'_{i,1} = \ldots = \hat{f}'_{i,k} = 0$.

Choisissons, pour tout i, un compact $K_i \subset \mathcal{O}_i$, de manière qu'on ait $\bigcup K_i = V$.

DÉFINITION. — *Nous appellerons dimension de M (et nous noterons* $\dim M$*) le maximum, pour tout i, de la plus grande des dimensions complexes des composantes irréductibles de $\hat{M}'_i$ qui rencontrent K_i.*

[Il s'agit manifestement d'un abus de langage, puisque cette dimension dépend du système $(\mathcal{O}_i, \hat{\mathcal{O}}'_i, K_i)$ choisi; cela n'entraînera cependant aucune confusion.]

Suivant l'habitude, la dimension complexe de l'ensemble vide sera prise égale à -1.

Rappelons les résultats classiques suivants, les seuls dont nous aurons besoin :

1° Pour i fixé, les composantes irréductibles de $\hat{M}'_i$ qui rencontrent K_i sont en nombre fini.

2° Si un ensemble analytique-complexe E est strictement contenu dans un autre E', ce dernier étant irréductible, la dimension complexe de E est strictement inférieure à celle de E'.

Telle quelle, la définition précédente ne nous servira qu'à la proposition 3; dans la proposition 2, nous aurons à considérer la variété $V \times V = \mathfrak{V}$, sur laquelle nous opérerons d'une manière analogue, avec le système $(\mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j, \hat{\mathcal{O}}'_i \times \hat{\mathcal{O}}'_j, K_i \times K'_j)$; si M est un ensemble d'équations sur les $\mathcal{O}_i \times \mathcal{O}_j$, possédant les propriétés ci-dessus, nous lui ferons encore correspondre des sous-ensembles analytiques complexes $\hat{M}'_{i,j}$ des $\hat{\mathcal{O}}'_i \times \hat{\mathcal{O}}'_j$; cependant, nous modifierons ici un peu la définition de $\dim M$, en notant ainsi le maximum, pour tout (i, j) de la plus grande des dimensions complexes des composantes irréductibles de $\hat{M}'_{i,j}$ qui rencontrent $K_i \times K_j$ *en dehors de la diagonale* D *de* $\mathfrak{V}$.

Nous pouvons maintenant démontrer la

PROPOSITION 2. — *Pour un entier N assez grand il existe une application analytique biunivoque $V \to R^N$.*

DÉMONSTRATION. — A toute application analytique de V dans R^N défini par les fonctions $f_1, \ldots, f_N$ (vérifiant les propriétés énoncées plus haut), faisons correspondre l'application $(g_1, \ldots, g_N)$ de $\mathfrak{V}$ dans R^N, où $g_i(b, c) = f_i(b) - f_i(c)$. Soit $M_{f_1,\ldots,f_N}$ l'ensemble des équations $g_1 = \ldots = g_N = 0$. Tout revient à montrer que, si N est assez grand, il existe $f_1, \ldots, f_N$ tels qu'on ait $\dim M_{f_1,\ldots f_N} = -1$ (car alors, l'ensemble des points de $\mathfrak{V}$ qui vérifieront $g_1, \ldots, g_N = 0$ sera réduit à la diagonale D).

Par récurrence, compte tenu de la proposition 1 et de la remarque 3, cela résulte du lemme suivant :

LEMME 2. — *Si l'application $(f_1, \ldots, f_N)$ est propre, il existe une fonction analytique f_{N+1} sur V telle qu'on ait*

$$\dim M_{f_1,\ldots,f_{N+1}} < \max\big(O, \dim M_{f_1,\ldots,f_N}\big).$$

Supposons en effet qu'on ait $\dim M_{f_1,\ldots,f_N} = k \geq 0$ (sinon le résultat est trivial); $(K_i \times K_j) \cap \complement D$ rencontre un nombre fini de composantes irréductibles de $\hat{M}'_{f_1,\ldots,f_N;\,i,j}$; choisissons, sur chacune de ces composantes, un point de $(K_i \times K_j) \cap \complement D$; lorsque (i, j) varie de toutes les manières possibles, l'ensemble de ces points est dénombrable, et nous pouvons l'ordonner en une suite (b_l, c_l), $b_l \in V$, $c_l \in V$, $(l = 1, 2, \ldots)$.

Sur $\mathfrak{V}$, la suite (b_l, c_l) tend évidemment vers l'infini. *Montrons que la suite (b_l) tend vers l'infini sur V*; supposons en effet le contraire; on pourrait alors extraire de cette suite une suite (b_{l_m}) qui serait contenu dans un compact; les $f_i(b_{l_m})$ seraient bornés, donc aussi les $f_i(c_{l_m}) = f_i(b_{l_m})$; comme l'application $(f_1, \ldots, f_N)$ est propre, les c_{l_m} seraient aussi contenus dans un compact, et la suite (b_{l_m}, c_{l_m}) ne tendrait pas vers l'infini, ce qui est absurde.

De même, la suite (c_l) tend vers l'infini; comme pour tout l, on a $b_l \neq c_l$ le lemme fondamental montre alors qu'il existe une fonction analytique sur V qu'on peut supposer être restrictive d'une fonction harmonique sur W) f_{N+1} telle que, pour tout l, on ait $f_{N+1}(b_l) \neq f_{N+1}(c_l)$ [il suffit, par exemple, de prendre f_{N+1} vérifiant $|f_{N+1}(b_l) - 2^l| \leqq \frac{1}{2}$ si $b_l \neq b_1, \ldots, b_{l-1}, c_l, \ldots, c_{l-1}$, et $|f_{N+1}(c_l) + 2^l| \leqq \frac{1}{2}$ si $c_l \neq b_1, \ldots, b_{l-1}, c_1, \ldots, c_{l-1}\Big]$.

