

BULLETIN DE LA S. M. F.

SIGERU MIZOHATA

Hypoellipticité des équations paraboliques

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 15-50

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__15_0

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITÉ DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES ;

PAR

SIGERU MIZOHATA.

1. Introduction — Cet article a pour but de démontrer l'hypoellipticité des équations paraboliques au sens de Petrowsky, dans le cas où les coefficients sont indéfiniment dérivables. Nous nous appuyons sur la méthode de la paramétrix ([3], I, p. 136-139).

Nous dirons que le système

$$(1.1) \quad \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(x, t) \frac{\partial^{k_0 + \dots + k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \partial x_n^{k_n}} u_j + g_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, N); \quad (k_0 < n_j, n_i > 0)$$

est *parabolique* ou *P-parabolique* dans un ouvert $\Omega \subset (x, t)$ ([2]), si :

1° il existe un nombre entier P tel que

$$k_0 P + \sum_{s=1}^n k_s \leq n_j P;$$

2° les parties réelles des racines λ du déterminant de la matrice

$$\left(\sum_{((k))_P} a_{ij}^{(k_0, \dots, k_n)}(x, t) \lambda^{k_0} (i\xi_1)^{k_1} \dots (i\xi_n)^{k_n} \right) - \begin{pmatrix} \lambda^{n_1} & & & \\ & \lambda^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n_N} \end{pmatrix},$$

où $((k))_P$ désigne la sommation des termes tels que

$$k_0 P + \sum_{s=1}^n k_s = n_j P,$$

sont toujours inférieures à $-\delta$ (δ , positif quelconque) quand $(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi$

parcourt la sphère $|\xi| = 1$, et quand (x, t) parcourt Ω . Nous supposons les coefficients *indéfiniment dérivables* en (x, t) , et nous allons démontrer le

THÉOREME. — Soient $g_i (i=1, 2, \dots, N)$ des fonctions *indéfiniment dérivables* dans Ω , alors toute distribution $U = (u_1, \dots, u_N)$, solution de l'équation (1.1), est une fonction *indéfiniment dérivable*.

Pour simplifier, nous considérons en détail le cas $N=1$, $n_i=1$, et ensuite le cas général.

Nous nous servirons désormais des notations du calcul symbolique [1]. Nous écrirons p_i au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ou encore $p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n}$ au lieu de $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\gamma_n}$.

Les distributions que nous allons considérer ne sortent jamais du cadre des distributions tempérées [3] ou plutôt de celui de l'espace $\mathcal{O}'_L$, de sorte qu'on peut définir non seulement les dérivées de $f : p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} f$, mais aussi $\tau_s(p)f = (1 - p_1^2 - \dots - p_n^2)^s f$ ($-\infty < s < +\infty$), en s'appuyant sur la transformation de Fourier. Nous écrivons la définition de l'opérateur $\tau_s(p)$: Soit f tempéré; φ sa transformée de Fourier; alors $(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^s \varphi \in (\mathcal{S})'_\xi$; donc, on définit $\tau_s(p)f$ comme l'image réciproque (de Fourier) de cette distribution ([3], [1]). Les notations des espaces $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}'_L$, $\mathcal{O}$, $\dots$, sont celles de L. SCHWARTZ [3].

Considérons maintenant le cas $N=1$, $n_i=1$:

$$(1.2) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\gamma| \leq p} q_\gamma(x, t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \right] U = V.$$

Puisque la propriété que nous allons démontrer est une propriété locale, nous pouvons supposer que :

1° les coefficients sont indéfiniment dérivables en (x, t) , et de plus toutes les dérivées en t :

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} q_\gamma(x, t) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

sont des fonctions continues en t à valeurs dans $(\mathcal{O})_x$.

2°

$$(1.3) \quad \text{Partie réelle} \sum_{|\gamma| = p} q_\gamma(x, t) (i\xi)^\gamma \leq -\delta |\xi|^p \quad (\delta > 0).$$

Nous considérons (1.2) comme équation d'évolution,

$$(1.4) \quad \frac{d}{dt} u(t) - \sum_{|\gamma| \leq p} q_\gamma(x, t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} u(t) = v(t),$$

ou en notant $q(x, t, p) = \sum q_v(x, t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n}$,

$$(1.5) \quad \left[\frac{d}{dt} - q(x, t, p) \right] u(t) = v(t).$$

Décomposons l'opérateur $q(x, t, p)$ en deux parties :

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} u(t) - \left[\sum_{|\gamma|=P} q_v(0, t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} + q_\varepsilon(x, t, p) \right] u(t) = v(t);$$

$$q_\varepsilon(x, t, p) = q(x, t, p) - \sum_{|\gamma|=P} q_v(0, t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n}.$$

Considérons la suite des distributions : $f_0(t), f_1(t), \dots, f_i(t), \dots$ où les $f_i(t)$ sont des solutions de

$$(1.7) \quad \left[\frac{d}{dt} - \sum_{|\gamma|=P} q_v(t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \right] f_i(t) = q_\varepsilon(x, t, p) f_{i-1}(t) \\ (i=1, 2, \dots)$$

[on a écrit $q_v(t)$ au lieu de $q_v(0, t)$], avec $f_0(t) = R_x(t, 0)$, et avec les conditions initiales $f_i(0) = 0$ ($i=1, 2, \dots$). $\left[R_x(t, 0) \right]$ est solution élémentaire de l'équation parabolique $\frac{d}{dt} - \sum q_v(t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n}$, c'est-à-dire que $R_x(t, 0)$ ($t \geq 0$) est la solution unique de

$$\left[\frac{d}{dt} - \sum q_v(t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \right] R_x(t, 0) = 0$$

avec la condition initiale $R_x(0, 0) = \delta_x$. En effet, nous savons déjà que, pour (1.7), le problème de Cauchy pour l'avenir est *bien posé* dans $(\mathcal{S})$, (voir [2]). Alors, on a ([4], p. 31, (10.5)),

$$(1.8) \quad f_i(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p) f_{i-1}(\tau) d\tau, \quad (t \geq 0).$$

Les $f_i(t)$ ne sont définies que pour $t \geq 0$. On les prolonge par zéro pour $t < 0$. Nous les écrivons, par abus de langage $Y(t) f_i(t)$.

Compte tenu de ce que $f_0(0) = \delta_x$, $f_i(0) = 0$ ($i=1, 2, \dots$), on voit que, en notant $D = \frac{\partial}{\partial t} - q(x, t, p)$,

$$(1.9) \quad DY(t) [f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_i(t)] = -q_\varepsilon(x, t, p) Y(t) f_i(t) + \delta_x \times \delta_t.$$

Cette formule nous suggère une méthode pour obtenir des paramétrix. En effet, comme nous le montrerons, les $Y(t) f_j(t)$ sont des fonctions continues

indéfiniment différentiables dans le complémentaire de l'origine [dans l'espace (x, t)] et de plus $f_i(t)$ devient aussi régulière (dans un sens à préciser) qu'on le veut, quand on augmente l'indice i .

Propriétés de $\mathcal{F}R_x(t, \tau)$ ($t \geq \tau$). — Désignons par $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ ($t \geq \tau \geq 0$) la transformée de Fourier (en x , pour t et τ fixés) de $R_x(t, \tau)$. Nous avons alors

$$(1.10) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) = \exp \left(\int_{\tau}^t \sum_{|\nu|=P} q_{\nu}(t') (2\pi i \xi)^{\nu} dt' \right) \quad (t \geq \tau).$$

L'inégalité (1.3) entraîne alors

$$(1.11) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) \leq \exp[-\delta |2\pi \xi|^P (t - \tau)].$$

Le calcul de dérivation montre que $p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau)$, où p_i désigne $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$, est une combinaison de termes tels que

$$(1.12) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) \prod_i \left(p_1^{k_1^{(i)}} \dots p_n^{k_n^{(i)}} \left(\int_{\tau}^t \sum_{|\nu|=P} q_{\nu}(t') (2\pi i \xi)^{\nu} dt' \right) \right),$$

où $k^{(1)} + k^{(2)} + \dots = \mu$, ($k^{(i)} > 0, i \leq |\mu|$). On le constate par induction mathématique.

LEMME 1.1. — *T étant fixé, alors nous avons pour $T \geq t > \tau \geq 0$,*

$$(i) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) \xrightarrow[t \searrow \tau]{} 1 \quad \text{pour tout } \xi; \quad |\mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leq 1.$$

$$(ii) \quad p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau) \xrightarrow[t \searrow \tau]{} 0 \quad \text{pour tout } \xi;$$

$$|p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leq \frac{c_{\mu}}{(1 + |\xi|)^{|\mu|}},$$

où c_{μ} est une constante qui ne dépend que de T ;

$$(iii) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) \text{ est une fonction indéfiniment différentiable en } t \text{ et } \tau, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \text{ à valeurs dans } (\mathcal{S})_{\xi}.$$

DÉMONSTRATION. — (i) est évident. Démontrons (ii). La première partie est une conséquence de (1.12). Démontrons la deuxième partie. Les formules (1.11) et (1.12) montrent que

$$(1.13) \quad |p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leq c_{\mu} \left[\sum_{s=s(\mu)}^{|\mu|} (t - \tau)^s |2\pi \xi|^{Ps - |\mu|} \right] \\ \times \exp[-\delta(t - \tau) |2\pi \xi|^P].$$

où $s(\mu)$ est le plus petit nombre entier s tel que $Ps \geq |\mu|$.

Nous n'avons qu'à vérifier la deuxième partie de (ii) pour $|\xi| \geq 1$, car le

second membre de (1.13) est borné pour ξ borné. Pour $|\xi| \geq 1$, posons $(t - \tau) |2\pi\xi|^p = \eta$; alors le second membre de (1.13) devient

$$c_\mu \frac{1}{|\xi|^{|\mu|}} \left[\sum_{s=s(\mu)}^{|\mu|} \eta^s \right] \exp(-\partial\eta).$$

Or, $\eta^s \exp(-\partial\eta)$ est borné pour $\eta \geq 0$, d'où l'inégalité de (ii).

Démontrons (iii). Comme il est évident que $\mathcal{R}(\xi; t, \tau) \in (\mathcal{S})_\xi$, ainsi que toutes les dérivées en t et τ , pour $t > \tau$, il reste à démontrer que $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable en t, τ à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi$. Démontrons la continuité en t et τ . Prenons t_0, τ_0 tels que $t_0 > \tau_0$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\xi; t, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau_0) &= [\mathcal{R}(\xi; t, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau)] \\ &\quad + [\mathcal{R}(\xi; t_0, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau_0)]. \end{aligned}$$

Considérons le premier terme du second membre :

$$\mathcal{R}(\xi; t, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau) = \left\{ \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{|\nu|=p} q_\nu(t') (2\pi i \xi)^\nu dt' \right) - 1 \right\} \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau).$$

Pour ξ borné, $\mathcal{R}(\xi; t, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau)$ tend uniformément vers zéro lorsque $t \rightarrow t_0$. D'autre part, comme

$$|t_0 - \tau| \geq \frac{2}{3}(t_0 - \tau_0), \quad |t - t_0| \leq \frac{1}{3}(t_0 - \tau_0),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau) &\leq \exp \left[-\frac{2}{3} \partial |2\pi\xi|^p |t_0 - \tau_0| \right], \\ \left| \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{|\nu|=p} q_\nu(t') (2\pi i \xi)^\nu dt' \right) - 1 \right| &\leq \exp[\partial |2\pi\xi|^p |t - t_0|] + 1, \end{aligned}$$

donc, pour ξ non borné, $\mathcal{R}(\xi; t, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau)$ est majoré par $2 \exp \left[-\frac{1}{3} \partial |2\pi\xi|^p |t_0 - \tau_0| \right]$. Cela montre que, quel que soit $k \geq 0$, $(1 + |\xi|)^k [\mathcal{R}(\xi; t, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau)] \rightarrow 0$ uniformément par rapport à ξ lorsque $t \rightarrow t_0$, τ restant dans l'intervalle $|\tau - \tau_0| \leq \frac{1}{3}(t_0 - \tau_0)$.

Le même raisonnement montre qu'il en est de même de $\mathcal{R}(\xi; t_0, \tau) - \mathcal{R}(\xi; t_0, \tau_0)$ lorsque $\tau \rightarrow \tau_0$. Donc, quel que soit $k \geq 0$, $(1 + |\xi|)^k \mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ est continue en t et τ , $t > \tau$, pour la topologie de la convergence uniforme sur $(R^n)_\xi$. La formule (1.12) et le raisonnement que nous avons fait montreront qu'il en est de même de $p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ pour $t > \tau$, ce qui démontre que $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ est une fonction continue en t et τ , $t > \tau$, à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi$. Il en est de même de ces dérivées en t et τ .

