BULLETIN DE LA S. M. F.

GABRIEL THIERRIN

Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 103-159

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__103_0>

Bull. Soc. math. France,
83, 1955, p. 103 à 159.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ÉQUIVALENCES DANS LES DEMI-GROUPES ;

PAR M. GABRIEL THIERRIN.

INTRODUCTION.

Le présent travail consiste, dans sa plus grande partie, en l'étude des équivalences dans les demi-groupes. Sa lecture nécessite l'étude des trois Mémoires suivants de P. Dubreil : *Contribution à la théorie des demi-groupes*, I, II *et* III (1).

Dans le premier chapitre, j'établis quelques propriétés nouvelles des homogroupes introduits par A. H. Clifford et D. D. Miller (2) sous le nom de « *demi-groupes avec éléments zéroïdes* ». J'étudie les équivalences régulières dans les homogroupes et je donne une caractérisation de ces équivalences dans une classe particulière d'homogroupes.

Dans le second chapitre, je montre d'abord que certaines propriétés des équivalences réversibles généralisées (3), établies par P. Dubreil, pour le cas d'un sous-demi-groupe, peuvent s'étendre au cas d'un complexe quelconque. Deux catégories d'équivalences sont ensuite étudiées, toutes deux définies à partir d'un complexe quelconque H d'un demi-groupe. L'une de ces équivalences peut, sous certaines conditions, coïncider avec l'équivalence réversible généralisée Σ_H associée à H, tandis que l'autre contient l'équivalence principale (4) R_H associée à ce même complexe.

Le dernier chapitre est consacré à la caractérisation, dans les demi-groupes, des équivalences régulières et simplifiables, des équivalences régulières et réductives et des équivalences régulières. Toutes ces caractérisations sont faites au moyen d'équivalences principales. Je donne, en outre, une caractérisation des groupes au moyen de leurs équivalences régulières ou simplifiables.

Une partie des résultats contenus dans ce Mémoire a fait l'objet de communications à l'Académie des Sciences de l'Institut de France (5) et à l'Académie

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.*, t. 63, 1941, p. 1-52. Référé DGI. *Rendiconti di Mathematica e delle sue applicazioni*, 1951, p. 183-200. Référé DG II. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 81, 1953, p. 289-306. Référé DG III.

(2) *Amer. J. Math.*, vol. 70, 1948, p. 117-125.

(3) DG II, chapitre II.

(4) DG I, chapitre I.

(5) *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, p. 1519 et 1595; t. 236, p. 565, 1399 et 1723.

Royale de Belgique [6], Je remercie vivement MM. A. Denjoy et L. Godeaux d'avoir bien voulu les présenter aux Académies respectives.

Je suis très heureux d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. P. Dubreil pour l'attention qu'il m'a accordée et les conseils qu'il m'a donnés durant l'élaboration de ce travail. Je suis également très reconnaissant à M. A. Denjoy de m'avoir fait l'honneur de présider mon Jury, et je remercie M. J. Favard du bienveillant intérêt qu'il m'a témoigné.

CHAPITRE I.

Homogroupes, homodomaines et homocorps.

1. Homogroupes. — Un *homogroupe* est un demi-groupe possédant au moins un élément *net* [7] ou *zéroïde*. Dans le Mémoire cité dans l'introduction, A. H. Clifford et D. D. Miller ont établi en particulier le résultat suivant :

L'ensemble N *des éléments nets d'un demi-groupe* D, *s'il n'est pas vide, est un groupe et ce groupe est un idéal bilatère de* D. *Si e désigne l'élément neutre de* N, *e est permutable avec tout élément de* D, *et* N *est homomorphe à* D *par l'application $x \to xe = ex$.*

Dans la suite, l'ensemble N des éléments nets d'un homogroupe D sera appelé le *nodule* de l'homogroupe, et l'élément neutre e de N sera dit l'élément *unitif* de D. Un élément x' tel que l'on ait $xx' = e$ sera appelé *un inverse unitif à droite*. On a la définition symétrique.

Théorème 1. — *Tout demi-groupe abélien fini* F *est un homogroupe.*

Nous allons montrer d'abord que tout demi-groupe cyclique fini A est un homogroupe, et cela en partant de la proposition suivante établie par D. Rees [8] :

Si A est engendré par l'élément a, il existe deux entiers m et n tels que $a^m = a^n$ $(m < n)$; n étant choisi minimum dans la relation précédente, on a

$$A = \{ a, a^2, \ldots, a^m, \ldots, a^{n-1} \}$$

et l'ensemble $G = \{ a^m, \ldots, a^{n-1} \}$ est un groupe cyclique.

Soient alors a^r un élément quelconque de G, et a^i un élément quelconque de A. Si $a^i \in G$, il existe un élément a^k tel que $a^i a^k = a^r$. Si $a^i \notin G$, alors $i < m \leqq r$, et l'on a $a^i a^{r-i} = a^r$. Donc a^r est un élément net de A qui est par conséquent un homogroupe.

Le demi-groupe abélien F étant fini, il existe un élément idempotent $e \in F$, tel que l'idéal $K = Fe$ n'a comme idempotent que l'élément e. Si $x \in K$, le demi-groupe cyclique X engendré par x est un homogroupe, d'après ce qui précède et $X \subseteq K$.

---

[6] *Bulletin de la Classe des Sciences*, t. 39, p. 942. Référé ER.

[7] DG I, p. 8. Un élément net a d'un demi-groupe D est un élément tel que pour tout $x \in D$, il existe $y \in D$, $z \in D$ vérifiant $xy = zx = a$.

[8] D. Rees, *On semi-groups* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 36, 1940, p. 388).

Il existe alors un élément x_0 de X tel que $xx_0 = e_x$, où e_x est un idempotent de X, ce qui entraîne $e_x = e$. Par conséquent, K est un groupe, et F un homogroupe, car on voit immédiatement qu'un demi-groupe contenant un groupe comme idéal est un homogroupe.

THÉORÈME 2. — *Si* D *est un demi-groupe possédant un élément* a, *net à droite et permutable avec chaque élément de* D, *et si le demi-groupe cyclique* A *engendré par* a *est fini, alors* D *est un homogroupe.*

En effet, A contient au moins un élément idempotent $a^r = e$, et cet élément est aussi net à droite, car si $r > 1$ et si $xx' = a$, on a $x.x'a^{r-1} = a^r$. D'autre part, e est aussi permutable avec tout élément de D. Par conséquent, $\mathrm{D}e = e\mathrm{D}$ est un idéal dans D, ayant l'élément e comme élément neutre. Pour tout $xe \in \mathrm{D}e$, il existe $y \in \mathrm{D}$ tel que l'on ait $xe.y = e$. D'où $xe.ye = e.e = e$, avec $ye \in \mathrm{D}e$. Par conséquent $\mathrm{D}e$ est un groupe et D un homogroupe.

THÉORÈME 3. — *Tout homogroupe* H, *tel que la relation* $xe = ye$, e *étant l'élément unitif de* H, *entraîne* $x = y$, *est un groupe.*

En effet, on a

$$(xe)e = xe, \qquad \text{d'où} \qquad xe = x$$

quel que soit $x \in \mathrm{H}$. Par conséquent, e est élément neutre de H. Comme e est net, H est un groupe.

COROLLAIRE 1. — *Tout homogroupe, vérifiant la règle de simplification à droite ou à gauche, est un groupe.*

COROLLAIRE 2. — *Tout anneau* A, *dont l'ensemble* $\mathrm{A}^* = \mathrm{A} - \{0\}$ *est un homogroupe pour la multiplication, est un corps.*

En effet, A^* est un semi-groupe multiplicatif. Donc, d'après le corollaire 1, A^* est un groupe.

COROLLAIRE 3. — *Un anneau* A, *possédant un élément* a, *non diviseur de zéro à droite et net dans l'ensemble* $\mathrm{A}^* = \mathrm{A} - \{0\}$, *est un corps.*

L'ensemble A^* est un demi-groupe multiplicatif. En effet, soient $x \in \mathrm{A}^*$, $y \in \mathrm{A}^*$ avec $xy = 0$. Il existe z tel que $yz = a$. Mais $xyz = 0$, et donc $xa = 0$, contre l'hypothèse.

Le demi-groupe A^*, possédant un élément net, est un homogroupe et A est donc un corps d'après le corollaire 2.

Tout homogroupe H, *tel que chacun de ses éléments n'ait qu'un inverse unitif à droite, est un groupe.*

En effet, soient N le nodule de H et e l'élément unitif de H. Si $x \in \mathrm{H}$, l'élément $xe \in \mathrm{N}$ et son inverse unitif dans N est $(xe)^{-1}$. Les éléments xe et x sont des inverses unitifs à droite de $(xe)^{-1}$. Donc $xe = x$, et $\mathrm{H} = \mathrm{N}$.

Tout homogroupe H, *tel que, pour tout couple d'éléments* (a, b) *de* H, *il existe un complémentaire à droite, est un groupe.*

En effet, soit d un élément quelconque de H et c un élément quelconque du nodule N de H. Il y a dans H un élément y tel que $cy = d$. Mais N est un idéal dans H. Donc $d \in N$, et $H = N$.

Un élément a d'un demi-groupe quelconque D est dit *simplifiant à droite* si les relations $(a \mathbin{.\cdot} x) \cap (a \mathbin{.\cdot} y) \neq \emptyset$, $(a \mathbin{.\cdot} x) \subseteq (a \mathbin{.\cdot} y)$ entraînent [9]

$$x = y.$$

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un demi-groupe* D *soit un groupe, il faut et il suffit qu'il possède un élément a simplifiant à droite et net.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, D est un homogroupe, puisque l'élément a est net. Soit e l'élément unitif de D et soit $x \in D$. Si $y \in (a \mathbin{.\cdot} x)$, on a $xy = a$, d'où

$$xye = ae = a$$

puisque a appartient au nodule de D. L'élément e est permutable avec tout élément de D, donc

$$xe.y = a$$

et $y \in (a \mathbin{.\cdot} xe)$. D'où

$$(a \mathbin{.\cdot} x) \subseteq (a \mathbin{.\cdot} xe) \qquad \text{et} \qquad x = xe$$

puisque a est simplifiant à droite. Par conséquent, e étant élément neutre de D et élément net, le demi-groupe D est un groupe.

Un sous-demi–groupe de l'homogroupe H est dit un *sous-homogroupe* de H, s'il est lui-même un homogroupe. Remarquons que l'élément unitif d'un sous-homogroupe de H n'est pas nécessairement celui de H. Un sous-homogroupe de H est dit *régulier*, si son élément unitif est le même que celui de H.

THÉORÈME 5. — *L'intersection* A *de deux sous-homogroupes réguliers* H_1 *et* H_2 *de l'homogroupe* H *est un sous-homogroupe régulier de* H.

L'intersection A de H_1 et H_2 n'est pas vide, car elle contient l'élément unitif e de H, qui est aussi l'élément unitif de H_1 et H_2, et cette intersection est un sous-demi-groupe de H.