Considérons alors les composantes irréductibles de $\hat{M}'_{f_1, \ldots, f_{N+1}; i, j}$ qui rencontrent $(K_i \times K_j) \cap \complement D$; elles sont contenues dans les composantes de $\hat{M}'_{f_1, \ldots, f_N; i, j}$ qui rencontrent, cet ensemble, et, comme elles ne contiennent aucun point (b_l, c_l), cette inclusion est stricte; on a donc bien, d'après un résultat rappelé ci-dessus :

$$\dim M_{f_1, \ldots, f_{N+1}} < \dim M_{f_1, \ldots, f_N},$$

d'où le lemme et la proposition.

Pour achever la démonstration du théorème annoncé dans l'introduction, il nous reste à démontrer :

Proposition 3. — *Pour un entier N assez grand, il existe une application analytique $V \to R^N$ qui soit régulière en tout point de V.*

La démonstration est analogue à la précédente, mais un peu plus simple :

Soient $f_1, \ldots, f_N$, N fonctions analytiques sur V; d'après le théorème des fonctions implicites, pour que, en un point $a \in V$, elles définissent une application régulière, il faut et il suffit que, sur une carte locale de a, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, le rang de la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)$ soit égal à n au point image de a.

Considérons alors, dans $\mathcal{O}'_i$, les équations exprimant que la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)$ $(j = 1, \ldots, N;\ k = 1, \ldots, n)$ est de rang $< n$, et appelons $M_{f_1, \ldots, f_N}$ l'ensemble de ces équations pour tous les i. La proposition résultera, par récurrence, du lemme suivant :

Lemme 3. — *Si* $\dim M_{f_1, \ldots, f_N} \geqq 0$, *il existe n fonctions analytiques $f_{N+1}, \ldots, f_{N+n}$ telles qu'on ait*

$$\dim M_{f_1, \ldots, f_{N+n}} < \dim M_{f_1, \ldots, f_N}.$$

Choisissons, en effet, sur chaque composante irréductible de $\hat{M}'_{f_1, \ldots, f_N; i}$ rencontrant K_i un point $a \in K_i$; l'ensemble de tous ces points est dénombrable, et tout compact de V ne contient qu'un nombre fini d'entre eux; d'après le lemme fondamental, il existe alors n fonctions analytiques (qu'on peut supposer être des restrictions à V de fonctions harmoniques sur W) définissant une application $V \to R^n$ régulière en chacun des points a. Les $a \in K_i$

n'appartiennent donc pas aux composantes irréductibles de $\hat{M}'_{f_1,\ldots,f_{N+n};i}$ qui rencontrent K_i, et l'on a bien

$$\dim M_{f_1,\ldots,f_{N+n}} < \dim M_{f_1,\ldots,f_N},$$

d'où le résultat.

3. **Conséquences et remarques diverses.** — Pour simplifier, nous appellerons « plongeables » les variétés qui vérifient les hypothèses (et donc aussi les conclusions) du théorème énoncé dans l'introduction.

1° Voici tout d'abord quelques conséquences triviales de ce théorème :

a. Tout revêtement connexe d'une variété plongeable est plongeable (car il est trivialement muni d'un ds^2 analytique, et il est dénombrable à l'infini d'après le théorème de Poincaré-Volterra).

Plus généralement : toute variété analytique réelle connexe munie d'une application régulière en tout point dans une variété plongeable est elle-même plongeable (le fait qu'une telle variété est dénombrable à l'infini résulte d'un lemme de GRAUERT [4]); comme cas très particulier, les ouverts $\subset R^n$ seront donc plongeables (ce qui n'est pas absolument évident *a priori*).

b. Soit W un espace fibré principal analytique-réel plongeable; de fibre un groupe de Lie compact G et de base une variété V; par « moyenne », on obtient un ds^2 analytique sur W invariant de G, d'où un ds^2 analytique sur V; la variété V est donc aussi plongeable.

2° D'après la remarque 2, une variété analytique-réelle, compacte ou dénombrable à l'infini, munie d'une équation elliptique à coefficients analytiques est plongeable.

3° Soit V une variété plongeable, de dimension n; un procédé classique de WHITNEY [12] montre qu'on peut trouver une application analytique biunivoque et régulière en tout point de V dans R^{2n+1} (et par conséquent, d'après la proposition 1, une application analytique propre, biunivoque, et régulière en tout point de V dans R^{2n+2}, si V n'est pas compacte; il serait intéressant, d'ailleurs, de savoir si l'on peut ici remplacer $2n+2$ par $2n+1$, comme pour les plongements différentiables [12]).

Rappelons rapidement ce procédé : donnons-nous une application $V \to R^N$ ($N \geqq 2n+2$) analytique, propre, biunivoque, et régulière en tout point; soit W l'ensemble des directions des droites de R^N qui joignent deux points de l'image de V, et soit W' l'ensemble des directions de droites tangentes à cette image; dans l'espace projectif P^{N-1}, $W \cup W'$ est de mesure nulle; en projetant alors l'image de V sur un hyperplan convenable de R^N, parallèlement à une direction $\notin W \cup W'$, on obtiendra une application de V dans R qui possédera les propriétés voulues; d'où, par récurrence, le résultat.

4° D'après un théorème de H. Cartan [3*bis*], les « théorèmes A et B » de la théorie des faisceaux analytiques cohérents sont valables pour des