C. Q. F. D.

2. Considérations préliminaires.

DÉFINITION DE $(\mathcal{B}_0)$. — $(\mathcal{B}_0)$ est le sous-espace de $(\mathcal{B})$ formé des fonctions $f(x)$ telles que $f(0) = 0$. On munit $(\mathcal{B}_0)$ de la topologie induite par $(\mathcal{B})$.

DÉFINITION. — Décomposition (N). — Soit $f(x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{B}_0)$. Alors en décomposant $f(x)$,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + [f(x_1, x_2, 0, \dots, 0) - f(x_1, 0, \dots, 0)] + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) \\ &\quad - f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0)] \end{aligned}$$

et en posant,

$$\begin{aligned} (2.1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) - f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0) \\ = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

nous dirons que

$$\begin{aligned} (2.2) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + x_2 f_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_n f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est la décomposition (N) de $f(x) \in (\mathcal{B}_0)$.

Nous devons démontrer le

LEMME 2.1. — L'isomorphisme $f(x) \rightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ de $(\mathcal{B}_0)$ dans $(\mathcal{B}) \times (\mathcal{B}) \times \dots \times (\mathcal{B})$ est une application continue.

DÉMONSTRATION. — Notre raisonnement s'appuie sur la formule de L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, t. I, p. 122 : Soit $f(x_1) \in (\mathcal{B}_0)$ alors $\varphi(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} \in (\mathcal{B})$; de plus, on a

$$\left| \frac{d^m}{dx_1^m} \varphi(x_1) \right| \leq k_m \max_{|t| \leq |x_1|} \left| \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} f(t) \right|,$$

où k_m est une constante qui ne dépend que de m . Donc, si $f_j(x_1) \rightarrow 0$ dans $(\mathcal{B}_0)$, alors $\varphi_j(x_1) \rightarrow 0$ dans $(\mathcal{B})$.

Cela étant, considérons $f(x_1; \lambda) \in (\mathcal{B}_0)$, où λ est un paramètre parcourant $R^k : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in R^k$. Posons

$$(2.3) \quad f(x_1; \lambda) = x_1 \varphi(x_1; \lambda), \quad \varphi(x_1; \lambda) \in (\mathcal{B}).$$

Alors, si $f(x_1; \lambda)$ dépend de λ de manière indéfiniment différentiable

dans $(\mathcal{B}_0)$, il en est de même de $\varphi(x_1; \lambda)$ dans $(\mathcal{B})$, et l'on a

$$(2.4) \quad \partial_\lambda f(x_1; \lambda) = x_1 \partial_\lambda \varphi(x_1; \lambda), \quad \text{où} \quad \partial_\lambda = \frac{\partial^{v_1+\dots+v_k}}{\partial \lambda_1^{v_1} \dots \partial \lambda_k^{v_k}}.$$

Dans la formule (2.1), considérons $(x_1, \dots, x_{i-1})$ comme paramètre; alors, nous écrivons (2.1) :

$$(2.5) \quad f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0) \\ = x_i \varphi(x_1, x_2, \dots, x_i) = x_i \varphi(x_i; x_1, \dots, x_{i-1}),$$

il en résulte que $\varphi(x_i; x_1, \dots, x_{i-1}) \in (\mathcal{B})_{x_i}$ dépend de $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ de manière indéfiniment différentiable. La formule (2.4) nous montre que $\partial_\lambda \varphi(x_i; \lambda) \in (\mathcal{B})_{x_i}$ dépend de λ de manière continue, c'est-à-dire que $\frac{\partial^{v_i}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_{i-1}^{v_{i-1}}} \frac{\partial^{v_1+\dots+v_{i-1}}}{\partial \lambda_1^{v_1} \dots \partial \lambda_{i-1}^{v_{i-1}}} \varphi(x_1, \dots, x_i)$ sont des fonctions continues ($|v| \geq 0$ quelconque). Comme les dérivations sont permutables dans ce cas,

$$\varphi(x_1, \dots, x_i) \equiv f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction indéfiniment dérivable. Or

$$(2.6) \quad \frac{\partial^{v_1+\dots+v_i}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_i^{v_i}} \varphi(x_1, \dots, x_i) = \frac{d^{v_i}}{dx_i^{v_i}} \frac{\partial^{v_1+\dots+v_{i-1}}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_{i-1}^{v_{i-1}}} \varphi(x_i; x_1, \dots, x_{i-1})$$

donc, en désignant par A cette quantité :

$$|A| \leq k_{v_i} \max_{|t| \leq |x_i|} \left| \frac{\partial^{v_1+\dots+v_{i+1}}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_i^{v_i+1}} B \right| \\ \leq k_{v_i} 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^{v_1+\dots+v_{i+1}}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_i^{v_i+1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|,$$

où

$$B = [f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, 0)]$$

c'est-à-dire, *a fortiori*

$$(2.7) \quad |p_1^{v_1} \dots p_i^{v_i} \dots p_n^{v_n} f_i(x)| \leq 2 k_{v_i} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |p_1^{v_1} \dots p_i^{v_i+1} \dots p_n^{v_n} f(x)|.$$

DÉFINITION. — Espace hilbertien D^s ($-\infty < s < +\infty$). On dit que $f \in D^s$, si f est tempérée et $\tau_s(p)f \equiv (1 - p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2)^{\frac{s}{2}} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On munit D^s du produit scalaire suivant :

$$(f, g)_{D^s} = \left(\tau_{\frac{s}{2}}(p)f, \tau_{\frac{s}{2}}(p)g \right) = (\tau_s(p)f, g).$$

Remarquons que, si $s' < s$, $D^{s'}$ est contenu dans D^s , avec une topologie plus fine.

LEMME 2.2. — Soit s entier quelconque; $a(x) \in (\mathcal{B})$, $f \in D^s$. Alors l'application $(a(x), f) \rightarrow a(x)f$ de $(\mathcal{B}) \times D^s$ dans D^s est continue.

Pour $s \geq 0$, ce lemme est évident, puisque $\|f\|^{D^s}$ est équivalente à $\sum_{0 \leq |\nu| \leq s} \|p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} f\|_{L^2}$. Pour le cas $s < 0$, nous remarquons d'abord que D^s n'est autre que l'espace dual de D^{-s} . Alors, pour $T \in D^s$, $\varphi(x) \in D^{-s}$, $a(x) \in (\mathcal{B})$, $\langle a(x)T, \varphi(x) \rangle = \langle T, a(x)\varphi(x) \rangle$. Comme l'application $a(x) \rightarrow a(x)\varphi(x)$ est continue de $(\mathcal{B})$ dans D^{-s} , le lemme est démontré.

Nous indiquons un lemme qui sera utile dans un autre article.

LEMME 2.3. — Soit q un entier positif quelconque, $f \in (\mathcal{O}'_L)$ et $c(x) \in (\mathcal{B})$,

$$(2.8) \quad \tau_{-q}(p)c(x)f = c(x)\tau_{-q}(p)f + \sum_{\substack{|\nu| \leq k \\ k=1,2,\dots,q}} p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p) c'_{\nu,k}(x) \tau_{-q}(p)f,$$

où les $c'_{\nu,k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$.

DÉMONSTRATION :

$$(1 - p_1^2 - \dots - p_n^2)c(x)f = c(x)(1 - p_1^2 - \dots - p_n^2)f - \left[\sum_{i=1}^n p_i^2 c(x) \right] f - 2 \sum_{i=1}^n \{p_i c(x)\} p_i f.$$

En remplaçant f par $(1 - p_1^2 - \dots - p_n^2)^{-1}f$ et en appliquant $\tau_{-1}(p)$ à gauche,

$$c(x)\tau_{-1}(p)f = \tau_{-1}(p) \left[c(x) - \left\{ \sum_{i=1}^n p_i^2 c(x) \right\} \tau_{-1}(p) - 2 \sum_{i=1}^n \{p_i c(x)\} p_i \tau_{-1}(p) \right] f.$$

Par récurrence,

$$c(x)\tau_{-q}(p)f = \tau_{-q}(p) \left[c(x) + \sum_{\substack{|\nu| \leq k \\ k=1,2,\dots,q}} c'_{\nu,k}(x) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p) \right] f,$$

où les $c'_{\nu,k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$. Comme $f \in (\mathcal{O}'_L)$, on a pour tout $\varphi(x) \in \mathcal{O}_L$, $\langle \tau_{-q}f, \varphi(x) \rangle = \langle f, \tau_{-q}\varphi(x) \rangle$. Donc, en considérant deux opérateurs transposés de la formule précédente, nous avons (2.8).

DÉFINITION. — Espace $\mathcal{O}^s$ ($-\infty < s < +\infty$) $f \in \mathcal{O}^s$, si $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} f \in D^{s+|\nu|}$ pour tout $|\nu| \geq 0$. On munit $\mathcal{O}^s$ de la topologie suivante : $f_j \rightarrow 0$ dans $\mathcal{O}^s$, si $x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} f_j \rightarrow 0$ dans $D^{s+|\nu|}$, pour tout $|\nu| \geq 0$. $\mathcal{O}^s$ est un espace $(\mathcal{F})$.

EXEMPLES : $\partial \in \mathcal{O}^s$, où $s < -\frac{n}{2}$. $e^{-r} \in \mathcal{O}^s$, où $s \leq 1$.

PROPOSITION 2.1. — $a(x) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{O}^s$ ($-\infty < s < +\infty$), alors l'application $(a(x), f) \rightarrow a(x)f$ de $(\mathcal{B}) \times \mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^s$ est continue.

DÉMONSTRATION. — Dans le cas s entier, cette proposition est évidente en vertu du lemme 2.2. Dans le cas s non entier, décomposons $a(x)$:

$$(N) \quad a(x) = a(0) + \sum_{i=1}^n x_i a_i(x), \quad a_i(x) \in (\mathcal{B}).$$

Donc,

$$a(x)f = a(0)f + \sum_{i=1}^n a_i(x) x_i f.$$

Comme les espaces $(\mathcal{B})$ et $\mathcal{O}^s$ sont des espaces $(\mathcal{F})$, il suffit de démontrer la continuité séparée (voir N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques*, livre III, chapitre IX, paragraphe 5, exercice 22).

Démontrons maintenant que, si $f_j \rightarrow 0$ dans $\mathcal{O}^s$, $a(x)$ fixé, alors $a(x)f_j \rightarrow 0$ dans $\mathcal{O}^s$.

Pour $a(0)f_j$, le problème ne se pose pas. Pour les deuxièmes termes, comme $x_i f_j \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dans $\mathcal{O}^{s+1}$, *a fortiori* dans $\mathcal{O}^{[s]+1}$, où $[s]$ est

le plus grand nombre entier tel que $[s] \leq s$, alors, la suite $\left(\sum_{i=1}^n a_i(x) x_i \right) f_j$

converge vers zéro dans $\mathcal{O}^{[s]+1}$, *a fortiori* dans $\mathcal{O}^s$. Deuxièmement supposons que $a(x) \rightarrow 0$ dans $(\mathcal{B})$, alors en vertu du lemme 2.1, $a_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) $\rightarrow 0$

dans $(\mathcal{B})$, donc, comme $x_i f \in \mathcal{O}^{s+1}$, *a fortiori* $\in \mathcal{O}^{[s]+1}$, $\sum_{i=1}^n a_i(x) x_i f \rightarrow 0$

dans $\mathcal{O}^{[s]+1}$, *a fortiori* dans $\mathcal{O}^s$.

C. Q. F. D.

Par définition, on voit que :

- a. les applications $f \rightarrow x_i f$ ($i = 1, \dots, n$) de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s+1}$ sont continues ;
- b. les applications $f \rightarrow p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} f$ de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s-|\nu|}$ sont continues.

Preuve de b :

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} (p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} f) = \sum_{\substack{(0 \leq i \leq \lambda) \\ (0 \leq i \leq \nu)}} c_{i_1 \dots i_n} p_1^{\nu_1 - i_1} \dots p_n^{\nu_n - i_n} (x_1^{\lambda_1 - i_1} \dots x_n^{\lambda_n - i_n} f).$$

En tenant compte du fait que $p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n}$ est une application continue de D^s dans $D^{s-|\mu|}$, on vérifie b.