Soit $x \in A$, et soient x' un inverse unitif à droite de x dans H_1 et x'' un inverse unitif à droite de x dans H_2. Les éléments xe, $x'e$ et $x''e$ appartiennent au nodule N de H. D'autre part

$$xe \in A, \qquad x'e \in H_1, \qquad x''e \in H_2.$$

---

(9) Si H et K sont deux complexes de D, le *quotient à droite* ou *résiduel à droite* $H \mathbin{.\cdot} K$ de H par K est l'ensemble des éléments x de D vérifiant la relation

$$Kx \subseteq H.$$

Voir DG I, p. 7 ; DG III ; P. DUBREIL, *Algèbre* (Paris, Gauthier-Villars, 1946) ; M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, (Paris, Gauthier-Villars, 1953).

Les éléments $x'e$ et $x''e$ sont des inverses de xe dans le groupe N. Par conséquent

$$x'e = x'' \in \mathrm{A}.$$

Mais

$$x.x'e = xx'.e = e.e = e.$$

Donc l'élément e est net à droite dans A. Comme e est permutable avec tout élément de H, donc aussi de A, et idempotent, le sous-demi-groupe A est un homogroupe, d'après le théorème 2.

LEMME. — *Si* H *est un homogroupe et si x' est un inverse unitif à droite de x, $x'e$ est un inverse unitif à droite et à gauche de x, e étant l'élément unitif de* H.

En effet, si N est le nodule de H, $x'e \in \mathrm{N}$, et l'on a

$$e = x.x'e = xe.x'e.$$

Mais $xe \in \mathrm{N}$ qui est un groupe. Donc

$$x'e.xe = e \qquad \text{et} \qquad x'e.x = e.$$

THÉORÈME 6. — *Le centre* Z *d'un homogroupe* H *est un sous-homogroupe régulier de* H.

En effet, l'élément unitif e de H appartient à Z qui est par conséquent un sous-demi-groupe de H. Soient $z \in \mathrm{Z}$ et z' un inverse unitif à droite de z. On a

$$xz = zx \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{H}.$$

D'où

$$z'e.xz.z'e = z'e.zx.z'e$$

et d'après le lemme,

$$z'e.xe = ex.z'e.$$

Donc

$$z'e.x = x.z'e,$$

c'est-à-dire

$$z'e \in \mathrm{Z}.$$

L'élément e est donc net dans Z qui est alors un homogroupe.

THÉORÈME 7. — *Si x' est un inverse unitif à droite de x, l'ensemble* $\mathrm{T} = x'\mathrm{H}_0 x$, *où* H_0 *est un sous-homogroupe régulier de l'homogroupe* H, *est un sous-homogroupe régulier de* H.

En effet, si y et z sont deux éléments de H_0, on a

$$x'yx.x'zx = x'.yez.x \qquad \text{et} \qquad x'.yez.x \in \mathrm{T}, \qquad \text{puisque} \quad yez \in \mathrm{H}_0.$$

D'autre part, l'élément unitif e appartient à T, car $x'ex = e$.

Si y' est un inverse unitif à droite de y dans H_0, on a

$$x'yx.x'y'x = x'yey'x = x'ex = e.$$

Par conséquent, e est net à droite dans T qui est ainsi un homogroupe, d'après le théorème 2.

Corollaire. — *L'ensemble* $V = x_i H_0 x$, *où* x_i *parcourt tous les inverses unitifs à droite de* x, *est un sous-homogroupe régulier de* H.

2. **Homodomaines et homocorps.** — Un domaine H, où existent une addition et une multiplication, est un *homodomaine* s'il a les propriétés suivantes :

1° H est un homogroupe abélien pour l'addition ;
2° H est un demi-groupe pour la multiplication ;
3° La multiplication est distributive par rapport à l'addition ;
4° L'élément unitif o de l'homogroupe additif est multiplicativement permis dans H.

Un domaine D, *ayant les propriétés précédentes* 1°, 2° *et* 3° *et dans lequel l'élément unitif* o *de l'homogroupe additif est multiplicativement permis dans l'ensemble des éléments* x *de* D *tels que* $x + o = o$, *est un homodomaine.*

Nous avons d'abord $o . o = o$, puisque $o + o = o$. Si $y \in D$, $o . y$ est additivement idempotent, ainsi que $o . y + o$. Comme $o . y + o$ appartient au nodule de l'homogroupe additif, on a

$$o . y + o = o.$$

D'où

$$o . (o . y) = o . y = o,$$

c'est-à-dire l'élément o est permis à droite dans D. On montre de même qu'il est permis à gauche.

Théorème 8. — *L'ensemble* N *des éléments* $x + o$, *où* x *parcourt tous les éléments de l'homodomaine* H, *est un anneau homomorphe à* H.

D'après le paragraphe précédent, nous savons que N est un groupe vis-à-vis de l'addition et qu'il est homomorphe à H par rapport à l'addition, en faisant correspondre à l'élément $x \in H$ l'élément $x + o \in N$. Si maintenant x et y sont deux éléments quelconques de H, nous avons

$$(x + o) . (y + o) = xy + x . o + o . y + o . o = xy + o.$$

Donc N est un demi-groupe multiplicatif, homomorphe à H suivant la même correspondance.

L'anneau N sera dit le *nodule* de l'homodomaine H.

Théorème 9. — *Si l'homodomaine* H *possède un élément* $a \neq o$, *multiplicativement idempotent et permutable avec chaque élément de* H, *l'ensemble* $P = Ha$ *est un homodomaine homomorphe à* H, *avec* a *comme élément neutre multiplicatif.*

En effet, si x et y sont deux éléments quelconques de H, on a

$$xa + ya = (x + y)a, \qquad xa . ya = xya,$$

c'est-à-dire que P est un demi-groupe additif et multiplicatif, homomorphe à H par la correspondance $x \to xa$. Si x' est un inverse unitif de x dans l'homogroupe additif H, on a

$$xa + x'a = (x + x')a = o.a = o.$$

Par conséquent, P est un homogroupe additif, avec l'élément o comme élément unitif.

Un homodomaine K, dont le nodule contient au moins un élément différent de o, et dans lequel l'ensemble $K^* = K - \{o\}$ est un homogroupe par rapport à la multiplication, est dit un *homocorps*.

THÉORÈME 10. — *Le nodule* N *d'un homocorps* K *est un corps (gauche ou non), homomorphe à* K. *L'élément-unité de ce corps* N *par rapport à la multiplication est l'élément unitif e de l'homogroupe multiplicatif, et l'ensemble* $N - \{o\} = N^*$ *se confond avec le nodule* N_1 *de l'homogroupe multiplicatif, c'est-à-dire l'ensemble* K^*e.

D'après le théorème 8, N est un anneau homomorphe à K. Le produit de deux éléments de N^* est encore un élément de N^*, puisque K^* est un homogroupe et N un demi-groupe par rapport à la multiplication. Soit x un élément de K tel que $x + o \in N^*$ et soit x' un inverse unitif multiplicatif à droite de $x + o$. Nous avons

$$(x + o).x' = xx' + o = e,$$

c'est-à-dire que l'élément unitif e appartient à N^* et donc $e + o = e$.

D'autre part, nous avons

$$(x + o)(x' + o) = xx' + o = e,$$

Par conséquent, $x' + o \in N^*$, et l'ensemble N^* est un homogroupe par rapport à la multiplication (théorème 2), avec e comme élément unitif. De là suit, d'après le corollaire 2 du théorème 3, que N est un corps.

Montrons maintenant que $N^* = N_1$. En effet, N^* est un groupe multiplicatif, dont l'élément-unité est e. Si $x \in N^*$, $x = xe \in N_1$. Inversement, tout élément ye de N_1 appartient à N^*, car nous avons

$$ye = y.(e + o) = ye + o.$$

Par conséquent, $N^* = N_1$.

Dans un homocorps K, *l'égalité* $x + o = o$ *entraîne* $x = o$. En effet, si $x \neq o$, il existe $x' \neq o$, tel que $xx' = e$. Mais alors

$$(x + o)x' = o.x', \qquad xx' + o.x' = o, \qquad e + o = e = o,$$

ce qui est impossible.

Dans un homocorps K, *l'égalité* $x + x = x$ *entraîne* $x = o$, c'est-à-dire o est le seul élément additivement idempotent. En effet, il existe x_0 tel que $x + x_0 = o$, puisque K est un homogroupe additif. Nous avons alors

$$x + x + x_0 = x + x_0 \quad \text{et} \quad x + o = o; \quad \text{d'où} \quad x = o.$$

THÉORÈME 11. — *Tout homocorps* K, *dans lequel l'ensemble* $K - \{o\}$ *est un groupe par rapport à la multiplication, est un corps.*

Il suffit de montrer que K coïncide avec son nodule N et pour cela qu'on a $x+o=x$, pour tout $x \in K$. Si $x=o$, c'est évident. Soit alors $x \neq o$, et soit x^{-1} l'inverse de x dans le groupe multiplicatif $K-\{o\}$. Nous avons

$$(x+o)x^{-1}=xx^{-1}+o.x^{-1}=e+o=e,$$

où e est l'élément-unité de $K-\{o\}$. D'où

$$(x+o)x^{-1}.x=e.x, \qquad (x+o).e=x, \qquad x.e+o.e=x \qquad \text{et} \qquad x+o=x.$$

On sait qu'un corps fini est toujours commutatif, mais un homocorps fini n'est pas nécesssairement commutatif, comme le montre l'exemple de l'homocorps défini par les deux tables suivantes :

$+$	o	e	a	b
o	o	e	e	e
e	e	o	o	o
a	e	o	o	o
b	e	o	o	o

$\times$	o	e	a	b
o	o	o	o	o
e	o	e	e	e
a	o	e	a	b
b	o	e	a	b

La *caractéristique* d'un homodomaine se définit d'une manière analogue à celle d'un anneau, l'élément unitif additif o jouant dans l'homodomaine le rôle de l'élément nul dans l'anneau.

Une condition nécessaire pour qu'un homodomaine soit de caractéristique non nulle est qu'il ne possède aucun élément additivement idempotent autre que o.

Soit maintenant un homodomaine H tel que l'ensemble $H-\{o\}$ soit multiplicativement fermé et soit $x \in H$, $x \neq o$. Si y est un élément quelconque de H, nous avons pour tout entier positif n :

$$nx.y=x.ny.$$

Pour que l'on ait alors

$$ny=o \quad \text{pour tout } y \in H$$

il faut évidemment et il suffit que $nx=o$, puisque par hypothèse H n'a pas de véritables diviseurs de zéro.

Pour trouver la caractéristique de H, si elle n'est pas nulle, il suffit donc de chercher pour *un* élément $x \neq o$ quel est le plus petit entier positif N tel que l'on ait $Nx=o$.

Un homodomaine H, *tel que* $H-\{o\}$ *soit multiplicativement fermé et qui possède un élément* $a \neq o$, *multiplicativement idempotent*, *a une caractéristique égale soit à zéro*, *soit à un nombre premier* p.