Compte tenu de a, du lemme 2.1, et de la proposition 2.1, nous énonçons :

PROPOSITION 2.2. — Soient $a(x) \in (\mathcal{B}_0)$, $f \in \mathcal{O}^s$ ($-\infty < s < +\infty$), alors l'application $(a(x), f) \rightarrow a(x)f$ de $(\mathcal{B}_0) \times \mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s+1}$ est continue.

DEMONSTRATION. — La décomposition (N) nous donne

$$a(x)f = \sum_{i=1}^n a_i(x) x_i f.$$

C. Q. F. D.

Il y a une autre propriété remarquable de l'espace $\mathcal{O}^s$ que voici :

PROPOSITION 2.3. — Soit ω un ouvert tel que $0 \notin \bar{\omega}$.

L'application : $f \xrightarrow{\text{restriction}} f_\omega$ de $\mathcal{O}^s$ (s quelconque) dans $\mathcal{O}_L(\omega)$ est continue.

DÉMONSTRATION. — L'application $f \rightarrow r^{2k}f$ est continue de $\mathcal{O}^s$ dans $D^{[s]+2k}$.

Pour $[s] + 2k \geq 0$, l'opérateur de restriction est continu. Comme $\frac{1}{r^{2k}} \in \mathcal{B}(\omega)$, $f \rightarrow f_\omega$ est continue de $\mathcal{O}^s$ dans $D^{[s]+2k}(\omega)$, et k est arbitraire.

C. Q. F. D.

3. Nouveaux espaces fonctionnels.

DÉFINITION 3.1. — $\mathcal{O}^s[a, b]$ est l'ensemble des applications continues $t \rightarrow f(t)$ de $[a, b]$ dans $\mathcal{O}^s$. On le munit de la topologie de la convergence uniforme sur $[a, b]$. C'est un espace $(\mathcal{F})$. On désigne par $\mathcal{O}_0[a, b]$ le sous-espace de $\mathcal{O}^s[a, b]$ formé des applications telles que $f(a) = 0$.

PROPOSITION 3.1. — Soit

$$g(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau) d\tau, \quad T \geq t \geq 0.$$

Alors, l'application $f \rightarrow g$ de $\mathcal{O}^s[0, T]$ dans $\mathcal{O}_0^{s+\alpha}[0, T]$ est continue pour $\alpha < 1$ quelconque.

DÉMONSTRATION :

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} g(t) = \int_0^t \sum_{\mu} c_{\mu} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau) \star_{(x)} x_1^{\lambda_1 - \mu_1} \dots x_n^{\lambda_n - \mu_n} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau) d\tau.$$

Tous les coefficients de $q_\varepsilon(x, t, p)$ appartiennent à $(\mathcal{B})_x$ et sont continus en t ; de plus, comme tous les coefficients correspondant aux dérivations d'ordre P appartiennent à $(\mathcal{B})_x$, c'est-à-dire qu'ils s'annulent à l'origine, alors en vertu du lemme 2.1, les propositions 2.1, 2.2 et la propriété b du chapitre 2 nous montrent que l'application $f(t) \rightarrow x_1^{\lambda_1 - \mu_1} \dots x_n^{\lambda_n - \mu_n} q_\varepsilon(x, t, p) f(t)$ de $\mathcal{O}^s[0, T]$ dans $\mathcal{O}^{s+1-P+|\lambda|-|\mu|}[0, T]$ est continue.

En désignant par $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ ($t \geq \tau$) la transformée de Fourier (en x , pour t et τ fixés) de $R_x(t, \tau)$, nous avons

$$(3.1) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) = \exp \left(\int_{\tau}^t \sum_{\nu} q_{\nu}(t') (2\pi i \xi)^{\nu} dt' \right) \quad (t \geq \tau).$$

Compte tenu de l'inégalité (1.3), nous avons

$$(3.2) \quad |(t-\tau)^{\alpha'} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leq c_{\mu, \alpha'} (1 + |2\pi\xi|)^{-\alpha'P - |\mu|} \quad (t \geq \tau).$$

En effet, dans la démonstration du lemme 1.1, (ii), nous avons la démonstration, compte tenu de $(t-\tau)^{\alpha'} = \eta^{\alpha'} |2\pi\xi|^{-\alpha'P}$.

Nous avons démontré (lemme 1.1) que $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ est continue en t et τ , $t > \tau$, pour la topologie de $(\mathfrak{S})_\xi$, donc en vertu de (3.2), $(1 + |2\pi\xi|)^{\alpha'P + |\mu|} \mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ est continue en t et τ et bornée ($t > \tau$), pour la topologie de $(\mathcal{B}^0)_\xi$, où $(\mathcal{B}^0)_\xi$ est l'espace des fonctions continues bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme sur R_ξ^n . Ce qui revient à dire que [voir l'étape α de la démonstration de la proposition 4.1, en effet, nous avons pour tout $f \in D^s$,

$$\|R \star f\|_{D^{s+\sigma}} \leq C_\sigma \sup_{\xi \in R_\xi^n} \{ (1 + |\xi|)^\sigma r(\xi) \} \|f\|_{D^s}$$

où $r(\xi)$ est la transformée de Fourier de R], l'opérateur

$$(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau) \star_{(x)}$$

est continu en t et τ ($t > \tau$) est borné pour la topologie de $\mathcal{L}_b(D^s, D^{s+\alpha'P+|\mu|})$, où $\mathcal{L}_b(E, F)$ est l'espace des applications continues de E dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée de E . Sauf mention expresse, nous écrirons simplement $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{L}_b$.

Alors, l'application $f(t) \rightarrow g(t)$ de $D^s[0, T]$ dans $D^{s+\alpha'P+|\mu|}[0, T]$, $\alpha' < 1$: $g(t) = \int_0^t x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau) \star_{(x)} f(\tau) d\tau$ est continue. En effet, on peut écrire,

$$g(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau) \star_{(x)} f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha'}} d\tau \quad (\alpha' < 1).$$

Les propriétés de l'opérateur $(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau) \star_{(x)}$, et comme $\frac{1}{(t-\tau)^{\alpha'}}$, $\alpha' < 1$ est sommable en τ , nous montrent la propriété demandée. Cela montre que l'application $f(t) \rightarrow x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} g(t)$ de $\mathcal{O}^s[0, T]$ dans $D^{s+1-(1-\alpha')P+|\mu|}[0, T]$ est continue. Donc, l'application $f(t) \rightarrow g(t)$ de $\mathcal{O}^s[0, T]$ dans $\mathcal{O}^{s+1-(1-\alpha')P}[0, T]$ l'est. En posant $1 - (1 - \alpha')P = \alpha$, et comme $\alpha' < 1$ est quelconque, on a la proposition.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 3.2. — Soit

$$g(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau) d\tau; \quad \alpha < 1.$$

Hypothèse :

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) \in \mathcal{O}_0^{s-\nu p} [0, T] \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, k).$$

Conclusion :

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} g(t) \in \mathcal{O}_0^{s-\nu p+\alpha} [0, T] \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, k, k+1);$$

de plus, l'application

$$\left(f(t), \frac{d}{dt} f(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right) \rightarrow \left(g(t), \frac{d}{dt} g(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} g(t), \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g(t) \right)$$

est continue.

DÉMONSTRATION. — Remarquons que

$$(3.3) \quad \frac{d^l}{dt^l} R_x(t, \tau) = \sum_{|\nu| \leq l p} q_{\nu, l}(t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} R_x(t, \tau),$$

où les $q_{\nu, l}(t)$ sont des polynômes en $q_\nu(t)$, $q'_\nu(t)$, $\dots$, $q_\nu^{(l)}(t)$.

En effet,

$$\frac{d}{dt} R_x(t, \tau) = \sum_{\nu} q_\nu(t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} R_x(t, \tau);$$

par induction mathématique, (3.3) est évidente.

Cela étant,

$$\frac{d}{dt} g(t) = \int_0^t \frac{d}{dt} R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(t, \tau, p) f(\tau) d\tau + R_x(t, t) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, t, p) f(t),$$

comme $R_x(t, t) = \partial$, en désignant par $g_1(t)$ le second terme, on a

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} g_1(t) \in \mathcal{O}_0^{s-P(\nu+1)+1} [0, T] \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, k).$$

Donc, il suffit qu'on considère le premier terme. Et de proche en proche, il suffit qu'on démontre que

$$\int_0^t \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau) d\tau \in \mathcal{O}_0^{s-(k+1)p+\alpha} [0, T].$$

D'abord, $f(t) \in \mathcal{O}^s [0, T]$ entraîne

$$\int_0^t R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau) d\tau \in \mathcal{O}_0^{s+\alpha} [0, T],$$

d'où, compte tenu de (3.3), et de $p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \int_0^t \in \mathcal{O}_0^{s+\alpha-|\gamma|}[0, T]$, donc, $\in \mathcal{O}_0^{s-(k+1)p+\alpha}[0, T]$ comme les $q_{\nu,l}(t)$ sont des fonctions continues en t , nous avons donc la démonstration. C. Q. F. D.

Si $f(t) \in \mathcal{O}_0^s[0, T]$, alors en posant $\mathcal{L}f(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon f(\tau) d\tau$, nous avons,

$$\begin{aligned} f(t) \in \mathcal{O}_0^s[0, T] &\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}f(t) \in \mathcal{O}_0^{s+\alpha}[0, T] \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}f(t) \in \mathcal{O}_0^{s+\alpha-p}[0, T] \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{d'}{dt'} \mathcal{L}^2 f(t) \in \mathcal{O}_0^{s+2\alpha-\nu p}[0, T] \quad (\nu = 0, 1, 2) \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d'}{dt'} \mathcal{L}^k f(t) \in \mathcal{O}_0^{s+k\alpha-\nu p}[0, T], \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, k) \\ &\Rightarrow \dots \end{aligned}$$

et de plus ces diverses applications sont continues.

Le lemme 1.1 donne le

LEMME 3.1. — $R_x(t, 0) \in \mathcal{O}^s[0, T]$, où $s < -\frac{n}{2}$.

DÉMONSTRATION. — Le lemme 1.1, (iii) montre que, pour $t > 0$, $R_x(t, 0)$ est une fonction continue en t à valeurs dans $(\mathcal{S})_x$.

Il suffit donc de démontrer que, pour $s < -\frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{R}(\xi; t, 0) &\rightarrow (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} 1; \\ (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{\frac{s}{2} + \frac{|\mu|}{2}} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, 0) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

lorsque $t \rightarrow 0$, pour la topologie de $L^2(R_\xi^n)$, ce qui est une conséquence immédiate de (i) et (ii) du lemme 1.1. C. Q. F. D.

On sait que $f \rightarrow f_\omega$ est continue de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}_{L^2}(\omega)$ (proposition 2.3). Alors, par (3.3)

$$\frac{d'}{dt'} f_i(t) \in \mathcal{O}^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1-lp}[0, T],$$

et pour $t = 0$, elle est concentrée à l'origine. En effet, (3.3) montre que

$$\frac{d'}{dt'} R_x(t, 0) = \sum q_{\nu,l}(t) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} R_x(t, 0),$$

donc, comme $R_x(0, 0) = \delta$, $\frac{d^l}{dt^l} R_x(0, 0)$ a son support à l'origine.

$$f_i(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p) f_{i-1}(\tau) d\tau,$$

montre que, compte tenu de (3.3), si $f_{i-1}(0)$ a son support à l'origine, $f_i(0)$ l'est aussi. Donc

$$\frac{d^l}{dt^l} f_i(t) \in \mathcal{O}_{L^1, 0}(\omega)[0, T].$$

Nous avons donc, en prolongeant $f_i(t)$ par zéro pour $t < 0$, la

PROPOSITION 3.3. — Soit ω un ouvert tel que $0 \notin \bar{\omega}$, alors

$$\left[\frac{d^l}{dt^l} f_i(t) \right]_\omega \in \mathcal{O}_{L^1}(\omega)[-\infty, T] \quad \left(\begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots \\ i = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

Maintenant, pour voir une autre nature de $f_0(t), f_1(t), \dots, t \in [0, T]$.

DÉFINITION. — L'espace $\mathcal{E}^s[0, T]$ est l'ensemble des $f(t)$ telles que $f(t) \in \mathcal{O}^s[0, T]$ et de plus, $f(t) \in D^\infty[\varepsilon, T]$, ε positifs quelconques. On le munit de la topologie suivante : $f_j(t) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{E}^s[0, T]$, si $f_j(t) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{O}^s[0, T]$, et de plus, $f_j(t) \rightarrow 0$ dans $D^\infty[\varepsilon, T]$, quel que soit $\varepsilon > 0$. C'est un espace ($\mathcal{F}$).

Remarquons que $R_x(t, 0) \in \mathcal{E}^s[0, T]$, avec $s < -\frac{n}{2}$ (lemmes 1.1 et 3.1).

On voit facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — Soit $g(t) = \mathcal{L} f(t)$, alors l'application $\mathcal{L} : f(t) \rightarrow g(t)$ de $\mathcal{E}^s[0, T]$ dans $\mathcal{E}^{s+\alpha}[0, T]$ ($\alpha < 1$) est continue. En outre l'application $\left(f(t), \frac{d}{dt} f(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right) \rightarrow \left(\mathcal{L} f(t), \frac{d}{dt} \mathcal{L} f(t), \dots, \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \mathcal{L} f(t) \right)$, où $\frac{d^v}{dt^v} f(t) \in \mathcal{E}^{s-vp}[0, T]$, et $\frac{d^v}{dt^v} \mathcal{L} f(t) \in \mathcal{E}^{s-vp+\alpha}[0, T]$, est continue.

DÉMONSTRATION. — Démontrons seulement le cas $f(t) \rightarrow g(t)$. Nous n'avons qu'à démontrer que $g(t) \in D^\infty[\varepsilon, T]$, et que l'application $f \rightarrow g$ de $\mathcal{E}^s[0, T]$

dans $D^\infty[\varepsilon, T]$ est continue. Décomposons l'intégrale $\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} d\tau + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^t d\tau$, alors,

dans le premier $R_x(t, \tau) \in (\mathcal{S})$, et continue en t, τ ; dans le second $f(t) \in D^\infty$.

4. Différentiabilité. — Considérons maintenant le cas où $q_v(t)$ ($|v| = P$), et les coefficients de $q_\varepsilon(x, t, p)$ dépendent du paramètre $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$, où λ parcourt R^{n+1} .

1° Nous dirons que $q_\nu(t; \lambda)$ ($|\nu| = P$) dépendent continûment (resp. de manière indéfiniment différentiable) de λ , si $q_\nu(t; \lambda)$ gardent toujours l'inégalité (1.3) et qu'elles, et toutes leurs dérivées en t , sont continues en λ (resp. indéfiniment différentiables) pour la topologie de $C[0, T]$ c'est-à-dire pour la topologie de la convergence uniforme sur $[0, T]$ de toutes les dérivées en t .

2° Nous dirons que $a(x, t; \lambda)$ dépend continûment (resp. de manière indéfiniment différentiable) de λ , si elle, et toutes ses dérivées en t , dépendent de λ continûment (resp. de manière indéfiniment différentiable) pour la topologie $(\mathcal{B})_x[0, T]$.

Alors, considérons

$$\mathcal{L}(\lambda)f(t) = \int_0^t R_x(t, \tau; \lambda) \star_{(x)} q_\varepsilon(x, \tau, p; \lambda) f(\tau) d\tau,$$

où : 1° $q_\nu(t; \lambda)$ ($|\nu| = P$) dépendent de λ de manière indéfiniment différentiable au sens de 1°;

2° $q_\varepsilon(x, t, p; \lambda)$: les coefficients dépendent de λ de manière indéfiniment différentiable au sens de 2°; de plus, les coefficients correspondant aux dérivées d'ordre P , s'annulent toujours à l'origine c'est-à-dire $\in (\mathcal{B}_0)_x$. Alors nous avons la

PROPOSITION 4.1. — 1° Soit $g(t; \lambda) = \mathcal{L}(\lambda)f(t; \lambda)$, alors si $f(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{O}^s[0, T]$, $g(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans $\mathcal{O}^{s+\alpha}[0, T]$, où $\alpha < 1$ quelconque; $f_0(t; \lambda) = R_x(t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans $\mathcal{O}^s[0, T]$, $s < -\frac{n}{2}$.

2° Si $f(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{O}_0^s[0, T]$, alors de proche en proche

$$\begin{aligned} f(t; \lambda) \in \mathcal{O}_0^s[0, T] &\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(\lambda)f(t; \lambda) \in \mathcal{O}_0^{s+\alpha}[0, T] \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}(\lambda)f(t; \lambda) \in \mathcal{O}_0^{s+\alpha-P}[0, T] \end{cases} \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d^v}{dt^v} \mathcal{L}(\lambda)^k f(t; \lambda) \in \mathcal{O}_0^{s+k\alpha-\nu P}[0, T] \Rightarrow \dots \\ &(\nu = 0, 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

3° $\left[\frac{d^l}{dt^l} f_i(t; \lambda) \right]_\omega \in \mathcal{O}_{L^1(\omega)}[-\infty, T]$ est indéfiniment différentiable en λ , où $0 \notin \bar{\omega}$.

4° $\frac{d^l}{dt^l} f_i(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{E}^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1+i\alpha-lP}[0, T]$, où $\alpha < 1$ quelconque.

DÉMONSTRATION DE 1°. — Divisons la démonstration en trois étapes :

a. Soit S tempérée, telle que la transformée par Fourier soit une fonction continue, et que de plus, on ait

$$(4.1) \quad |\mathcal{S}(\xi)| \leq c(1 + 2\pi|\xi|)^{-\sigma} \quad [\mathcal{S}(\xi) \text{ étant la transformée de } S].$$

Alors, si $f \in D^s$ (s réel quelconque), nous avons, $S \star f \in D^{s+\sigma}$; plus précisément si l'on définit l'espace des S par la condition (4.1), avec la norme $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(1 + 2\pi|\xi|)^\sigma \mathcal{S}(\xi)|$, alors, l'application $(S, f) \rightarrow S \star f$ est continue. En effet, $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(\xi)$, alors

$$\varphi(\xi) = (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \psi(\xi), \quad \|f\|_{D^s} = \|\psi(\xi)\|_{L^s}.$$

Or,

$$S \star f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{S}(\xi) \varphi(\xi) = (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\frac{\sigma}{2} - \frac{s}{2}} \left[(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \mathcal{S}(\xi) \right] \psi(\xi).$$

Compte tenu de

$$\|S \star f\|_{D^{s+\sigma}}^2 = \int \cdots \int \left| (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \mathcal{S}(\xi) \psi(\xi) \right|^2 d\xi,$$

et de

$$(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \leq (1 + 2\pi|\xi|)^\sigma \leq 2^{\frac{\sigma}{2}} (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}},$$

selon qu'on a $\sigma \geq 0$ ou ≤ 0 . Donc,

$$(4.2) \quad \|S \star f\|_{D^{s+\sigma}} \leq c_\sigma \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(1 + 2\pi|\xi|)^\sigma \mathcal{S}(\xi)| \|f\|_{D^s},$$

où $\mathcal{S}(\xi)$ était la transformée de S .

b. Nous montrons que, pour la fonction

$$(4.3) \quad (1 + 2\pi|\xi|)^{\rho\alpha + |\mu|} (t - \tau)^{\alpha'} p_1^{\mu_1} \cdots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda),$$

toutes les dérivées en λ sont des fonctions continues et *bornées* en (t, τ, λ) ($t > \tau$), à valeurs dans $(\mathcal{B})_{\xi}^0$. Il y a plus. Toutes les dérivées en λ de $\mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda)$ sont, pour $t - \tau > \varepsilon > 0$, des fonctions continues de (t, τ, λ) à valeurs dans $(\mathcal{B})_{\xi}$.

$p_1^{\mu_1} \cdots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda)$ est une combinaison linéaire de termes tels que

$$(4.4) \quad \mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda) \prod_i \left\{ p_1^{k_i^{(1)}} \cdots p_n^{k_i^{(i)}} \left(\int_{\tau}^t \sum_{|\nu|=p} q_\nu(t'; \lambda) (2\pi i \tilde{z})^\nu dt' \right) \right\},$$

où $k^{(1)} + k^{(2)} + \cdots = \mu$, ($k^{(i)} > 0$) [voir (1.12)].

A partir de (4.4), nous aurons l'expression de chaque dérivée de λ .

Les dérivées en λ d'ordre q de $\mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda)$ se majorent par

$$c_q \left[\sum_{s=1}^q (t-\tau)^s |\xi|^{Ps} \right] \mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda),$$

et l'on a

$$|\mathcal{R}(\xi; t, \tau; \lambda)| \leq \exp[-\delta |2\pi\xi|^p(t-\tau)].$$

D'autre part, dans (4.4) le deuxième facteur s'écrit

$$\prod_i \left\{ \sum_{|\nu|=p} p^{k_{i\nu}} (2\pi i \xi)^\nu \int_\tau^t q_\nu(t'; \lambda) dt' \right\}.$$

Ceci montre que les dérivées en λ du deuxième facteur se majorent par

$$k_q \left[\sum_{s=s(\mu)}^q (t-\tau)^s |2\pi\xi|^{Ps-|\mu|} \right].$$

Ces deux majorations montrent que, en posant $(t-\tau) |2\pi\xi|^p = \eta$, par le même raisonnement que dans la proposition 3.1, toutes les dérivées de λ de (4.3) sont des fonctions *bornées* en (t, τ, λ) à valeurs dans $(\mathcal{B}^0)_\xi$. Nous laissons au lecteur la démonstration de la continuité dans $(\mathcal{S})_\xi$.

c. En vertu de *a* et de *b*, l'opérateur $(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau; \lambda) \star_{(x)} f(\tau; \lambda)$, $(t > \tau)$, est une fonction indéfiniment différentiable de λ , et dont toutes les dérivées en λ sont des fonctions continues et bornées de (t, τ, λ) $(t > \tau)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(D^s, D^{s+P\alpha'+|\mu|})$. Alors, si $f(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $D^s[0, T]$, $(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau; \lambda) \star_{(x)} f(\tau; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ , dont toutes les dérivées sont des fonctions continues et bornées en (t, τ, λ) à valeurs dans $D^{s+P\alpha'+|\mu|}$. Alors, nous refaisons le raisonnement de la proposition 3.1.

$$\begin{aligned} g(t; \lambda) &= \int_0^t x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau; \lambda) \star_{(x)} f(\tau; \lambda) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau; \lambda) \star_{(x)} f(\tau; \lambda)}{(t-\tau)^{\alpha'}} d\tau \end{aligned}$$

est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $D^{s+P\alpha'+|\mu|}[0, T]$. D'autre part, comme les applications $(a(x), f) \rightarrow a(x)f$ de $(\mathcal{B}_0) \times \mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s+1}$, $f \rightarrow p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} f$ de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s-|\gamma|}$, sont continues, l'application $(a(x), f) \rightarrow a(x) p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} f$ de $(\mathcal{B}_0) \times \mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s+1-|\gamma|}$ sont continue. Cela entraîne, si $f(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{O}^s[0, T]$, et si $q_\varepsilon(x, t, p; \lambda)$ dépend de λ au sens de 2° ,

alors $q_\varepsilon(x, t, p; \lambda) f(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{O}^{s+1-P}[0, T]$.

Envisageons la formule

$$\begin{aligned} & x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} g(t; \lambda) \\ &= \int_0^t \sum_{\mu} c_{\mu} x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau; \lambda) \star_{(x)} x_1^{\gamma_1 - \mu_1} \dots x_n^{\gamma_n - \mu_n} q_\varepsilon(x, \tau, p; \lambda) f(\tau; \lambda) d\tau. \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que l'application $f \rightarrow x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} f$ de $\mathcal{O}^s[0, T]$ dans $D^{s+|\gamma|}[0, T]$ est continue, la fonction à convoluer est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans $D^{s+1-P+|\gamma|-|\mu|}[0, T]$. La fonction $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} g(t; \lambda)$ est donc une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $D^{s+1-(1-\alpha')P+|\gamma|}[0, T]$. En posant $\alpha = 1 - (1 - \alpha')P$, nous avons la démonstration.