En effet, si la caractéristique de H n'est pas nulle, elle est, d'après ce qu'on vient de voir le plus petit entier positif N tel que $Na=o$. Si N n'est pas premier, $N=nn'$, avec n, $n'>1$, nous avons

$$Na=(nn')a=(na).(n'a)=o,$$

ce qui exige que l'un au moins des facteurs na ou $n'a$ soit égal à o, contrairement à l'hypothèse.

Remarquons que la caractéristique d'un homocorps est celle de son nodule, qui est un corps.

3. **Équivalences régulières dans les homogroupes.** — On sait que si R est une équivalence régulière à droite dans un groupe G, la classe-unité mod R est un sous-groupe de G. On a une propriété analogue dans les homogroupes.

THÉORÈME 12. — *Pour toute équivalence régulière à droite* R *dans un homogroupe* H, *la classe unitive* S, *c'est-à-dire la classe* mod R *contenant l'élément unitif e de* H, *est un sous-homogroupe régulier de* H.

Soient $s_1 \in S$, $s_2 \in S$. Les relations

$$s_1 \equiv e \quad (R), \qquad s_2 \equiv e \quad (R)$$

entraînent

$$s_1 s_2 \equiv e s_2 = s_2 e \equiv e \quad (R)$$

donc $s_1 s_2 \in S$.

Soit s' un inverse unitif à droite de l'élément $s \in S$. Nous avons

$$s \equiv e \quad (R), \qquad \text{d'où} \qquad e = ss' \equiv es' = s'e \quad (R),$$

c'est-à-dire $s'e \in S$. Mais $s.s'e = ss'.e = e$. Par conséquent, e étant net à droite dans S, la classe unitive S est un sous-homogroupe régulier de H.

On voit facilement qu'un groupoïde homomorphe à un homogroupe, est lui-même un homogroupe. Par conséquent, si R est une équivalence régulière dans l'homogroupe H, l'ensemble-quotient H/R est un homogroupe homomorphe à H.

THÉORÈME 13. — *L'ensemble-quotient* H/R *d'un homogroupe* H *par l'équivalence principale* [10] $R = R_U = {}_U R$ *associée à un sous-homogroupe* U *régulier et symétrique* [11], *est un homogroupe homomorphe à* H, *et on a l'égalité*

$$Ue = Se.$$

La première partie est immédiate puisque l'équivalence principale associée à un complexe symétrique est régulière.

Soient $u \in U$ et $s \in S$. Si $x \in U \mathbin{.\cdot} e$, $ex \in U$ et $uex \in U$. D'où

$$x \in U \mathbin{.\cdot} ue \qquad \text{et} \qquad U \mathbin{.\cdot} e \subseteq U \mathbin{.\cdot} ue.$$

Si $y \in U \mathbin{.\cdot} ue$, $uey \in U$. Si u' est un inverse unitif à gauche de u dans U, nous avons

$$u'uey = ey \in U \qquad \text{et} \qquad y \in U \mathbin{.\cdot} e, \qquad U \mathbin{.\cdot} ue \subseteq U \mathbin{.\cdot} e.$$

Donc

$$U \mathbin{.\cdot} e = U \mathbin{.\cdot} ue,$$

---

(10) DG I, p. 7. Si K est un complexe quelconque du demi-groupe D, l'équivalence principale à droite R_K associée à K est définie par

$$a \equiv b \quad (R_K) \quad \rightleftarrows \quad K \mathbin{.\cdot} a = K \mathbin{.\cdot} b.$$

(11) DG I, p. 22.

c'est-à-dire

$$e \equiv ue \quad (\mathrm{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}e \subseteq \mathrm{S},$$

puisque S est la classe unitive mod R. Mais $\mathrm{U}e.e = \mathrm{U}e$; donc $\mathrm{U}e \subseteq \mathrm{S}e$.

Nous avons d'autre part

$$s \equiv e \quad (\mathrm{R}),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{U} \,.\cdot\, s = \mathrm{U} \,.\cdot\, e.$$

Comme $ee = e \in \mathrm{U}$, $e \in \mathrm{U} \,.\cdot\, e$. Donc

$$se \in \mathrm{U} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}e \subseteq \mathrm{U},$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{S}e = \mathrm{S}e.e \subseteq \mathrm{U}e,$$

d'où enfin

$$\mathrm{U}e = \mathrm{S}e.$$

Théorème 14. — *Dans les homogroupes, les équivalences régulières à droite et simplifiables à droite sont les équivalences principales à droite définies par des complexes forts et nets.*

En effet, on sait que l'équivalence principale à droite associée à un complexe fort et net à droite est régulière à droite et simplifiable à droite (DG I, théorème 8).

Soit R une équivalence régulière à droite et simplifiable à droite dans l'homogroupe H, et soit K une classe mod R. Si $a \in \mathrm{K}$ et si e est l'élément unitif de H, nous avons

$$ae.e \equiv a.e \quad (\mathrm{R}), \qquad \text{d'où} \qquad ae \equiv a \quad (\mathrm{R}).$$

Par conséquent, la classe K contient au moins un élément ae du nodule de H, et cet élément est net. D'après le théorème 21 de DG I, K est fort et l'on a $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{K}}$, où R_{K} est l'équivalence principale à droite associée à K.

Pour qu'un complexe M *de l'homogroupe* H *soit net, il faut et il suffit que* $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}e \neq \Theta$.

La condition est nécessaire. En effet, il existe $x \in \mathrm{H}$ tel que $xe = m \in \mathrm{M}$. Mais $xe.e = xe$. Donc $me = m \in \mathrm{M} \cap \mathrm{M}e$.

La condition est suffisante. En effet, il existe $m_1 \in \mathrm{M}$, $m_2 \in \mathrm{M}$ tels que $m_1 = m_2 e$. Comme $m_2 e$ appartient au nodule de H, $m_2 e = m_1$ est net.

Un élément a d'un demi-groupe quelconque D est dit *semi-simplifiant* si la relation

$$a \,.\cdot\, x = a \,.\cdot\, y \neq \Theta \qquad \text{entraîne} \qquad x = y.$$

Théorème 15. — *Si le demi-groupe* D *a comme image homomorphe un demi-groupe* F *possédant un élément f net à droite, et semi-simplifiant a droite, si* R *est l'équivalence d'homomorphisme et si* K *est l'ensemble des éléments de* D *ayant f comme image, on a*

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{K}}$$

et le complexe K *est homogène* ([12]) *à droite et net à droite.*

([12]) DG I, p. 27.

D'après le théorème 20 de DG I, on a

$$R \subseteq R_K.$$

Soit $x \equiv y(R_K)$, c'est-à-dire $K \cdot\!\cdot\, x = K \cdot\!\cdot\, y$. Si $x \not\equiv y(R)$ et si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les images respectives de x et y dans F, on a $\bar{x} \neq \bar{y}$. D'où, puisque f est semi-simplifiant à droite, $f \cdot\!\cdot\, \bar{x} \neq f \cdot\!\cdot\, \bar{y}$. Par conséquent

$$K \cdot\!\cdot\, x \neq K \cdot\!\cdot\, y$$

contre l'hypothèse. Donc

$$x \equiv y \quad (R)$$

et $R = R_K$. Le complexe K est évidemment homogène à droite et net à droite.

Ce théorème est valable en particulier dans le cas où le demi-groupe F est un homogroupe dont le nodule possède un élément semi-simplifiant à droite dans F.

Théorème 16. — *Si* K *est un complexe homogène à droite et net à droite, et si l'équivalence principale à droite* R_K *est régulière, le demi-groupe-quotient* $F = D/R_K$ *est un demi-groupe possédant un élément net à droite et semi-simplifiant à droite.*

Le complexe K étant une classe mod R_K, si f est l'élément de F correspondant à K, f est net à droite dans le demi-groupe F. Montrons que f est semi-simplifiant à droite dans F. Soit

$$f \cdot\!\cdot\, a = f \cdot\!\cdot\, b \neq \theta,$$

avec $a \in F$, $b \in F$. Si x et y sont deux éléments de D appartenant respectivement aux classes a et b, et si $z \in K \cdot\!\cdot\, x$, on a $xz \in K$, et donc $yz \in K$, $z \in K \cdot\!\cdot\, y$. Par conséquent $K \cdot\!\cdot\, x \subseteq K \cdot\!\cdot\, y$. On montre de même que $K \cdot\!\cdot\, y \subseteq K \cdot\!\cdot\, x$ et donc

$$K \cdot\!\cdot\, x = K \cdot\!\cdot\, y.$$

D'où

$$x \equiv y \quad (R_K),$$

c'est-à-dire $a = b$.

Si le complexe K est net, F est alors un homogroupe.

4. Homogroupes résorbants. Caractérisation des équivalences régulières dans les homogroupes résorbants. — Soit H un homogroupe satisfaisant la condition (α) suivante :

(α) *Pour tout* $a \in H$, *il existe un élément* e_a *et un élément* a' *tels que l'on ait*

$$e_a . a = a . e_a = a, \qquad a . a' = a' . a = e_a.$$

On sait [13] que, pour qu'un demi-groupe quelconque D vérifie la condition (α), il faut et il suffit qu'il soit la *réunion de groupes disjoints deux à deux*. D'autre part, ces groupes sont *maximaux dans* D, *car tout sous-groupe de* D *est contenu dans l'un de ces groupes.*

---

[13] A. H. Clifford, *Semi-groups admitting relative inverses* (*Ann. Math.*, vol. 42, 1941).

Nous désignerons dans la suite par G_a *le groupe maximal dans* H *contenant* a, *par* e_a *l'élément neutre de* G_a, *et par* a^{-1} *l'inverse de* a *dans* G_a. On a évidemment $G_a = G_{e_a}$. Soient d'autre part e l'élément unitif de H et N le nodule de H. On a $N = He = eH$, et N est un groupe maximal dans H.

Soit R une équivalence régulière à droite dans H, et soit S la classe unitive mod R.

THÉORÈME 17. — *Si* $x \in S$, $e_x \in S$ *et* $x^{-1} \in S$. *D'autre part, les relations* $e_y \in S$ *et* $e.y \in S$ *entraînent* $y \in S$.

On a

$$x \equiv e \quad (R), \qquad \text{d'où} \qquad e_x = xx^{-1} \equiv ex^{-1} \quad (R), \qquad e_x e \equiv ex^{-1}e \quad (R).$$

Mais $ex^{-1}e = ex^{-1}$. Donc

$$e_x e \equiv e_x \quad (R).$$

D'autre part, $e_x e \in N$ et $e_x e$ est idempotent. Comme le nodule n'a que l'élément e comme idempotent, on a $e_x e = e$ et

$$e \equiv e_x \quad (R), \qquad e_x \in S.$$

Il en résulte

$$x \equiv e_x \quad (R),$$
$$xx^{-1} \equiv e_x x^{-1} \equiv x^{-1} \quad (R).$$
$$e_x \equiv x^{-1} \quad (R), \qquad x^{-1} \in S.$$

Si $ey \in S$, on a

$$e_y \equiv e \quad (R), \qquad y = e_y . y \equiv e . y \equiv e \quad (R); \qquad \text{d'où} \qquad y \in S.$$

COROLLAIRE. — *La classe unitive* S *est un homogroupe vérifiant la condition* (α).

Un homogroupe H est dit *résorbant* s'il a les deux propriétés suivantes :

1° H *vérifie la condition* (α) ;

2° *Le produit de deux éléments idempotents différents de* H *est l'élément unitif* e *de* H.

Pour qu'un *demi-groupe* D, vérifiant la *condition* (α), *soit un homogroupe résorbant*, *il faut et il suffit* qu'il possède un idempotent e tel que le produit de deux idempotents différents soit e.

La condition est évidemment nécessaire.

Elle est aussi suffisante : soit $x \in D$; il existe x^{-1} tel que l'on ait

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e_x, \qquad \text{d'où} \qquad ex^{-1}.x = e.e_x = e, \qquad x.x^{-1}e = e_x.e = e.$$

Par conséquent, e étant net, D est un homogroupe résorbant ayant l'élément e comme élément unitif.

THÉORÈME 18. — *Si* H *est un homogroupe résorbant, on a*

$$e_a . x = x . e_a$$

pour tout x *et tout* e_a. *D'autre part, l'inégalité* $e_a \neq e_b$ *entraîne* $ab \in N$.

Si $e_a = e_x$, on a évidemment $e_a . x = x . e_a$. Soit donc $e_a \neq e_x$. On a

$$e_a . x = e_a . e_x x = e_a e_x . x = e x,$$
$$x . e_a = x e_x e_a = x . e_x e_a = x e.$$

Mais e est permutable avec tout élément de H. Donc

$$e_a . x = x . e_a.$$

Si $e_a \neq e_b$, on a

$$ab = ae_a . e_b b = a . e_a e_b . b = aeb = abe \in \mathrm{N}.$$

Dans la suite de ce paragraphe, à moins d'indication contraire, H *désigne toujours un homogroupe résorbant* et R *une équivalence régulière à droite.*

Un *sous-homogroupe* K de H est dit *résorbant* s'il est lui-même un homogroupe, résorbant par rapport à l'opération de H. Si x est un élément de K, il existe alors, dans K, un groupe maximal dans K et contenant x. *Nous désignerons ce groupe par* G_x^{K} et l'on a

$$G_x^{\mathrm{K}} \subseteq G_x.$$

Théorème 19. — *Soient* K *un sous-homogroupe résorbant régulier de* H. $\mathrm{N_K}$ *le nodule de* K *et* a *un élément quelconque de* H.

1° *Si* $e_a = e$, *ou si* $e_a \notin \mathrm{K}$, *on a*,

$$\mathrm{K}.a = \mathrm{N_K}.a.$$

2° *Si* $e_a \neq e$ *et si* $e_a \in \mathrm{K}$, *on a*

$$\mathrm{K}.a = \mathrm{N_K}.a \cup G_{e_a}^{\mathrm{K}}.a.$$

Remarquons d'abord que, puisque K est régulier, on a

$$\mathrm{N_K} = \mathrm{K}.e = e.\mathrm{K} \subseteq \mathrm{N}.$$

1° Si $x \in \mathrm{K}$, $e_x \in \mathrm{K}$, puisque $G_x^{\mathrm{K}} \subseteq G_x$ et $G_x^{\mathrm{K}} \subseteq \mathrm{K}$. Si $e_a = e$, $e_x . e_a = e$. Si $e_a \notin \mathrm{K}$, $e_a \neq e_x$, et donc $e_x . e_a = e$, d'où

$$x . a = x e_x . e_a a = x e . a \in \mathrm{N_K}.a$$

et $\mathrm{K}.a \subseteq \mathrm{N_K}.a$. Comme $\mathrm{N_K} \subseteq \mathrm{K}$, on a

$$\mathrm{K}.a = \mathrm{N_K}.a.$$

2° Posons $\mathrm{F} = G_{e_a}^{\mathrm{K}}$. Si $\mathrm{K} = \mathrm{N_K} \cup \mathrm{F}$, c'est immédiat. Supposons ensuite que le complément E de $\mathrm{N_K} \cup \mathrm{F}$ dans K ne soit pas vide. On a

$$\mathrm{K} = \mathrm{N_K} \cup \mathrm{F} \cup \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathrm{K}.a = \mathrm{N_K}.a \cup \mathrm{F}.a \cup \mathrm{E}.a.$$

Si $x \in \mathrm{E}$, on a $e_a \neq e_x$. En effet si nous supposons $e_a = e_x$ on a $G_a = G_x$. Mais $G_x^{\mathrm{K}} \subseteq G_x$. Donc $e_a \in G_x^{\mathrm{K}}$ et $G_x^{\mathrm{K}} = \mathrm{F}$. D'où $x \in \mathrm{F}$, ce qui est impossible, puisque $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \emptyset$. On a donc

$$x . a = x e_x . e_a a = x e . a \in \mathrm{N_K}.a.$$

Par conséquent

$$\mathrm{E}.a \subseteq \mathrm{N_K}.a \quad \text{et} \quad \mathrm{K}.a = \mathrm{N_K}.a \cup \mathrm{F}.a.$$

THÉORÈME 20. — *La classe unitive* S mod R *est un sous-homogroupe résorbant régulier de* H.

D'après le corollaire du théorème 17, S est un homogroupe vérifiant la condition (α). L'élément unitif e de H est aussi l'élément unitif de S. Par conséquent, le produit de deux idempotents différents de S est l'élément unitif de S, puisque H est résorbant.

Toute classe T mod R contenant au moins un idempotent de H est dite une *classe semi-unitive.*

THÉORÈME 21. — *Si* T *est une classe semi-unitive* mod R, *différente de la classe unitive* S, T *est un groupe.*

La classe T ne contient qu'un idempotent e_t. En effet, si e_i est un idempotent de T et si $e_i \neq e_t$, on a

$$e_t \equiv e_i \quad (\mathrm{R}), \qquad e_t \equiv e_i e_t = e \quad (\mathrm{R}).$$

Donc $e_t \in \mathrm{S}$, contre l'hypothèse.

Soient $x \in \mathrm{T}$, $y \in \mathrm{T}$. On a $e_t = e_x$. En effet, si $e_t \neq e_x$, $e_t e_x = e$. De

$$x \equiv e_t \quad (\mathrm{R}) \quad \text{suit} \quad x = x e_x \equiv e_t e_x = e \quad (\mathrm{R})$$

et $x \in \mathrm{S}$, contre l'hypothèse.

D'autre part, $x^{-1} \in \mathrm{T}$, puisque

$$e_t = e_x = x x^{-1} \equiv e_t x^{-1} = x^{-1} \quad (\mathrm{R}).$$

Comme $e_t = e_y$, on a

$$xy \equiv e_t y = y \quad (\mathrm{R})$$

et $xy \in \mathrm{T}$. Par conséquent, T est un groupe.

THÉORÈME 22. — *L'ensemble* H_0 *des éléments de* H *appartenant aux classes semi-unitives* mod R *est un sous-homogroupe résorbant régulier de* H.

Soient $x \in \mathrm{H}_0$, $y \in \mathrm{H}_0$. On a d'après les théorèmes 20 et 21 :

$$x \equiv e_x \quad (\mathrm{R}), \qquad y \equiv e_y \quad (\mathrm{R}).$$

Si $e_x = e_y$, on a évidemment $xy \in \mathrm{H}_0$. Si $e_x \neq e_y$, on a alors

$$xy \equiv e_x y = ey \quad (\mathrm{R}), \qquad ye \equiv e_y e = e \quad (\mathrm{R}), \qquad \text{puisque} \quad e_x y = e_x . e_y y = ey.$$

Mais $ey = ye$. D'où

$$xy \equiv e \quad (\mathrm{R}), \qquad xy \in \mathrm{S} \subseteq \mathrm{H}_0.$$

D'autre part, $x^{-1} \in \mathrm{H}_0$, d'après les théorèmes 20 et 21. Donc $x . x^{-1} e = e_x . e = e$, avec $x^{-1} e \in \mathrm{H}_0$, et H_0 est un sous-homogroupe de H. De plus, H_0 est résorbant (théorèmes 20 et 21).

Nous appellerons H_0 le *sous-homogroupe résorbant complet* associé à l'équivalence R.

Si $\mathrm{N}_{\mathrm{H}_0}$ est le nodule de H_0 et si N_{S} est le nodule de S, *on a*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{H}_0} = \mathrm{N}_{\mathrm{S}}.$$

En effet, puisque $S \subseteq H_0$, on a

$$N_S = S.e \subseteq H_0.e = N_{H_0}.$$

Si $x \in H_0$, $x \equiv e_x$ (R). D'où

$$xe \equiv e_x e = e \quad (R)$$

et $xe \in S$, ce qui entraîne $xe \in Se$. Par conséquent, $N_{H_0} \subseteq N_S$.

Posons $H^* = N_S \cup (H_0 - S)$. Autrement dit, H^* est l'ensemble formé par les éléments du module de S et les éléments des classes semi-unitives différentes de la classe unitive, pour autant qu'elles existent.

Théorème 23. — *L'ensemble* H^* *est un sous-homogroupe résorbant et régulier de* H.

En effet, H^* est la réunion de groupes disjoints deux à deux. Cela découle du théorème 21, et du fait que le nodule d'un homogroupe est un groupe. Soient $x \in H^*$, $y \in H^*$. Si x et y appartiennent au même groupe, il en est de même de $x.y$, donc $xy \in H^*$. Si x et y font partie de deux groupes différents, on a $e_x \neq e_y$ et alors

$$xy = xe_x.e_y y = xey = xy.e \in H_0.e = N_{H_0}.$$

Mais $N_{H_0} = N_S$. Donc $xy \in N_S \subseteq H^*$.

Par conséquent, H^* est un demi-groupe vérifiant la condition (α). On voit facilement que c'est un sous-homogroupe résorbant et régulier.

Nous appellerons H^* *le sous-homogroupe résorbant réduit* ([14]) *associé à l'équivalence* R.

Soient G un groupe maximal dans H, g l'élément neutre de G et G_0 l'ensemble des éléments de G équivalents à g mod R.

Théorème 24. — *Si* $x \in G$, $y \in G$, *la relation* $x \equiv y$ (R), *entraîne* $G_0.x = G_0.y$. *et inversement.*

Si l'on considère la trace de R sur G, on voit immédiatement que G_0 est un sous-groupe de G et donc que la relation

$$x \equiv y \quad (R) \quad \text{entraîne} \quad G_0.x = G_0.y.$$

Inversement, soit $G_0.x = G_0.y$. On a

$$x = gx = g_1 y, \qquad \text{avec} \quad g_1 \in G_0.$$

Comme $g \equiv g_1$ (R), on a

$$y = gy \equiv g_1 y \quad (R) \qquad \text{et} \qquad x \equiv y \quad (R).$$

Si K est un complexe de H, nous désignerons par φ_K *l'équivalence régulière à droite* ([15]) définie par $a \varphi_K a'$ si et seulement si l'on a $Ka = Ka'$.

([14]) Remarquons que tout groupe maximal G de H^*, $G \neq N_S$, est une classe mod R.