Démontrons la deuxième partie de 1°. Il suffit de démontrer que, s étant $< -\frac{n}{2}$, $(1 + |\xi|)^{s+|\mu|} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$. Nous le montrons pour $(1 + |\xi|)^s \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$. D'après l'expression

$$\mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda) = \exp\left(\int_0^t \sum q_v(t'; \lambda) (2\pi i \xi)^v dt'\right),$$

on voit facilement que les dérivées premières en λ prises pour t fixé $\in L^2(R_\xi^n)$, pour $t \geq 0$, et de plus elles sont continues en t à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)$. En effet, comme nous l'avons observé, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi[\varepsilon, T]$. Il suffit donc de démontrer que, lorsque $t \rightarrow 0$, $(1 + |\xi|)^s \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ converge vers zéro pour la topologie de $L^2(R_\xi^n)$. Or, le raisonnement que nous avons donné dans le lemme 1.1 donne cette vérification. Ensuite $(1 + |\xi|)^s \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathcal{R}(\xi, t, 0; \lambda)$ est une fonction continue de λ à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$, ce qui implique que $(1 + |\xi|)^s \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction une fois continûment différentiable à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$. On voit de proche en proche que, quel que soit $k > 0$, $(1 + |\xi|)^s \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction k fois différentiable à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$. Pour $(1 + |\xi|)^{s+|\mu|} p_1^{\mu_1} \dots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, 0; \tau)$, nous partons de l'expression de (4.4). Nous laissons la démonstration au lecteur.

Nous avons donc démontré que $R_x(t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{E}^s[0, T]$, $s < -\frac{n}{2}$.

Nous ne donnons pas les démonstrations de 2°, 3° et de 4°. Le raisonnement analogue à celui de la proposition 3.2 donnera le résultat de 2°. De même, le raisonnement analogue à la proposition 3.3 (resp. la proposition 3.4) donnera 3° (resp. 4°).

C. Q. F. D.

Les propositions 3.3, 3.4 et 4.1 nous donnent

PROPOSITION 4.2. — Soit $\alpha(x_1, \dots, x_n, t)$ une fonction $\in (\mathcal{O})_{x,t}$ telle que son support ne contienne pas zéro : $0 \notin S[\alpha(x, t)]$, [$S(T)$ désigne le support de T], alors, les distributions $\alpha(x_1, \dots, x_n, t) Y(t) f_i(t; \lambda)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) sont des fonctions indéfiniment différentiables en (x, t) , et dépendent de λ de manière indéfiniment différentiable pour la topologie $\mathcal{E}_{x,t}$.

Nous admettrons sans démonstration le lemme suivant :

LEMME 4.1. — 1° Si $f \in D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, où n est la dimension de l'espace, alors f est une fonction continue; plus précisément, la convergence au sens de $D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ entraîne la convergence uniforme dans R^n .

2° Si $f \in D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p}$, alors f est une fonction continue avec ses dérivées au moins jusqu'à l'ordre p ; plus précisément la convergence au sens de $D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p}$ entraîne la convergence uniforme dans R^n avec ses dérivées jusqu'à l'ordre p .

Ce lemme et la proposition 4.1, 2° nous donnent :

PROPOSITION 4.3. — Quel que soit m , il existe $i_0(m)$ tel que pour $i \geq i_0$, $Y(t) f_i(t; \lambda)$ est une fonction m fois continûment différentiable au sens usuel en (x, t) et dépend de λ de manière indéfiniment différentiable pour la topologie $\mathcal{E}_{x,t}^m$.

Avant de passer au chapitre 5, nous indiquons un lemme qu'il est facile de vérifier.

LEMME 4.2. — Si $a(x, t)$ définit une fonction indéfiniment différentiable de t à valeurs dans $(\mathcal{O})_x$, alors, en posant $a(x + \xi, t + \tau) = a(x, t; \xi, \tau)$, $a(x, t; \xi, \tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable de t, τ, ξ à valeurs dans $(\mathcal{O})_x$.

Cela étant, le lemme 2.1 nous montre que l'application $f(x) \rightarrow (f_1(x), f_n(x))$ de $(\mathcal{O})$ dans $(\mathcal{O}) \times \dots \times (\mathcal{O})$ est continue, où

$$(N) \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i f_i(x).$$

En effet, l'application $f(x) \rightarrow [f(x) - f(0)]$ de $(\mathcal{O})$ sur $(\mathcal{O}_0)$ est continue. Cela nous montre que, en désignant par $a_i(x, t; \xi, \tau)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) les composants de $a(x, t; \xi, \tau)$ pour la décomposition (N) :

$$(N) \quad a(x + \xi, t + \tau) - a(\xi, t + \tau) = \sum_{i=1}^n x_i a_i(x, t; \xi, \tau),$$

ces $a_i(x, t; \xi, \tau)$ ont la même propriété que celle de $a(x, t; \xi, \tau)$ que nous avons explicitée dans le lemme.

5. Paramétrix. — Revenons à l'équation (1.2). Quand on applique l'opérateur

$$(5.1) \quad D = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\nu| \leq P} q_\nu(x, t) p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_n^{\nu_n} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - q(x, t, p),$$

à la distribution

$$(5.2) \quad Y(t) [f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_i(t)],$$

alors, en tenant compte de $f_j(0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, i$) et $f_0(0) = \delta_x$, on a

$$(5.3) \quad DY(t) [f_0(t) + \dots + f_i(t)] = -q_\varepsilon(x, t, p) Y(t) f_i(t) + \delta_x \times \delta_t.$$

Considérons l'équation d'évolution qui dépend du paramètre (ξ, τ) :

$$(5.4) \quad \frac{d}{dt} - \sum_{|\nu| \leq P} q_\nu(x + \xi, t + \tau) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}.$$

Alors, en écrivant $q_\nu(x + \xi, t + \tau) = q_\nu(x, t; \xi, \tau)$, $q_\nu(\xi, t + \tau) = q_\nu(t; \xi, \tau)$, nous voyons que, en vertu du lemme 4.2, et de la remarque à la fin du chapitre 4, $q_\nu(t; \xi, \tau)$ et $q_{\varepsilon, \nu}(x, t; \xi, \tau)$:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} q_\varepsilon(x, t; \xi, \tau; p) &= \sum_{|\nu| \leq P} q_{\varepsilon, \nu}(x, t; \xi, \tau) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \\ &= \sum_{|\nu| = P} [q_\nu(x + \xi, t + \tau) - q_\nu(\xi, t + \tau)] p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \\ &\quad + \sum_{|\nu| \leq P-1} q_\nu(x + \xi, t + \tau) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \end{aligned}$$

dépendent de (ξ, τ) de manière indéfiniment différentiable au sens que nous avons énoncé au début du chapitre 4. Donc, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre 4 aux $f_0(t; \xi, \tau)$, $\dots$, et nous aurons la distribution

$$(5.6) \quad Y(t) [f_0(t; \xi, \tau) + \dots + f_i(t; \xi, \tau)].$$

Posons

$$(5.7) \quad E_{x, t}(\xi, \tau) = \theta_{\xi, \tau} Y(t) [f_0(t; \xi, \tau) + \dots + f_i(t; \xi, \tau)],$$

où $\theta_{\xi, \tau}$ est l'opérateur de translation. Nous fixons i une fois pour toutes.

Appliquons D à gauche,

$$\begin{aligned} DE_{x,t}(\xi, \tau) &= D\theta_{\xi,\tau} Y(t) [f_0(t; \xi, \tau) + \dots + f_i(t; \xi, \tau)] \\ &= \theta_{\xi,\tau} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum q_v(x + \xi, t + \tau) p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n} \right] \\ &\quad \times Y(t) [f_0(t; \xi, \tau) + \dots + f_i(t; \xi, \tau)] \\ &= \theta_{\xi,\tau} [\partial_x \times \partial_t - q_\varepsilon(x, t; \xi, \tau; p) Y(t) f_i(t; \xi, \tau)]. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \theta_{\xi,\tau} q_\varepsilon(x, t; \xi, \tau; p) &= \sum_{|\nu|=p} [q_v(x, t) - q_v(\xi, t)] p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n} \theta_{\xi,\tau} \\ &\quad + \sum_{|\nu| \leq p-1} q_v(x, t) p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n} \theta_{\xi,\tau} \\ &= \left[q(x, t, p) - \sum_{|\nu|=p} q_v(\xi, t) p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n} \right] \theta_{\xi,\tau}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} (5.8) \quad \tilde{L}(x, t; \xi, \tau) &= - \left[q(x, t, p) - \sum_{|\nu|=p} q_v(\xi, t) p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n} \right] \theta_{\xi,\tau} [Y(t) f_i(t; \xi, \tau)]. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(5.9) \quad DE_{x,t}(\xi, \tau) = \partial_{x-\xi} \times \partial_{t-\tau} + \tilde{L}(x, t; \xi, \tau).$$

Alors, d'après la proposition 4.3, quand on prend i assez grand pour m donné, $L(x, t; \xi, \tau)$ est une fonction en $(x, t) \in (\mathcal{S})_{x,t}^m$ et dépend de (ξ, τ) de manière m fois continûment différentiable pour cette topologie.

Deuxièmement, $E_{x,t}(\xi, \tau) \in \mathcal{O}'_{x,t}$ dépend de (ξ, τ) de manière indéfiniment différentiable (proposition 4.1); de plus, si $\alpha(x, t) \in \mathcal{O}_{x,t}$, et que $(\xi, \tau) \notin S[\alpha(x, t)]$, alors $\alpha(x, t) E_{x,t}(\xi, \tau) \in \mathcal{O}_{x,t}$ et dépend de (ξ, τ) de manière indéfiniment différentiable (proposition 4.2).

Enfin, nous démontrons la semi-régularité de $E_{x,t}(\xi, \tau)$ en (x, t) ⁽¹⁾. Pour toute $\varphi(\xi, \tau) \in \mathcal{O}_{\xi,\tau}$, $\int E_{x,t}(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \in \mathcal{S}_{x,t}$; si des $\varphi_j(\xi, \tau)$ de supports contenus dans un compact fixe convergent vers zéro dans $\mathcal{S}_{\xi,\tau}$, les intégrales $\int E_{x,t}(\xi, \tau) \varphi_j(\xi, \tau) d\xi d\tau$ convergent vers zéro dans $\mathcal{S}_{x,t}$.

Nous allons démontrer que $\int E_{x,t}(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \in \mathcal{S}_{x,t}$. D'abord $(\mathcal{O}^0) \subset D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ (lemme 4.1) et $f_i(t; \xi, \tau) \in D^s[0, T]$, $s < -\frac{n}{2}$, est indéfini-

⁽¹⁾ M. L. SCHWARTZ nous a signalé que, dans son livre [3] (t. I), il a oublié de mentionner cette condition de semi-régularité. Il faut ajouter cette condition aux conditions des noyaux ou encore des paramétrix.

ment différentiable en (ξ, τ) (proposition 4.1). Comme $\tau_{-l}(p)$ est une application continue de D^s dans D^{s+2l} , $\tau_{-l}(p)f_i(t; \xi, \tau) \in D^{s+2l}[0, T]$ dépend de (ξ, τ) de manière indéfiniment différentiable. Prenons $l = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$, alors la fonction $f_i(x, t; \xi, \tau) = \tau_{-l}(p)f_i(t; \xi, \tau)$ est continue et bornée en (x, t, ξ, τ) , ainsi que toutes ses dérivées (prises au sens habituel) en (ξ, τ) .

Considérons, pour $\psi(x, t) \in \mathcal{O}_{x,t}$,

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad & \iint \theta_{\xi, \tau} [Y(t)f_i(t; \xi, \tau)] \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \psi(x, t) dx dt \\
 &= \int \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \int \theta_{\xi, \tau} [Y(t) \tau_l(p_x) f_i(x, t; \xi, \tau)] \psi(x, t) dx dt \\
 &= \int \theta_{\xi, \tau} [Y(t) \dots] \psi(x, t) dx dt \\
 &= \int_{t \geq 0} \tau_l(p_x) f_i(x, t; \xi, \tau) \psi(x + \xi, t + \tau) dx dt \\
 &= \int_{t \geq 0} f_i(x, t; \xi, \tau) \tau_l(p_x) \psi(x + \xi, t + \tau) dx dt,
 \end{aligned}$$

en remarquant qu'ici $\tau_l(p_x) = \tau_l(p_\xi)$, et par Fubini,

$$(5.10) = \int_{t \geq 0} dx dt \int \tau_l(p_\xi) [\varphi(\xi, \tau) f_i(x, t; \xi, \tau)] \psi(x + \xi, t + \tau) d\xi d\tau$$

Supposons maintenant qu'une suite de $\psi_j(x, t)$, des supports contenus dans un compact K , converge vers zéro au sens de $\mathcal{O}'^m$. Alors, on peut exprimer cette suite comme $\psi_j(x, t) = D_{x,t}[\tilde{\psi}_j(x, t)]$, où $S[\tilde{\psi}(x, t)] \subset \tilde{K} (\supset K)$, et $D_{x,t}$ est un polynôme de dérivation d'ordre m' , et $\tilde{\psi}_j(x, t) \rightarrow 0$ dans $(\mathcal{O}^0)$. Alors

$$(5.10) = \int_{t \geq 0} dx dt \int D'_{\xi, \tau} \tau_l(p_\xi) [\varphi(\xi, \tau) f_i(x, t; \xi, \tau)] \tilde{\psi}_j(x + \xi, t + \tau) d\xi d\tau,$$

où $D'_{\xi, \tau}$ est transposé de $D_{\xi, \tau}$. Donc

$$|(5.10)| \leq \text{volume}(S(\varphi) - \tilde{K}) \cdot \text{volume}(\tilde{K}) \cdot M \cdot \max_{\xi, \tau} |\tilde{\psi}_j(\xi, \tau)|,$$

avec

$$M = \max |D'_{\xi, \tau} \tau_l(p_\xi) [\varphi(\xi, \tau) f_i(x, t; \xi, \tau)]|$$

pour

$$(x, t) \in S(\varphi) - \tilde{K}, \quad (t \geq 0), \quad (\xi, \tau) \in S(\varphi).$$

Donc, (5.10) converge vers zéro.