([15]) Symétriquement, nous désignons par $_K\varphi$ l'équivalence régulière à gauche définie par $a\, {}_K\varphi\, a'$ si et seulement si $aK = a'K$.

THÉORÈME 25. — *Si* K *est un sous-homogroupe résorbant régulier de* H, *le sous-homogroupe résorbant réduit* F *associé à l'équivalence* φ_K *est* K *lui-même.*

Soit N_F le nodule de F, c'est-à-dire $N_F = Fe$. Remarquons que le nodule de la classe unitive mod φ_K est aussi N_F. Si $x \in N_F$, on a

$$x \equiv e \quad (\varphi_K), \qquad \text{d'où} \qquad Kx = Ke \subseteq K, \qquad \text{puisque} \quad e \in K.$$

Comme $ex = x$, on a $x \in K$ et $N_F \subseteq K$. Si F contient encore d'autres éléments n'appartenant pas à N_F et si y est un tel élément, y appartient à une classe semi-unitive T mod φ_K, différente de la classe unitive. D'après le théorème **21**, T est un groupe et e_y est l'élément neutre de T. On a donc

$$y \equiv e_y \quad (\varphi_K), \qquad \text{d'où} \qquad Ky = Ke_y.$$

Montrons que $e_y \in K$. En effet, si $e_y \notin K$, on a d'après le théorème **19**,

$$K.y = N_K.y, \qquad \text{d'où} \qquad K.e_y = K.yy^{-1} = N_K.yy^{-1} = N_K.e_y.$$

Mais $N_K = K.e$. Donc

$$K.e_y = K.ee_y = K.e \qquad \text{et} \qquad e_y \equiv e \quad (\varphi_K),$$

ce qui est impossible, puisque e_y n'appartient pas à la classe unitive. Donc $e_y \in K$, et $Ky = Ke_y \subseteq K$. En particulier, $e_y.y = y \in K$. Des considérations précédentes, il suit donc

$$F \subseteq K.$$

Montrons ensuite que $K \subseteq F$. Soit d'abord $x \in N_K$, et par conséquent $ex = x$. On a

$$K.x = K.ex = N_K.x.$$

Comme N_K est un groupe, on a

$$N_K.x = N_K \qquad \text{et} \qquad K.x = N_K = K.e.$$

D'où

$$x \equiv e \quad (\varphi_K)$$

et x appartient à la classe unitive mod φ_K et au nodule de cette classe, car $xe = x$. Par conséquent, $x \in F$.

Si maintenant il existe un élément $y \in K$, $y \notin N_K$, y est contenu dans un groupe G_y^K maximal dans K, avec $G_y^K \subseteq G_y$ et e_y est l'élément neutre de G_y^K. D'où

$$G_y^K.y = G_y^K.e_y.$$

Comme $y.e \in N_K$ et $e_y e = e$, on a

$$N_K = N_K.y = N_K.e_y.$$

Par conséquent

$$G_y^K.y \cup N_K.y = G_y^K.e_y \cup N_K.e_y.$$

Puisque $e_y \neq e$ et $e_y \in K$, on a d'après le théorème **19**, en considérant que $G_y^K = G_{e_y}^K$:

$$K.y = G_y^K.y \cup N_K.y, \qquad K.e_y = G_y^K.e_y \cup N_K.e_y.$$

D'où

$$K.y = K.e_y \quad \text{et} \quad y \equiv e_y \quad (\varphi_K).$$

L'élément e_y n'appartient pas à la classe unitive mod φ_K. car la relation

$$e_y \equiv e \quad (\varphi_K) \quad \text{entraînerait} \quad K.e_y = K.e = N_K$$

et, puisque $e_y \in K$, $e_y = e_y . e_y \in N_K$, c'est-à-dire $e_y = e$, ce qui est impossible.

Par conséquent, e_y et y appartiennent à une classe semi-unitive autre que la classe unitive et l'on a donc

$$y \in F, \quad K \subseteq F.$$

D'où

$$K = F.$$

Théorème 26. — *Si* R *est une équivalence régulière à droite dans l'homogroupe résorbant* H, *et si* K *est le sous-homogroupe résorbant réduit de* H *associé à* R, *on a*

$$R = \varphi_K.$$

1° Soit $x \equiv y$ (R). On a

$$e_x = xx^{-1} \equiv yx^{-1} \quad (R), \qquad e_y = yy^{-1} \equiv xy^{-1} \quad (R).$$

D'après le théorème 18, e_x et e_y appartiennent au centre de H. Donc

$$e_x e_y \equiv yx^{-1} e_y = ye_y . x^{-1} = yx^{-1} \quad (R),$$
$$e_y e_x \equiv xy^{-1} e_x = xe_x . y^{-1} = xy^{-1} \quad (R).$$

D'où

$$yx^{-1} \equiv xy^{-1} \quad (R) \qquad \text{et} \qquad e_x \equiv e_y \quad (R).$$

D'autre part, $xe \equiv ye$ (R). Si N_K et N_S sont respectivement les nodules de K et de la classe unitive S mod R, on a $N_K = N_S$ et $N_K \subseteq N$. Le nodule N de H est un groupe maximal dans H et $xe \in N$, $ye \in N$. Comme N_S est l'ensemble des éléments de N équivalents à e mod R, on a d'après le théorème 24,

$$N_K . xe = N_K . ye,$$

d'où

$$(1) \qquad N_K . x = N_K . y.$$

a. Si e_x appartient à une classe semi-unitive $T \neq S$, T est un groupe maximal dans K (théorèmes 21 et 23). Par conséquent, $e_x = e_y$ et $G_x = G_y$. Comme $x \in G_x$, $y \in G_y$, il résulte du théorème 24,

$$(2) \qquad T . x = T . y.$$

Les égalités (1) et (2) entraînent

$$N_K . x \cup T . x = N_K . y \cup T . y.$$

On a donc, d'après le théorème 19, puisque $e_x \neq e$ et $e_x \in K$ et que d'autre part $G^K_{e_x} = T = G^K_{e_y}$:

$$K . x = N_K . x \cup T . x = N_K . y \cup T . y = K . y,$$

c'est-à-dire

$$x \equiv y \quad (\varphi_K).$$

b. Si $e_x \in S$, il en est de même pour e_y et l'on a

$$e_x = e \quad \text{ou} \quad e_x \notin K, \qquad e_y = e \quad \text{ou} \quad e_y \notin K,$$

car K étant le sous-homogroupe résorbant réduit associé à R, ne contient que le nodule N_S de S. D'où, d'après le théorème 19,

$$K.x = N_K.x, \qquad K.y = N_K.y.$$

De l'égalité (1) résulte alors

$$K.x = K.y,$$

c'est-à-dire

$$x \equiv y \quad (\varphi_K).$$

Par conséquent

$$R \subseteq \varphi_K,$$

2° Soit $x \equiv y$ (φ_K), c'est-à-dire $K.x = K.y$. D'après le théorème 25, le sous-homogroupe résorbant réduit associé à φ_K est K lui-même, qui est aussi le sous-homogroupe résorbant réduit associé à R. Par conséquent, tout groupe maximal dans K, différent de N_K, est, s'il existe, une classe mod φ_K et mod R.

Comme sous 1°, on montre que

$$e_x \equiv e_y \quad (\varphi_K).$$

D'autre part

$$xe \equiv ye \quad (\varphi_K) \qquad \text{et} \qquad K.xe = K.ye, \qquad N_K.x = N_K.y.$$

a. Si e_x appartient à une classe semi-unitive T^* mod φ_K différente de la classe unitive S^* mod φ_K, T^* est un groupe maximal dans K et l'on a

$$e_x = e_y, \qquad G_x = G_y, \qquad G^K_{e_x} = T^* = G^K_{e_y}.$$

Il suit, d'après le théorème 19,

$$N_K.x \cup T^*.x = K.x = K.y = N_K.y \cup T^*.y.$$

D'autre part, $G_x \cap N = \emptyset$, car $e_x \neq e$. Comme $N_K.x \subseteq N$, et $T^*.x \subseteq G_x$, on a $N_K.x \cap T^*.x = \emptyset$. De même, $N_K.y \cap T^*.y = \emptyset$. Ceci entraîne, puisque $N_K.x = N_K.y$:

$$T^*.x = T^*.y.$$

D'après ce qui a été dit au début de 2°, T^* est une classe mod R, puisque T^* est un groupe maximal dans K. Comme $T^* \subseteq G_x$ et $x \in G_x$, $y \in G_x$, on a

$$x \equiv y \quad (R)$$

d'après le théorème 24.

b. Si $e_x \in S^*$, il en est de même pour e_y. On a alors

$$e_x \equiv e_y \equiv e \quad (\varphi_K).$$

D'autre part

$$N_K.xe = N_K.ye.$$

Les éléments xe et ye appartiennent au groupe N maximal dans H, et N_K est l'ensemble des éléments de N équivalents à $e \bmod \varphi_K$ et $\bmod R$. Donc d'après le théorème **24**,

$$xe \equiv ye \quad (R).$$

De $e_x \equiv e(\varphi_K)$ et du fait que K est le sous-homogroupe résorbant réduit associé à φ_K et à R, il résulte $e_x \equiv e(R)$ et de même $e_y \equiv e(R)$. D'où

$$x = e_x.x \equiv e.x = xe \quad (R),$$
$$y = e_y.y \equiv e.y = ye \quad (R)$$

et

$$x \equiv y \quad (R)$$

Par conséquent

$$\varphi_K \subseteq R$$

et donc

$$\varphi_K = R.$$

Ainsi, dans un homogroupe résorbant H, *les équivalences régulières à droite sont les équivalences* φ_K *associées aux sous-homogroupes résorbants réguliers* K *de* H. *On montre d'une manière symétrique que les équivalences régulières à gauche sont les équivalences* $_K\varphi$.

Théorème 27. — *Pour que l'équivalence* φ_K *associée au sous-homogroupe résorbant régulier* K *de* H *soit simplifiable à droite, il faut et il suffit que* $K.e = K$.

La condition est nécessaire. En effet, on a pour tout idempotent $e_x \in H$,

$$e = ee = e_x e, \qquad \text{d'où} \qquad ee \equiv e_x e \quad (\varphi_K) \qquad \text{et} \qquad e \equiv e_x \quad (\varphi_K).$$

Par conséquent, la classe unitive S est la seule classe semi-unitive $\bmod \varphi_K$. D'après le théorème 25, K est le sous-homogroupe résorbant réduit associé à φ_K, donc K ne contient ici que le nodule de la classe unitive $N_S = N_K$. D'où

$$K.e = N_K.e = N_K = K.$$

La condition est suffisante. Soit

$$ax \equiv bx \quad (\varphi_K).$$

On a, puisque φ_K est régulière à droite,

$$ae_x = axx^{-1} \equiv bxx^{-1} = be_x \quad (\varphi_K),$$

c'est-à-dire

$$K.ae_x = K.be_x.$$

Comme e_x appartient au centre de H, il suit

$$K.e_x a = K.e_x b.$$

Par hypothèse, $K.e = K$. Donc

$$Ke.e_x a = Ke.e_x b, \qquad Ke.a = Ke.b \qquad \text{et} \qquad K.a = K.b,$$

c'est-à-dire

$$a \equiv b \quad (\varphi_K).$$

THÉORÈME 28. — *Pour que l'équivalence* φ_K *associée au sous-homogroupe résorbant régulier* K *de* H *soit régulière, il faut et il suffit que* K *soit central* [16] *et l'on a* $\varphi_K = {}_K\varphi$.

La condition est suffisante, c'est immédiat. Elle est aussi nécessaire. En effet, d'après le théorème 25, K est le sous-homogroupe résorbant réduit de H, associé à φ_K. Si N_K est le nodule de K, N_K est donc l'ensemble des éléments de N équivalents à $e \bmod \varphi_K$. Comme N et N_K sont des groupes, N_K est sous-groupe invariant de N. D'où, pour tout $x \in H$:

$$N_K.x = N_K e.x = N_K.ex = ex.N_K = x.eN_K = x.N_K, \qquad \text{puisque} \quad ex \in N.$$

D'autre part, si $e_x \neq e$ et si $e_x \in K$, le groupe $G^K_{e_x}$ maximal dans K est une classe $\bmod \varphi_K$, et $G^K_{e_x} \subseteq G_x$. Par conséquent, $G^K_{e_x}$ est sous-groupe invariant du groupe G_x et $x.G^K_{e_x} = G^K_{e_x}.x$.

On a donc, d'après le théorème 19,

$$K.x = x.K \quad \text{pour tout } x \in H.$$

THÉORÈME 29. — *Si* R *est une équivalence régulière dans l'homogroupe résorbant* H, *le demi-groupe-quotient* H/R *est un homogroupe résorbant homomorphe à* H.

On voit immédiatement que H/R est un homogroupe vérifiant la condition (α). Soit X une classe mod R idempotente et soit $x \in X$. On a donc

$$xx \equiv x \quad (R), \qquad \text{d'où} \qquad xxx^{-1} \equiv xx^{-1} \quad (R), \qquad x \equiv e_x (R), \qquad e_x \in X.$$

Si Y est une classe mod R idempotente, telle que $X \neq Y$, et si $y \in Y$, $e_y \in Y$. Mais $e_x.e_y = e$. Donc $X.Y = S$, où S est la classe unitive mod R, donc l'élément unitif de H/R qui est ainsi résorbant.

L'intérieur [17] *de l'homogroupe résorbant* H *est* H *lui-même*. On a en effet, pour tout $a \in H$ et tout $x \in H$:

$$xa = xe_x a = xae_x = xax^{-1}.x,$$
$$ax = ae_x x = e_x ax = x.x^{-1}ax.$$

THÉORÈME 30. — *Le centre* Z *de* H *est un sous-homogroupe résorbant régulier, central et abélien de* H.

Le centre Z n'est pas vide, puisque tous les idempotents de H appartiennent à Z, d'après le théorème 18. Par conséquent, d'après le théorème 41 de DG I, Z est un sous-demi-groupe central et abélien de H. D'autre part, si $x \in Z$, $x^{-1} \in Z$.

---

(16) DG I, p. 40. Un sous-demi-groupe S d'un demi-groupe D est central si l'on a $xS = Sx$ pour tout x de D.

(17) DG I, p. 46.

En effet, pour tout $a \in \mathrm{H}$, on a

$$xa = ax,$$

d'où

$$e_x ax^{-1} = x^{-1}xax^{-1} = x^{-1}axx^{-1} = x^{-1}ae_x \qquad \text{et} \qquad ax^{-1} = x^{-1}a.$$

Par conséquent, Z vérifie la condition (α). De plus

$$xx^{-1} = e_x \in \mathrm{Z}, \qquad \text{d'où} \qquad x.x^{-1}e = e_x.e = e$$

et Z est un sous-homogroupe résorbant régulier de H.

Soient maintenant a un élément de H et α l'application de H dans lui-même définie par

(1) $$\alpha x = axa^{-1}.$$

Comme H est résorbant, à chaque élément de H correspond une telle application. Cette application est *régulière* pour l'opération de H, puisque

$$\alpha(xy) = axya^{-1} = ae_a.xya^{-1} = ax.e_a.ya^{-1} = axa^{-1}.aya^{-1} = \alpha(x)\alpha(y).$$

Les applications définies par la relation (1) sont donc des endomorphismes de H et nous les appellerons les *endomorphismes intérieurs de* H.

Théorème 31. — *L'ensemble* Γ *des endomorphismes intérieurs de* H *forme un homogroupe résorbant homomorphe à* H *et l'on a l'isomorphisme*

$$\Gamma \simeq \mathrm{H}/\rho_{\mathrm{Z}}.$$

En effet, soit l'application

(2) $$a \to \alpha$$

de H sur l'ensemble Γ, définie par (1). Au produit ba correspond l'endomorphisme π définie par

$$\pi x = ba.x.(ba)^{-1}.$$

Montrons que $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Si $e_a = e_b$, a et b appartiennent au même groupe maximal dans H et l'on a bien alors $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Si $e_a \neq e_b$, $e_a.e_b = e$, et d'autre part on a

$$e_a = e_a^{-1}, \qquad e_b = e_b^{-1}.$$

D'où d'après le théorème 18,

$$ab \in \mathrm{N}, \qquad ba \in \mathrm{N}, \qquad a^{-1}b^{-1} \in \mathrm{N}, \qquad b^{-1}a^{-1} \in \mathrm{N}.$$

Le nodule N est un groupe maximal dans H et e est son élément neutre. On a

$$ba.a^{-1}b^{-1} = b.e_a.b^{-1} = e_a.bb^{-1} = e_a.e_b = e.$$

Donc $a^{-1}b^{-1}$ est l'inverse de ba dans le groupe N et l'on a

$$(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

Par conséquent

$$\pi x = ba.x.(ba)^{-1} = ba.x.a^{-1}b^{-1} = \beta(axa^{-1}) = \beta(\alpha x) = \beta\alpha x$$

et l'application (2) de H sur Γ est un homomorphisme. Il en résulte que Γ est un demi-groupe homomorphe à H, donc Γ est un homogroupe résorbant (conséquence du théorème 29). Il existe alors dans H un sous-homogroupe résorbant central K tel que l'on ait l'isomorphisme

$$\Gamma \simeq H/\varphi_K, \qquad \text{avec} \quad \varphi_K = \Delta,$$

Δ étant l'équivalence d'homomorphisme.

Montrons que $K = Z$. D'après le théorème 25, K est le sous-homogroupe résorbant réduit associé à φ_K. A toute classe semi-unitive mod φ_K, correspond un endomorphisme intérieur idempotent, et inversement, puisque d'après la démonstration du théorème 29, toute classe idempotente est semi-unitive. D'autre part, si e_1 et e_2 sont deux idempotents différents de H, les applications correspondantes ε_1 et ε_2, $\varepsilon_1 \in \Gamma$, $\varepsilon_2 \in \Gamma$, sont différentes. En effet, on peut toujours supposer alors $e_2 \neq e$ et l'on a

$$\varepsilon_1 e_2 = e_1 e_2 e_1 = e, \qquad \varepsilon_2 e_2 = e_2 e_2 e_2 = e_2.$$

Il en résulte que la classe unitive S mod φ_K ne contient qu'un idempotent, donc se confond avec son propre nodule N_S, puisque S est un sous-homogroupe résorbant de H. Par conséquent, K est la réunion de toutes les classes semi-unitives, et K est l'ensemble des éléments r de H auxquels correspondent dans Γ les endomorphismes idempotents. On a donc pour tout $x \in H$:

$$r(rxr^{-1})r^{-1} = rxr^{-1},$$

d'où

$$rxr^{-1} = r^{-1}(rxr^{-1})r = e_r x e_r = xe_r \qquad \text{et} \qquad rxe_r = xe_r r, \qquad rx = xr,$$

c'est-à-dire $r \in Z$, et par conséquent $K \subseteq Z$.

Si $z \in Z$, on a

$$e_z x = zz^{-1}x = z^2 . z^{-2}x,$$

et d'après le théorème 30,

$$zxz^{-1} = z^2xz^{-2} = z(zxz^{-1})z^{-1}.$$

Nous avons donc

$$z \in K \qquad \text{et} \qquad K = Z.$$

Comme exemple d'homogroupes résorbants, nous avons évidemment les groupes. Les pseudo-groupes ([18]) sont également des homogroupes résorbants. Un demi-treillis contenant un élément e tel que la relation $a \neq b$ entraîne $a \cup b = e$ est un homogroupe résorbant.

Soit un groupe G et soit S un sous-groupe invariant de G. Les complexes Sx, avec x parcourant G, et les éléments de G forment un homogroupe résorbant H, en considérant H comme sous-demi-groupe du demi-groupe des parties de G (*voir* DG III). L'élément unitif de H est le sous-groupe S. Le nodule N de H est

---

([18]) DG I, p. 5. Un pseudo-groupe est un demi-groupe formé de la réunion d'un groupe et d'un élément permis.

formé des complexes Sx et H est la réunion de N et G. L'élément neutre g de G est aussi élément neutre dans H.

Remarquons qu'un homogroupe résorbant possède un élément neutre si et seulement s'il contient au plus deux éléments idempotents.

CHAPITRE II.

Équivalences régulières dans les demi-groupes.

1. Propriétés des équivalences réversibles généralisées définies par des complexes quelconques. — Dans ce paragraphe, nous étendons au cas d'un complexe quelconque quelques propriétés des équivalences réversibles généralisées établies par P. Dubreil ([19]) pour le cas d'un sous-demi-groupe.

Soit le demi-groupe D. Un complexe $K \subseteq D$ est dit *intègre à gauche* si la relation $kx \in K^2$, avec $k \in K$, entraîne $x \in K$. On définit d'une manière symétrique un complexe intègre à droite.

Un sous-demi-groupe S *unitaire* ([20]) *à gauche est intègre à gauche, et inversement.*

En effet, si S est unitaire à gauche, la relation $sx \in S^2$ avec $s \in S$, entraîne $sx \in S$, donc $x \in S$. Inversement, si S est intègre à gauche et si $sx = s_1 \in S$, on a, si $s' \in S$, $s'sx = s's_1 \in S^2$. Comme $s's \in S$, $x \in S$.

Soient H un complexe quelconque de D et Σ_H l'équivalence réversible généralisée à droite associée à ce complexe. Par définition, on a $a \equiv b\,(\Sigma_H)$ si et seulement s'il existe un nombre fini n d'éléments $m_1, \ldots, m_n \in D$ tels que

$$Ha \between Hm_1 \between \ldots \between Hm_n \between Hb,$$

la notation $Hx \between Hy$ signifiant $Hx \cap Hy \neq \emptyset$. Posons

$$V = \bigcup_{h \in H} (H^2 .\cdot h)$$

et soit T l'extension saturée de H par Σ_H,

Théorème 32. — *On a*

$$H \subseteq V \subseteq T.$$

Pour que $H = T$, *il faut et il suffit que* H *soit intègre à gauche. Si* K *est un complexe intègre à gauche contenant* H, *on a*

$$T \subseteq K.$$

En effet, si $x \in V$, il existe $h \in H$ tel que l'on ait $hx = h_1h_2$, avec $h_1 \in H$, $h_2 \in H$. Donc

$$x \equiv h_2 \quad (\Sigma_H) \qquad \text{et} \qquad H \subseteq V \subseteq T$$

([19]) DG II, p. 10-18.