Comme K et m sont quelconques, cela montre que $\int E_{x,t}(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau$ appartient à $\mathcal{E}_{x,t}$. Dans ce raisonnement, on voit facilement que l'applica-

tion $\varphi(\xi, \tau) \rightarrow \int E_{x,t}(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau$ est une application continue de $(\mathcal{O}_H)_{\xi, \tau}$ dans $\mathcal{E}_{x,t}$, où H est un compact quelconque de (ξ, τ) donc de $(\mathcal{O})_{\xi, \tau}$ dans $\mathcal{E}_{x,t}$.

Considérons maintenant, l'opérateur transposé

$$(5.11) \quad D' = -\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\nu| \leq P} (-1)^{|\nu|} p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} q_\nu(x, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} - {}'q(x, t, p).$$

Or, nous voyons que l'opérateur transposé D' est un opérateur antiparabolique, c'est-à-dire que, en changeant $t \rightarrow -t$, D' devient P -parabolique. En effet, en posant $t' = -t$, (5.11) devient, compte tenu de ce que P est pair,

$$(5.11') \quad \frac{\partial}{\partial t'} - \left\{ \sum_{|\nu|=P} q_\nu(x, -t') p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} + \sum_{|\nu| \leq P-1} \tilde{q}_\nu(x, t') p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \right\}.$$

Donc, nous pouvons appliquer à cet opérateur tous les résultats que nous avons obtenus. Alors, posons

$$(5.12) \quad E'_{x,t}(\xi, \tau) = \theta_{\xi, \tau} Y(t') [f_0(t'; \xi, \tau) + \dots + f_i(t'; \xi, \tau)],$$

où $f_0(t'; \xi, \tau), \dots, f_i(t'; \xi, \tau)$ (on les prolonge par zéro pour $t' < 0$), sont des distributions qu'on obtiendra à partir de l'opérateur (5.11'), alors que nous sommes partis de l'opérateur D .

(5.12) s'écrit

$$(5.13) \quad E'_{x,t}(\xi, \tau) = \theta_{\xi, \tau} Y(-t) [f_0(-t; \xi, \tau) + \dots + f_i(-t; \xi, \tau)].$$

Alors, en posant,

$$(5.14) \quad L'(x, t; \xi, \tau) = - \left[{}'q(x, t, p) - \sum_{|\nu|=P} q_\nu(\xi, t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \right] \theta_{\xi, \tau} [Y(-t) f_i(-t; \xi, \tau)],$$

nous aurons

$$(5.15) \quad D' E'_{x,t}(\xi, \tau) = \partial_{x-\xi} \times \partial_{t-\tau} + L'(x, t; \xi, \tau).$$

Les noyaux $E'_{x,t}(\xi, \tau)$, $L'(x, t; \xi, \tau)$ ont les propriétés suivantes :

1° $E'_{x,t}(\xi, \tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable de (ξ, τ) à valeurs dans $\mathcal{O}'_{x,t}$.

2° Si $\alpha(x, t) \in \mathcal{O}_{x,t}$, et que $(\xi, \tau) S[\alpha(x, t)]$, alors $\alpha(x, t) E'_{x,t}(\xi, \tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable en (ξ, τ) à valeurs dans $\mathcal{O}_{x,t}$.

3° La semi-régularité en (x, t) : l'application

$$\varphi(\xi, \tau) \rightarrow \int E'_{x,t}(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

de $(\mathcal{O})_{\xi, \tau}$ dans $\mathcal{E}_{x,t}$ est continue.

4° $L'(x, t; \xi, \tau)$ est une fonction m fois continûment différentiable de ξ, τ à valeurs dans $\mathcal{E}_{x,t}^m$.

Alors, en appliquant au noyau $E'_{x,t}(\xi, \tau)$ le raisonnement de L. SCHWARTZ, (*Théorie des Distributions*, 1, p. 136-139) ⁽²⁾, nous obtenons le théorème du début de l'Introduction.

COROLLAIRE DU THÉORÈME. — *Le cas elliptique n'est qu'un cas particulier (Méthode de descente). Nous dirons que l'opérateur différentiel*

$$(5.16) \quad q(x, p) = \sum_{|\nu| \leq p} q_\nu(x) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}, \quad \text{ou encore} \quad = \sum q_\nu(x) p^\nu$$

est elliptique (au sens de Petrowsky) dans un ouvert Ω , si

$$(5.17) \quad \sum_{|\nu|=p} q_\nu(x) (i\xi)^\nu \neq 0, \quad \text{lorsque } \xi \text{ réel} \neq 0, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Nous supposons les coefficients $\in (\mathcal{B})$. Nous dirons que l'opérateur (5.16) est hypoelliptique (au sens de Schwartz), si toute distribution U_x , solution de

$$(5.18) \quad q(x, p) U_x = g_x$$

est une fonction indéfiniment différentiable dans tout ouvert où g_x l'est. De cette définition, il résulte que, si $q_1(x, p) q_2(x, p)$ est un opérateur hypoelliptique (au sens de Schwartz), alors $q_2(x, p)$ l'est.

Compte tenu de cette remarque, il suffit de démontrer l'hypoellipticité de l'opérateur (5.16), sous l'hypothèse,

$$(5.17') \quad \sum_{|\nu|=p} q_\nu(x) (i\xi)^\nu \geq \delta |\xi|^p \quad (\delta > 0).$$

En effet, en posant $\bar{q}(x, p) = \sum_{|\nu|=p} \overline{q_\nu(x)} p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}$, nous n'avons qu'à

(2) Cela suffit pour établir le théorème. En effet, le raisonnement de SCHWARTZ nous montre que, si la solution est localement dans $\mathcal{O}^m$, alors cette solution doit être localement dans $\mathcal{O}^m$ (ne pas confondre cette notation avec notre notation $\mathcal{O}^*$), et nous pouvons donner à m des valeurs aussi élevées qu'on le veut.

démontrer l'hypoellipticité pour l'opérateur $\bar{q}(x, p)q(x, p)$, et cet opérateur satisfait bien à la condition (5.17') (en remplaçant P par $2P$).

Alors, (5.17') montre que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - q(x, p)$ est un opérateur parabolique. Supposons maintenant que U_x satisfait à l'équation (5.18). Or, en regardant U_x et g_x comme des distributions dans l'espace (x, t) , nous avons $\left[\frac{\partial}{\partial t} - q(x, p) \right] U_x = -g_x$. Donc, si g_x est une fonction indéfiniment différentiable dans un ouvert Ω , alors, d'après le théorème, U_x est une fonction indéfiniment différentiable dans l'ouvert $\Omega \times R^1$, donc U_x l'est dans Ω . Ce qui prouve l'hypoellipticité des opérateurs elliptiques (au sens de Petrowsky).

6. Cas général. — Considérons maintenant le système (1.1) dans le cas homogène. Nous considérons ce système comme équation d'évolution ⁽³⁾, ⁽⁴⁾ :

$$(6.1) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_i} u_i(t) = \sum_j \sum_{(k)} a_{ij}^{(k)}(x, t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} u_j(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$Pk_0 + \sum k_i \leq Pn_j,$$

en décomposant les coefficients $a_{ij}^{(k)}(x, t)$ tels que $Pk_0 + \sum_{i=1}^n k_i = Pn_j$, en

$$(N) \quad a_{ij}^{(k)}(x, t) = a_{ij}^{(k)}(0, t) + \sum_{l=1}^n x_l a_{ijl}^{(k)}(x, t),$$

nous considérons l'équation

$$(6.2) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_i} u_i(t) - \sum_{j=1}^N \sum_{((k))_P} a_{ij}^{(k)}(0, t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} u_j(t) \\ = \sum_{j=1}^N \sum_{(k)} \tilde{a}_{ij}^{(k)}(x, t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} f_j(t) \\ (i = 1, 2, \dots, N).$$

Remarquons que, dans le second membre, les coefficients correspondant à la sommation $((k))_P$ s'annulent toujours à l'origine : $\in (\mathcal{B}_0)_x$.

⁽³⁾ Comme dans le cas général, nous pouvons supposer que les coefficients sont définis dans l'espace entier, et ils y satisfont à la condition 1° pour $N = 1, n_i = 1$, et de plus ils satisfont à la condition de parabolicité pour un δ fixé.

⁽⁴⁾ Comme nous le montrerons, pour notre but il suffit de considérer le cas $n_1 = n_2 = \dots = n_N$. Dans ce cas, le raisonnement sera plus bref.

Écrivons $a_{ij}^{(k)}(t)$ au lieu de $a_{ij}^{(k)}(0, t)$ dans (6.2), nous savons déjà que l'équation (6.2) est bien posée dans $\overrightarrow{[a, b]}$. Envisageons maintenant quelques évaluations des solutions, en nous appuyant essentiellement sur le mémoire [2]. Considérons le système P -parabolique homogène :

$$(6.3) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{\{(k)\}_P} a_{ij}^{(k)}(t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} u_j(t) \quad (i=1, 2, \dots, N);$$

$\left(\frac{d}{dt}\right) u_i(t), \dots, \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1} u_i(t)$, nous les désignons par $u_i(t)$ ($i=N+1, \dots, N_1$), et transformons-les par Fourier en x , et désignons $u_i(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{V}_i(\xi; t)$.

En posant :

$$(6.4) \quad \mathcal{V}_i(\xi; t) = \mathcal{V}_j^*(\xi; t) |\xi|^{(k_j - n_j)P},$$

où k_j et n_i signifient $\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_j} u_i(t) = u_j(t)$ ($i \leq N$), ce qui revient à $\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_i} \mathcal{V}_i(\xi; t) = \mathcal{V}_j(\xi; t)$, et en remplaçant $\mathcal{V}_j(\xi, t)$ par $\mathcal{V}_j^*(\xi; t)$ dans l'équation transformée, le calcul fondamental de Petrowsky donne ([2], chapitre 2, (64')).

$$(6.5) \quad \sum_{i=1}^{N_1} |\mathcal{V}_i^*(\xi; t)|^2 \leq C \sum_{i=1}^{N_1} |\mathcal{V}_i^*(\xi; t_0)|^2 \exp[-\delta |2\pi\xi|^P(t - t_0)];$$

où $T \geq t \geq t_0 \geq 0$, C est une constante qui ne dépend ni de (t, t_0) ni des solutions $(\mathcal{V}_i^*(\xi; t))_{i=1, \dots, N_1}$. En désignant par $R_x^{(j)}(t, \tau)$ ($t \geq \tau$), ($j=1, 2, \dots, N$), les solutions de (6.3) satisfaisant aux conditions initiales :

$$(6.6) \quad R_x^{(j)}(t, \tau) = \begin{pmatrix} r_1^{(j)}(t, \tau) \\ r_l^{(j)}(t, \tau) \\ r_N^{(j)}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} r_l^{(j)}(t, \tau) &= 0, & \text{pour } k_0 = 0, 1, 2, \dots, n_l - 2. \\ &= \partial_l' \partial_x, & \text{pour } k_0 = n_l - 1 \\ &(\partial_l', \text{symbole de Kronecker}). \end{aligned}$$

Alors, nous appliquons (6.5) aux solutions $R_l^{(j)}(t, \tau)$. En omettant l'indice j , et compte tenu de $\sum_{i=1}^N |\mathcal{V}_i^*(\xi; \tau, \tau)|^2 \leq |\xi|^{2P}$, et $|\mathcal{V}_j(\xi; t, \tau)| = \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_j} \mathcal{V}_i(\xi; t, \tau)\right|$

où $\mathcal{V}_i(\xi; t, \tau)$ est la transformée de $r_i(t, \tau)$, nous avons

$$(6.7) \quad \left| \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_i^{(j)}(\xi; t, t_0) \right| \leq C(1 + 2\pi|\xi|)^{P(k_0+1-n_i)} \exp \left[-\frac{\delta}{2} |2\pi\xi|^P (t - t_0) \right];$$

$$\left(\begin{array}{l} k_0 = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1 \\ i, j = 1, 2, \dots, N \end{array} \right); \quad \text{où } r_i^{(j)}(t, t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{V}_i^{(j)}(\xi; t, t_0).$$

Cette formule nous donne [voir [2], (72)].

PROPOSITION 6.1 :

$$(6.8) \quad \left| p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_i^{(j)}(\xi; t, t_0) \right|$$

$$\leq C_{|\nu|} (1 + 2\pi|\xi|)^{P(k_0+1-n_i)-|\nu|}$$

$$\times \left[\sum_{s=0}^{|\nu|} (t - t_0)^s (1 + 2\pi|\xi|)^{Ps} \right] \exp \left[-\frac{\delta}{2} |2\pi\xi|^P (t - t_0) \right];$$

$$\left(\begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, N; k_0 = 0, 1, 2, \dots, n_i - 1 \\ |\nu| = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

DÉMONSTRATION. — *Induction mathématique.* — L'équation transformée est

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^{n_i} \mathcal{V}_i^{(l)}(\xi; t, t_0) = \sum_{j=1}^N \sum_{((k))} a_{ij}^{k_0, \dots, k_n}(t) (2\pi i \xi_1)^{k_1} \dots (2\pi i \xi_n)^{k_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_j^{(l)}(\xi; t, t_0).$$

Nous omettons désormais (l) . Nous admettons que la proposition est vraie pour $|\nu| \leq q$; en appliquant $p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} (|\nu| = q + 1)$ à gauche, le second membre se compose de :

1° les termes qu'on obtient en remplaçant $\mathcal{V}_j \rightarrow p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \mathcal{V}_j$;

2° les termes restants (Leibniz)

$$\sum_j \left[\sum_{((k))} a_{ij}^{(k)}(t) \sum_{(\mu)} C_{\nu; k}^{(\mu)} \xi_1^{k_1 - \mu_1} \dots \xi_n^{k_n - \mu_n} p_1^{\gamma_1 - \mu_1} \dots p_n^{\gamma_n - \mu_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_j(\xi; t, t_0) \right]$$

$$\equiv \mathcal{W}_i(\xi; t, t_0),$$

Naturellement, $|\nu - \mu| \leq q$, donc, en appliquant (6.8) et compte tenu de

$$p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_i(\xi; t_0, t_0) = 0 \quad (k_0 = 0, 1, \dots, n_i - 1),$$

la formule classique donne

$$p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_i(\xi; t, t_0) = \int_{t_0}^t \sum_{l=1}^N \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathcal{V}_i^{(l)}(\xi; t, \tau) \mathcal{W}_l(\xi; \tau, t_0) d\tau;$$

et compte tenu de $Pk_0 + \sum k_i = Pn_j$, on a

$$\begin{aligned} |\mathfrak{V}_i(\xi; t, t_0)| &\leq \tilde{\mathcal{C}}_q (1 + 2\pi |\xi|)^{P-(q+1)} \left(\sum_{s=0}^q (1 + 2\pi |\xi|)^{P_s} (t - t_0)^s \right) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{\partial}{2} |2\pi \xi|^P (t - t_0) \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\left| p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} \mathfrak{V}_i(\xi; t, t_0) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N C \cdot \tilde{\mathcal{C}}_q \int_{t_0}^t (1 + 2\pi |\xi|)^{P(k_0 - n_{i+1})} \exp \left[-\frac{\partial}{2} |2\pi \xi|^P (t - \tau) \right] \\ &\quad \times (1 + 2\pi |\xi|)^{P-(q+1)} \left[\sum_{s=0}^q (1 + 2\pi |\xi|)^{P_s} (\tau - t_0)^s \right] \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{\partial}{2} |2\pi \xi|^P (\tau - t_0) \right] d\tau. \\ &\leq N \cdot C \cdot \tilde{\mathcal{C}}_q (1 + 2\pi |\xi|)^{P(k_0 - n_{i+1}) - (q+1)} \\ &\quad \times \left[\sum_{s=0}^{q+1} (1 + 2\pi |\xi|)^{sP} (t - t_0)^s \right] \exp \left[-\frac{\partial}{2} |2\pi \xi|^P (t - t_0) \right]. \end{aligned}$$

Ce qui établit la proposition.

DEFINITION 6.1 :

$$1^\circ \quad \mathcal{O}^{(s, h)}[a, b] \quad \left(\begin{array}{l} h = 0, 1, 2, \dots \\ -\infty < s < +\infty \end{array} \right),$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^{(s, h)}[a, b],$$

si

$$\left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^{l_0} f_j(t) \in \mathcal{O}^{s-l_0 P}[a, b] \left(\begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, N \\ l_0 = 0, 1, 2, \dots, h \end{array} \right) \right\};$$

$$2^\circ \quad \mathcal{O}^{s, h}[a, b], \quad \left(\begin{array}{l} h = 0, 1, 2, \dots \\ -\infty < s < +\infty \end{array} \right),$$

$$F(t) \in \mathcal{O}^{s, h}[a, b],$$

si

$$\left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^{l_0} f_j(t) \in \mathcal{O}^{s+(n_j-1-l_0)P}[a, b] \left(l_0 = 0, 1, \dots, (n_j-1), \dots, (n_j-1) + h \right) \right\}.$$

On les munit de la topologie d'espace-produit. Si l'on considère $\mathcal{O}_0^s[a, b]$ au lieu de $\mathcal{O}^s[a, b]$, on a les espaces $\mathcal{O}_0^{(s,h)}[a, b]$, $\mathcal{O}_0^{s,h}[a, b]$.

Alors, considérons la distribution-solution

$$(6.9) \quad g_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^N r_i^{(j)}(t, \tau) \star_{(x)} f_j(\tau) d\tau \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

ou encore

$$(6.9') \quad G(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \star F(\tau) d\tau, \quad \text{où } R_x(t, \tau) = (r_i^{(j)}(t, \tau))$$

de l'équation

$$(6.10) \quad \left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_i} u_i(t) - \sum_{j=1}^N \sum_{(k)} a_{ij}^{(k)}(t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} u_j(t) = f_i(t) \right. \\ \left. (i=1, 2, \dots, N). \right.$$

Nous notons

$$(6.9'') \quad G(t) = \mathcal{L} F(t).$$

Alors, on a la

PROPOSITION 6.2. — L'application : $F(t) \rightarrow G(t)$ de $\mathcal{O}^{(s,0)}[0, T]$ dans $\mathcal{O}_0^{s+P\alpha';0}[0, T]$ est continue, où $0 < \alpha' < 1$ quelconque.

DÉMONSTRATION. — La proposition 6.1 montre que l'application

$$(t - \tau)^{\alpha'} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} r_i^{(j)}(t, \tau) \star_x \in \mathcal{L}(D^s, D^{s+P(n_i-1-k_0)+|\alpha|+P\alpha'})$$

dépend de t et τ de manière continue et reste bornée pour $T \geq t > \tau \geq 0$. Donc, l'application

$$F(t) \rightarrow \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} g_i(t) \equiv \int_0^t \sum_{j=1}^N \left(\frac{d}{dt} \right)^{k_0} r_i^{(j)}(t, \tau) \star_{(x)} f_j(\tau) d\tau \quad (k_0=0, 1, 2, \dots, n_i-1)$$

de $\mathcal{O}^{(s,0)}[0, T]$ dans $\mathcal{O}_0^{s+P(n_i-1-k_0)+P\alpha'}[0, T]$ ($0 < \alpha' < 1$) est continue, ce qui établit cette proposition.

LEMME 6.1 :

$$1^o \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_i^{(j)}(t, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } l_0 < n_i - 1; \\ \text{sinon} & \sum_{|\nu| \leq (l_0 - n_i + 1)P} a_{i,j;\nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \delta \end{cases}$$

$$2^o \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i+m} r_i^{(l)}(t, \tau) = \sum_{j=1}^N \sum_{(k)} a_{i,j;m}^{(k)}(t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} r_j^{(l)}(t, \tau);$$

$$P k_0 + \sum k_i \leq (n_j + m)P, \quad k_0 < n_j + m;$$

où $a_{i,j;m}^{(k)}(t)$ sont des polynomes en $a_{ij}^{(k)}(t)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m .

DÉMONSTRATION. — *Induction mathématique.* — Le lemme 6.1 donne, si $G(t) = \mathcal{L}F(t)$.

LEMME 6.2 :

$$(6.11) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+m} g_i(t) = \int_0^t \sum_j \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+m} r_i^{(j)}(t, \tau) \star_{(x)} f_j(\tau) d\tau$$

$$+ \sum_{j_i(\nu)} b_{i,m;\nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu_0} f_j(t);$$

$$P \nu_0 + \sum \nu_i \leq (m-1)P.$$

DÉMONSTRATION. — *Induction mathématique.* — Nous admettons cette égalité pour $m \leq q$, et la démontrons pour $m = q+1$. Appliquons $\left(\frac{d}{dt}\right)$ à gauche à (6.11) en mettant $m = q$. Alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+q+1} g_i(t) = \int_0^t \sum_j \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+q+1} r_i^{(j)}(t, \tau) \star_{(x)} f_j(\tau) d\tau + \sum_j \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+q} r_i^{(j)}(t, t) \star_{(x)} f_j(t)$$

$$+ \sum_{j_i(\nu)} \tilde{b}_{i,q;\nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu_0+1} f_j(t);$$

$$P \nu_0 + \sum \nu_i \leq (q-1)P;$$

(5) En détaillant la notation : $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_i^{(j)}(t, \tau)\right]_{\tau=t}$.

en vertu du lemme 6.1, 1° le second terme est de la forme

$$\sum_{j, i(\nu)} a_{i, n_i-1+q; \nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} f_j(t) \quad |\nu| \leq qP.$$

Ce qui prouve la proposition pour $m = q + 1$. Remarquons que $b_{i, m; \nu}^{(j)}(t)$ sont des polynomes en les $a_{i, j}^{(k)}(t)$ et leurs dérivées.

LEMME 6.3. — *L'opérateur: $(t - \tau)^{\alpha'} \left(\frac{d}{dt} \right)^{l_0} r_i^{(k)}(t, \tau) \star_{(x)}$ est une application continue de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s+P\alpha'-(l_0-n_i+1)P}$; c'est-à-dire $\in \mathcal{L}(\mathcal{O}^s, \mathcal{O}^{s+P\alpha'-(l_0-n_i+1)P})$; il dépend de t et τ de manière continue et est borné pour $0 \leq \tau < t < T$; $0 < \alpha' < 1$ ($l_0 = 0, 1, 2, \dots$).*

DÉMONSTRATION. — Nous avons démontré que c'est vrai pour $l_0 < n_i - 1$ (voir la démonstration de la proposition 6.2). Démontrons-le maintenant par induction mathématique en nous appuyant sur le lemme 6.1, 2°. Admettons que cette proposition est vraie pour $l_0 \leq (n_i - 1) + q$, et nous la démontrons pour $l_0 = (n_i - 1) + q + 1$. Posons dans le lemme 6.1, 2°, $m = q$, alors, dans le second membre on a

$$l_0 \leq n_j + q - 1,$$

donc en décomposant $p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} (t - \tau)^{\alpha'} \left(\frac{d}{dt} \right)^{l_0} r_j^{(k)}(t, \tau) \star_{(x)}$ en produit

$$(t - \tau)^{\alpha'} \left(\frac{d}{dt} \right)^{l_0} r_j^{(k)}(t, \tau) \star_{(x)} p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \star_{(x)} \quad \text{où} \quad Pl_0 + \sum \nu_i \leq (n_j + q)P.$$

Alors $p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \star_{(x)}$ est une application continue de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s-|\nu|}$. Or, comme $l_0 \leq n_j - 1 + q$, l'application

$$(t - \tau)^{\alpha'} \left(\frac{d}{dt} \right)^{l_0} r_j^{(k)}(t, \tau) \star_{(x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{O}^{s-|\nu|}, \mathcal{O}^{s-|\nu|+P\alpha'-(l_0-n_j+1)P})$$

a la propriété demandée. Cela entraîne la proposition, parce que

$$P(l_0 - n_j) + |\nu| \leq qP,$$

donc, chaque terme dans le second membre du lemme 6.1, 2°

$$\in \mathcal{L}(\mathcal{O}^s, \mathcal{O}^{s+P\alpha'-(q+1)P}) \quad \text{reste borné.}$$

PROPOSITION 6.3. — *L'application $\mathcal{L} : F(t) \in \mathcal{O}_0^{(s, h)}[0, T]$ dans*

$$G(t) \in \mathcal{O}^{s+P\alpha'; h+1}[0, T]$$

est continue; s est un nombre réel; $h = 0, 1, 2, \dots$; $0 < \alpha' < 1$.