([20]) DG I, p. 16. Un sous-demi-groupe S est unitaire à gauche si les relations $s \in S$, $sx \in S$ entraînent $x \in S$.

Si $H = T$, la relation $hx = h_1 h_2$ entraîne $x \in H$, c'est-à-dire H est intègre à gauche. Inversement, supposons H intègre à gauche et soit $t \in T$. Il existe alors un élément $h \in H$ tel que

$$h \equiv t \quad (\Sigma_H)$$

et l'on a une suite de relations de la forme

$$(1) \qquad h_0 h = h'_0 m_1, \qquad h_1 m_1 = h'_1 m_2, \qquad \ldots, \qquad h_n m_n = h'_n t.$$

Comme H est intègre à gauche, cela entraîne successivement

$$m_1 \in H, \qquad m_2 \in H, \quad \ldots, \qquad m_n \in H, \qquad t \in H.$$

Par conséquent, $H = T$.

Si $H \subseteq K$, on a $\Sigma_H \subseteq \Sigma_K$. Si $t \in T$, on a

$$t \equiv h \quad (\Sigma_H), \qquad \text{où} \quad h \in H \subseteq K; \qquad \text{d'où} \quad t \equiv h \quad (\Sigma_H)$$

Mais K est intègre à gauche, donc $t \in K$ et $T \subseteq K$.

On sait [21] que si H est un sous-demi-groupe, l'extension saturée T de H par Σ_H est un sous-demi-groupe unitaire à gauche, donc intègre à gauche, et l'on a l'égalité $\Sigma_H = \Sigma_T$. Nous allons montrer par des exemples que si H est un complexe quelconque ces propriétés ne subsistent pas nécessairement.

Considérons d'abord le groupe G d'ordre 2, $G = \{e, a\}$, e étant l'élément neutre. Si $H = \{a\}$, nous avons $T = \{a\}$, et T n'est pas un sous-demi-groupe.

Soit ensuite le demi-groupe D donné par la table suivante :

	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	z
	z	z	z

Soit le complexe $H = \{y\}$. Les classes mod Σ_H sont $\{x\}$, $\{y, z\} = T$. Il n'y a qu'une classe mod Σ_T, le demi-groupe D lui-même. Par conséquent, $\Sigma_H \neq \Sigma_T$. D'autre part, T n'est pas intègre à gauche, car on a $zx = z \in T^2 = \{z\}$, sans avoir $x \in T$.

Théorème 33. — *Si* H^2 *est un complexe fort* [22] *on a*

$$HV = H^2 \qquad \text{et} \qquad V = T.$$

Soient $x \in V$ et $t \in T$. Il existe $h \in H$ tel que l'on ait $hx \in H^2$; d'autre part $hh \in H^2$. Donc

$$h \in (H^2 \cdot . x) \cap (H^2 \cdot . h),$$

d'où

$$(H^2 \cdot . x) = (H^2 \cdot . h) \supseteq H \qquad \text{et} \qquad Hx \subseteq H^2, \qquad HV \subseteq H^2.$$

Mais $H^2 \subseteq HV$. Donc $HV = H^2$.

---

(21) DG II, théorème 9.
(22) DG I, p. 9.

La suite (1) de relations entraîne alors successivement

$$m_1 \in V, \quad h_1 m_1 \in H^2, \quad m_2 \in V, \quad \ldots, \quad m_n \in V, \quad h_n m_n \in H^2, \quad t \in V.$$

Donc

$$V = T.$$

Remarquons que si H est un complexe quelconque vérifiant l'égalité $HV = H^2$ on a $V = T$.

Théorème 34. — *Si* H *est un complexe intègre à gauche, on a* $\Sigma_H \subseteq R_H$, *où* R_H *est l'équivalence principale à droite associée à* H.

Soit $ha = h'a'$. Si $ax \in H$, $hax \in H^2$ et $hax = h'a'x$. Donc $a'x \in H^2 .\cdot h' \subseteq V$. Comme H est intègre à gauche, on a $H = V$, d'après le théorème 32. Par conséquent, $x \in H .\cdot a'$, et $H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$. On montre de même que $H .\cdot a' \subseteq H .\cdot a$, et donc $H .\cdot a = H .\cdot a'$.

Par conséquent, $\Sigma_H \subseteq R_H$.

Un complexe H de D est dit *unifié à droite*, si $H \cdot . H \neq \emptyset$. Si $(H \cdot . H) \cap H \neq \emptyset$, H est dit *interne à droite*. Un complexe parfait [23] à gauche est unifié à droite. Si R est une équivalence régulière à gauche dans D et si l'on a $xa \equiv a$ (R), la classe A mod R contenant a est unifiée à droite.

Théorème 35. — *Si* H *est unifié à droite, le complexe* $K = H \cdot . H$ *est un sous-demi-groupe de* D. *Si* $K' = H \cap K \neq \emptyset$, K' *est aussi un sous-demi-groupe. D'autre part,* K' *est saturé* mod R_H, *et si* H *est fort,* K *est une classe* mod R_H.

Si $x \in K$, $y \in K$, on a $xH \subseteq H$, $yH \subseteq H$. Donc

$$xyH \subseteq xH \subseteq H \quad \text{et} \quad xy \in K.$$

Si $K' \neq \emptyset$, et si $h_1 \in K'$, $h_2 \in K'$, on a

$$h_1 h_2 \in K \quad \text{et} \quad h_1 h_2 \in h_1 H \subseteq H.$$

Soit ensuite

$$z \equiv k \quad (R_H), \qquad \text{où} \quad k \in K,$$

c'est-à-dire

$$H .\cdot z = H .\cdot k.$$

Mais $H \subseteq H .\cdot k = H .\cdot z$. Par conséquent $zH \subseteq H$, et $z \in K$.

Si H est fort, on a, puisque $H \subseteq (H .\cdot k) \cap (H .\cdot k')$ quels que soient k et $k' \in K$, $H .\cdot k = H .\cdot k'$.

Théorème 36. — *Pour qu'un complexe fort* H *soit un sous-demi-groupe, il faut et il suffit qu'il soit parfait à droite et interne à droite.*

La condition est évidemment nécessaire, d'après le théorème 15 de DG I. Elle est aussi suffisante. En effet, d'après le théorème 12 de DG I, H est contenu dans une classe mod R_H. Mais H étant interne à droite, il existe $h \in H$ tel que $hH \subseteq H$, ce qui entraîne $h'H \subseteq H$ pour tout $h' \in H$. Donc $H^2 \subseteq H$.

(23) DG I, p. 14.

Remarque. — Si H est unifié à droite, fort et équirésiduel, on a

$$ka \equiv a \quad (R_H)$$

pour tout $k \in K = H \cdot . H$ et tout $a \in D$.

En effet, si $ax \in H$, $kax \in H$. Par conséquent, $\Sigma_K \subseteq R_H$, d'après le **théorème 8** de DG II. Si H est de plus symétrique, la classe K est évidemment **un** élément neutre à gauche dans le demi-groupe quotient D/R_H.

Soit maintenant un complexe quelconque H. Posons

$$L = \bigcup_{h \in H} (H \cdot\!\cdot h)$$

et supposons $L \neq \emptyset$, ce qui a lieu en particulier lorsque H est net à droite. On a pour tout $y \in L$ et tout $a \in D$,

$$ya \equiv a \quad (\Sigma_H).$$

Par conséquent, toute classe X mod Σ_H est unifiée à droite puisque $LX \subseteq X$.

Soit $N \subseteq L$, et soient M et P les extensions saturées respectives de N et L par Σ_H.

Théorème 37. — *On a*

$$pa \equiv a \quad (\Sigma_H)$$

pour tout $p \in P$ *et tout* $a \in D$. *Le complexe* M *est un sous-demi-groupe unitaire à gauche. En particulier, toute classe contenue dans* P *est un sous-demi-groupe unitaire à gauche. L'équivalence* Σ_H *est régulière dans* P *et l'ensemble-quotient* $\overline{P} = P/\Sigma_H$ *est un demi-groupe homomorphe à* P *dans lequel tout élément est neutre à gauche.*

On a $p \equiv y\ (\Sigma_H)$, pour au moins un $y \in L$. D'où, puisque Σ_H est régulière à droite,

$$pa \equiv ya \equiv a \quad (\Sigma_H).$$

Si m et m_1 appartiennent à M, on a

$$mm_1 \equiv m_1 \quad (\Sigma_H),$$

c'est-à-dire $mm_1 \in M$, puisque M est saturé par Σ_H. Si $mx \in M$, on a

$$mx \equiv x \quad (\Sigma_H),$$

donc $x \in M$.

Si

$$p_1 \equiv p_2 \quad (\Sigma_H), \qquad \text{avec } p_1 \in P, \qquad p_2 \in P,$$

on a

$$pp_1 \equiv p_1 \quad (\Sigma_H), \qquad pp_2 \equiv p_2 \quad (\Sigma_H)$$

pour tout $p \in P$. Donc

$$pp_1 \equiv pp_2 \quad (\Sigma_H)$$

et Σ_H est régulière dans P. Par conséquent $\overline{P}$ est un demi-groupe homomorphe à P et tout élément de $\overline{P}$ est neutre à gauche, puisque $pa \equiv a\ (\Sigma_H)$.

THÉORÈME 38. — *Si* T *est l'extension saturée de* H *par* Σ_H, *on a* $T = T \cdot\!\cdot P$, *et le complexe* $\bigcup_{t \in T} (T \cdot . t)$ *est saturé par* Σ_H.

D'après le théorème 37, on a $PT \subseteq T$. Si $x \in T \cdot\!\cdot P$, il existe $p \in P$ tel que $px = t \in T$. D'où $px \equiv x \equiv t\ (\Sigma_H)$, et $x \in T$.

Si $xt \in T$ et si $x \equiv z\ (\Sigma_H)$, on a

$$xt \equiv zt \quad (\Sigma_H).$$

Donc $zt \in T$.

Supposons maintenant de plus que le complexe H soit tel que $B = L \cdot . H \neq \emptyset$, et posons $BH = L_1 \subseteq L$.

THÉORÈME 39. — *L'équivalence* Σ_H *est la plus fine des équivalences* R *telles que*

$$ra \equiv a \quad (R)$$

pour tout $r \in L_1$, *et tout* $a \in D$.

En effet, soit $ha = h_1 a_1$, avec $h \in H$, $h_1 \in H$. Soit $b \in B$. On a $bha = bh_1 a_1$. D'où, en posant $bh = r \in L_1$, $bh_1 = r_1 \in L_1$,

$$ra = r_1 a_1.$$

Mais

$$ra \equiv a \quad (R), \qquad r_1 a_1 \equiv a_1 \quad (R),$$

donc $a \equiv a_1 (R)$.