DÉMONSTRATION. — Le cas $h = 0$ a été démontré (proposition 6.2). Le cas $h \geq 1$ se démontre en vertu des lemmes 6.2 et 6.3. C. Q. F. D.

En revenant au début, nous considérons le second membre de (6.2).
Notons,

$$(6.12) \quad \begin{cases} q_{ij}\left(x, t, p, \frac{d}{dt}\right) = \sum_{(k)} \tilde{a}_{ij}^{(k)}(x, t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{h_0}, \\ \text{où} \quad Pk_0 + \sum k_i \leq Pn_j, \quad (k_0 < n_j); \end{cases}$$

$$(6.13) \quad Q_\varepsilon\left(x, t, p, \frac{d}{dt}\right) = \left(q_{ij}\left(x, t, p, \frac{d}{dt}\right)\right).$$

Alors, en tenant compte de ce que les coefficients $\tilde{a}_{ij}^{(k)}(x, t)$ tels que

$$Pk_0 + \sum k_i = Pn_j$$

appartiennent à $(\mathfrak{B}_0)_x$, on voit facilement :

LEMME 6.4. — *L'opérateur $Q_\varepsilon : G(t) = Q_\varepsilon\left(x, t, p, \frac{d}{dt}\right)F(t)$ est une application continue de $\mathfrak{O}^{s;h}[0, T]$ (resp. $\mathfrak{O}_0^{s;h}[0, T]$) dans $\mathfrak{O}^{(s-P+1, h)}[0, T]$ (resp. $\mathfrak{O}_0^{(s-P+1, h)}[0, T]$); s nombre réel quelconque, $h = 0, 1, 2, 3, \dots$*

En combinant ce lemme avec la proposition 6.3, nous avons

PROPOSITION 6.4. — *L'application*

$$\mathcal{E} Q_\varepsilon\left(x, t, p, \frac{d}{dt}\right) : F_{i-1}(t) \xrightarrow[\mathcal{E} Q_i]{} F_i(t),$$

de $\mathfrak{O}_0^{s;h}[0, T]$ dans $\mathfrak{O}_0^{s+\alpha;h+1}[0, T]$ est continue; $0 < \alpha < 1$ quelconque; $h = 0, 1, 2, \dots$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} F_{i-1}(t) &\xrightarrow[Q_i]{} Q_\varepsilon F_{i-1}(t) \xrightarrow[\mathcal{E}]{} F_i(t), \\ \mathfrak{O}_0^{s;h}[0, T] &\rightarrow \mathfrak{O}_0^{(s-P+1, h)}[0, T] \rightarrow \mathfrak{O}_0^{s-P+1+P\alpha;h+1}[0, T]. \end{aligned}$$

Comme $0 < \alpha' < 1$ quelconque, on pose $1 - (1 - \alpha')P = \alpha$.

C. Q. F. D.

REMARQUE. — *Cette proposition est naturellement vraie quand on remplace $\mathfrak{O}_0$ par $\mathfrak{O}$.*

COROLLAIRE. — *En vertu de la proposition 6.1,*

$$F_0(t) = R_x^{(j)}(t, 0) \in \mathfrak{O}^{s;0}[0, T],$$

en prenant $s < -\frac{n}{2}$. Alors, les propositions 6.3 et 6.2 montrent que

$$F_i(t) = \mathcal{E} Q_\varepsilon F_0(t) \in \mathfrak{O}_0^{s+\alpha;1}[0, T],$$

et la proposition 6.4 donne, de proche en proche,

$$F_2(t) \in \mathcal{O}_0^{s+2\alpha;2}[0, T], \quad F_3(t) \in \mathcal{O}_0^{s+3\alpha;3}[0, T], \dots$$

D'autre part, $R_x(t, 0) \notin \mathcal{O}_0^{s;0}[0, T]$, mais la formule du lemme 6.1, 2° nous montre la propriété que voici :

$$A. \quad R_x^{(j)}(t, 0) \in \mathcal{O}^{s;0}[0, T]$$

$$\Rightarrow \in \mathcal{O}^{s;1}[0, T] \Rightarrow \in \mathcal{O}^{s;2}[0, T] \Rightarrow \dots \Rightarrow R_x^{(j)}(t, 0) \in \mathcal{O}^{s;h}[0, T] \Rightarrow \dots$$

B. Pour tout l , $\left(\frac{d}{dt}\right)^l R_x(t, 0)$ a pour $t=0$ son support concentré à l'origine. De la formule (6.11), nous déduisons de proche en proche que cette propriété est vraie pour $F_1(t)$, $F_2(t)$, Nous avons donc, comme la proposition 3.3.

PROPOSITION 6.5. — Soit ω un ouvert tel que $0 \notin \bar{\omega}$, alors

$$\left[\left(\frac{d}{dt} \right)^l F_i(t) \right]_{\omega} \in \mathcal{O}_L(\omega)[- \infty, T] \quad (i, l = 0, 1, 2, \dots).$$

Nous définirons de même l'espace $\mathcal{E}^{s;h}[0, T]$, alors,

$$R_x^{(j)}(t, 0) \in \mathcal{E}^{s;0}[0, T] \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

et l'on voit facilement que

L'opérateur $\mathcal{L}Q_\varepsilon$ est une application continue de $\mathcal{E}^{s;h}[0, T]$ dans $\mathcal{E}^{s+\alpha;h+1}[0, T]$.

DIFFÉRENTIABILITÉ. — Considérons maintenant le cas où les coefficients dépendent du paramètre $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ (qui parcourt l'espace R^{n+1}), au sens que nous avons explicité au début du chapitre 4. Alors, nous aurons une proposition correspondant à la proposition 4.1. Nous n'écrivons ni les énoncés ni les démonstrations. Nous nous bornons à remarquer que :

1° L'inégalité (6.7) est vraie quand le paramètre λ parcourt un ensemble compact; naturellement cette constante C dépend de cet ensemble, T étant fixé. En effet, nous avons supposé, comme dans le cas $N=1$, $n_i=1$; *a.* tous les coefficients $\in (\mathcal{A})_x$ avec toutes les dérivées en t ; *b.* la condition de parabolicité est remplie dans l'espace entier avec le même $\partial(>0)$;

2° Le raisonnement que nous venons de faire pour déduire (6.8) à partir de (6.7) devient la base des démonstrations.

7. Paramétrix (Cas général). — Notons par D l'opérateur parabolique

$$(7.1) \quad D = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial^{n_N}}{\partial t^{n_N}} \end{pmatrix} - \left(\sum_{\{k\}} a_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(x, t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} \right) \\ \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial^{n_N}}{\partial t^{n_N}} \end{pmatrix} - Q\left(x, t, p, \frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Notons,

$$(7.2) \quad F_i(t) = (F_i^{(1)}(t), \dots, F_i^{(j)}(t), \dots, F_i^{(N)}(t));$$

en détaillant la notation, $F_i(t)$ est une matrice à N lignes et N colonnes :

$$F_i(t) = (f_i^{(j)}(t)); \text{ en particulier, } F_0(t) = (r_i^{(j)}(t, 0)).$$

Alors, on a

$$(7.3) \quad DY(t)[F_0(t) + F_1(t) + \dots + F_i(t)] \\ = I \cdot \partial_x \times \partial_t - Q_\varepsilon\left(x, t, p, \frac{\partial}{\partial t}\right) Y(t) F_i(t);$$

(I = matrice identique).

Considérons l'équation d'évolution qui dépend de (ξ, τ) :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_N} \end{pmatrix} - \left(\sum_{\{k\}} a_{ij}^{(k_0, \dots, k_n)}(x + \xi, t + \tau) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \right),$$

on aura les distributions, comme dans le chapitre 5, $F_0(t; \xi, \tau), \dots, F_i(t; \xi, \tau)$, et posons,

$$(7.4) \quad E_{x,t}(\xi, \tau) = Y(t) \theta_{\xi, \tau} [F_0(t; \xi, \tau) + \dots + F_i(t; \xi, \tau)],$$

où $\theta_{\xi, \tau}$ est l'opérateur de translation. Appliquons D à gauche, alors en posant

$$(7.5) \quad L(x, t; \xi, \tau) = - \left[Q\left(x, t, p, \frac{\partial}{\partial t}\right) - Q_0\left(\xi, t, p, \frac{\partial}{\partial t}\right) \right] \\ \times \theta_{\xi, \tau} [Y(t) F_i(t; \xi, \tau)]; \\ Q_0\left(\xi, t, p, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\sum_{\{k\}} a_{ij}^{(k)}(\xi, t) p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} \right),$$

on aura

$$(7.6) \quad DE_{x,t}(\xi, \tau) = I. \partial_{x-\xi} \times \partial_{t-\tau} + L(x, t; \xi, \tau),$$

et les noyaux $E_{x,t}(\xi, \tau)$, $L(x, t; \xi, \tau)$ ont les mêmes propriétés que celles des noyaux que nous avons obtenus dans le cas $N=1$, $n_1=1$.

Nous revenons maintenant au système P -parabolique donné (1.1)

$$\left(\delta'_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{n_i} - \sum_k a_{ij}^{(k_0, \dots, k_n)}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right) U = G(x, t),$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N).$$

D'abord, nous pouvons supposer que $U \in (\mathcal{E}')_{x,t}$, en multipliant une fonction $\alpha(x, t) \in \mathcal{O}_{x,t}$, qui vaut 1 sur l'ouvert dans lequel nous voulons démontrer l'hypoellipticité. Dans cette condition, faisons le changement d'inconnues : Soit $\max(n_1, n_2, \dots, n_N) = m$, alors le changement $u_j \rightarrow \bar{u}_j$ est lié par l'équation

$$u_j = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{P'-1} \Delta_x^{P'} \right) \right)^{m-n_j} \bar{u}_j \quad (j=1, 2, \dots, N), \quad P' = \frac{P}{2}.$$

Nous pouvons trouver les distributions $\bar{u}_j$ ($j=1, \dots, N$) à l'aide de la transformation de Laplace.

Alors, $\bar{U} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N)$ satisfait à une équation, dont les degrés en $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N$ sont tous m , et dont le déterminant caractéristique remplit la condition de P -parabolicité $\left[\text{car} \left(\frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{P'-1} \Delta_x^{P'} \right) \rightarrow \lambda + (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{P'} \right]$, et de plus, dont le transposé ⁽⁶⁾ est antiparabolique [c'est-à-dire que, si dans le transposé on fait le changement $t \rightarrow -t'$, alors ce système est parabolique dans le (x, t') -espace]. Pour notre but, il suffit donc, en changeant d'équation dès le début, de considérer le système où $n_1 = n_2 = \dots = n_N$. Alors, le transposé est antiparabolique, de sorte qu'on peut construire, comme le cas $N=1$, le noyau $E'_{x,t}(\xi, \tau)$ à partir de l'opérateur transposé.

(6) Par définition, l'opérateur transposé D' de l'opérateur D :

$$D' = \left(\delta'_t (-1)^{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{n_i} \right) - \left(\sum_{(k)} (-1)^{k_0 + \dots + k_n} P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{k_0} a_{it}^{(k)}(x, t) \right).$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Cours de Princeton, 1954.
- [2] I. PETROWSKY, *Über das Cauchysche Problem für ein System linear partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen* (*Bulletin de l'Université d'État de Moscou*, fasc. 7, 1938, p. 1-74).
- [3] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I-II, Paris, Hermann, 1950-1951.
- [4] L. SCHWARTZ, *Les équations d'évolution liées au produit de composition* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 19-49).

(Manuscrit reçu le 5 juin 1956.)