Un complexe H de D est dit *réversé à droite* pour un complexe K, si l'on a $KH \subseteq H$, et si pour tout couple d'éléments $h_1 \in H$, $h_2 \in H$, il existe un couple d'éléments $k_1 \in K$, $k_2 \in K$ tels que l'on ait $k_1 h_1 = k_2 h_2$. Si S est un sous-demi-groupe de D, réversible à droite ([24]), tout complexe Sa, avec $a \in D$, est réversé à droite pour S.

THÉORÈME 40. — 1° *Si* A *et* B *sont deux complexes unifiés à droite, et si* K *et* G *sont deux complexes tels que l'on ait*

$$KA \subseteq A, \qquad GB \subseteq B, \qquad GA \subseteq AG$$

le complexe AB *est unifié à droite et l'on a*

$$KGAB \subseteq AB.$$

2° *Si* A *et* G *sont échangeables à droite* ([25]), *et si* A *est réversé à droite pour* K, *et* B *réversé à droite pour* G, *le complexe* AB *est réversé à droite pour* KG.

1° En effet, $KGAB \subseteq KAGB \subseteq AB$, et AB est unifié à droite.

2° Soient $m = ab$ et $m_1 = a_1 b_1$ deux éléments du complexe AB. On a

$$gb = g_1 b_1, \text{ avec } \quad g \in G, \quad g_1 \in G.$$

([24]) DG I, p. 34. Un complexe H est réversible à droite. si pour tout couple d'éléments $h_1 \in H$, $h_2 \in H$, il existe $h'_1 \in H$, $h'_2 \in H$ tels que $h'_1 h_1 = h'_2 h_2$.

([25]) DG I, p. 34.

Comme A et G sont échangeables à droite, on a

$$g'a = a'g, \quad \text{avec } g' \in G, \quad a' \in A\,;$$
$$g'_1 a_1 = a'_1 g_1, \quad \text{avec } g'_1 \in G, \quad a'_1 \in A\,;$$

A étant réversé à droite pour K, on a

$$ka' = k_1 a'_1, \quad \text{avec } k \in K, \quad k_1 \in K.$$

Posons

$$m' = kg', \qquad m'_1 = k_1 g'_1.$$

On a

$$m'm = kg'ab = ka'gb,$$
$$m'_1 m_1 = k_1 g'_1 a_1 b_1 = k_1 a'_1 g_1 b_1\,;$$

d'où

$$m'm = m'_1 m_1, \quad \text{avec } m' \in KG, \quad m'_1 \in KG.$$

Théorème 41. — *Si* H *est un complexe réversé à droite pour* K, *la relation de réversibilité à droite* [26] σ_H *associée à* H *est transitive, et l'on a* $\sigma_H = \Sigma_H$.

En effet, soient les égalités

$$ha = h_1 a_1, \qquad h'_1 a_1 = h'_2 a_2, \qquad \text{avec } h,\ h_1,\ h'_1,\ h'_2 \in H.$$

On a

$$kh_1 = k'h'_1, \quad \text{avec } k \in K, \quad k' \in K, \quad \text{d'où} \quad kha = k'h'_2 a_2.$$

Mais $kh = h_0 \in H$, $k'h'_2 = h'_0 \in H$. Donc

$$h_0 a = h'_0 a_2.$$

Théorème 42. — *Si* H *est un complexe réversé à droite pour* K *et s'il existe* $h \in H$ *tel que l'on ait* $hK \subseteq H$, *le complexe* H *est réversible à droite, donc contenu dans une classe* X mod $\Sigma_H = \sigma_H$. *Cette classe* X *est réversible à droite, ainsi que tout complexe compris entre* H *et* X. *On a les relations*

$$\bigcup_{k \in K} (H \,.\cdot\, k) \subseteq X = \bigcup_{h \in H} (H^2 \,.\cdot\, h), \qquad XK \subseteq X.$$

Si de plus $KH \subseteq K \subseteq H$, X *est un sous-demi-groupe et l'on a*

$$\bigcup_{k \in K} (H \,.\cdot\, k) = X.$$

Soient $h_0 \in H$, $h_1 \in H$. Il existe $k_0 \in K$, $k_1 \in K$ tels que l'on ait $k_0 h_0 = k_1 h_1$. D'où

$$hk_0 h_0 = hk_1 h_1.$$

Mais $hk_0 = h'_0 \in H$, $hk_1 = h'_1 \in H$. Donc

$$h'_0 h_0 = h'_1 h_1,$$

H est par conséquent réversible à droite, et d'après DG II, p. 15, H est contenu

---

[26] DG II, p. 10. On a $a \sigma_H a'$ si et seulement s'il existe $h,\ h' \in H$ tels que $ha = h'a'$.

dans une classe X mod $\Sigma_H = \sigma_H$. Cette classe X est réversible à droite, car si

$$x \in X, \qquad x_1 \in X, \qquad x \equiv x_1 \quad (\Sigma_H)$$

il existe $h_0 \in H$, $h_1 \in H \subseteq X$, tels que l'on ait

$$h_0 x = h_1 x_1.$$

On voit immédiatement qu'il en est de même pour tout complexe compris entre H et X.

Si $kz = h_1 \in H$, on a

$$hkz = hh_1, \qquad \text{avec} \quad hk = h_2 \in H.$$

D'où

$$z \equiv h_1 \quad (\Sigma_H) \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k \in K} (H \,.\cdot\, k) \subseteq X.$$

On voit facilement que

$$X = \bigcup_{h \in H} (H^2 \,.\cdot\, h).$$

Si $x \in X$, on a $x \equiv h$ (Σ_H). D'où

$$xk \equiv hk = h_2 \quad (\Sigma_H)$$

quel que soit $k \in K$. Par conséquent

$$XK \subseteq X.$$

Soit ensuite $KH \subseteq K \subseteq H$. Si $x \equiv h$ (Σ_H), il existe $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ tels que $h_1 x = h_2 h$. D'où

$$kh_1 x = k_1 x = kh_2 h = k_2 h, \qquad \text{avec} \quad kh_1 = k_1 \in K, \qquad kh_2 = k_2 \in K.$$

Mais $k_2 h = h_3 \in H$. Donc

$$x \in \bigcup_{k \in K} (H \,.\cdot\, k) \qquad \text{et} \qquad X = \bigcup_{k \in K} (H \,.\cdot\, k).$$

Si $x_1 \in X$, on a alors

$$k_1 x x_1 = h_3 x_1,$$

c'est-à-dire

$$x x_1 \equiv x_1 \quad (\Sigma_H)$$

et X est un sous-demi-groupe.

2. Équivalences Ω_H. — Soit H un complexe quelconque du demi-groupe D. Considérons la relation ω_H définie par $a\omega_H a'$ si et seulement s'il existe h, $h' \in H$ et $m \in D$, tels que l'on ait $a = hm$, $a' = h'm$. Cette relation ω_H est *symétrique* et *régulière à droite*. Elle est de plus *réflexive dans* HD.

Appelons *composé à droite de* H *par* a et désignons par $(H \mid a)_d$ l'ensemble des éléments x tels que $a \in Hx$. Si H est fixé une fois pour toute, posons $(H \mid a)_d = F_a$. La *relation* Ω_H définie par $a\Omega_H a'$ si et seulement si l'on a $F_a = F_{a'} = o$, ou s'il existe un nombre fini n d'éléments $r_1, r_2, \ldots, r_n \in D$ tels que

$$F_a \between F_{r_1} \between F_{r_2} \between \ldots \between F_{r_n} \between F_{a'}$$

est une relation *d'équivalence* [27].

Posons $V_H = D - HD$, et appelons V_H le *reste à droite de* H. Si $V_H \neq \emptyset$, V_H est une *classe* mod Ω_H, puisque V_H est l'ensemble des éléments v tels que $F_v = \emptyset$. C'est de plus un complexe *consistant à gauche* (DG I, p. 11). En effet, si $xy \in V_H$ et si $x \notin V_H$, $x \in HD$. Donc $xy \in HD$, contrairement à l'hypothèse.

Soit Ω_H^* la trace de Ω_H sur HD. *L'équivalence Ω_H^* est régulière à droite.* Cela découle du fait que si $F_a \cap F_b \neq \emptyset$ on a $F_{ax} \cap F_{bx} \neq \emptyset$, pour tout $x \in D$.

Soit Σ_H l'équivalence réversible généralisée à droite associée à H.

THÉORÈME 43. — *Les ensembles-quotients $L = HD/\Omega_H^*$ et $M = D/\Sigma_H$ sont isomorphes.*

Soit X un élément de L. Si $x \in X$, il existe $h \in H$ tel que l'on ait $x = hy$. Soit Y la classe mod Σ_H contenant y. Si $x = h'y'$, avec $h' \in H$, on a $hy = h'y'$, et donc $y \equiv y' (\Sigma_H)$. Si $x' \in X$, et si $x' = h_0 y_0$, avec $h_0 \in H$, on a

$$y \equiv y_0 \quad (\Sigma_H).$$

En effet, $x \equiv x'$ (Ω_H^*). On a donc une suite de relations de la forme

$$x = h_1 y_1, \qquad r_1 = h'_1 y_1 = h_2 y_2, \qquad r_2 = h'_2 y_2 = h_3 y_3, \qquad \ldots,$$
$$r_n = h'_n y_n = h_{n+1} y_{n+1}, \qquad x' = h'_{n+1} y_{n+1}.$$

Par conséquent

$$Hy_1 \between Hy_2 \between Hy_3 \between \ldots \between Hy_n \between Hy_{n+1} \qquad \text{et} \qquad y_1 \equiv y_{n+1} \quad (\Sigma_H).$$

Mais

$$h_1 y_1 = x = hy, \qquad h'_{n+1} y_{n+1} = x' = h_0 y_0.$$

D'où

$$y \equiv y_1 \equiv y_{n+1} \equiv y_0 \quad (\Sigma_H).$$

Des considérations précédentes, il résulte que, si à la classe X mod Ω_H^* contenant l'élément x nous faisons correspondre la classe Y mod Σ_H contenant l'élément y vérifiant l'égalité $x = hy$, nous définissons une application de L dans M. C'est de plus une application de L sur M. Car si $Y_i \in M$ et si $y_i \in Y_i$, Y_i est l'image de la classe X_i mod Ω_H^* contenant hy_i.

Cette application de L sur M est biunivoque. En effet, supposons que $Y \in M$ soit l'image d'au moins deux éléments X et T, $X \in L$, $T \in L$, $X \neq T$. On a alors

$$x = hy, \qquad t = h'y', \qquad \text{avec} \quad x \in X, \qquad t \in T, \qquad y \in Y, \qquad y' \in Y.$$

Comme $y \equiv y'$ (Σ_H), on a une suite de relations de la forme

$$h_0 y = h_1 s_1, \qquad h'_1 s_1 = h_2 s_2, \qquad \ldots, \qquad h'_{q-1} s_{q-1} = h_q y'.$$

---

[27] Si H et K sont deux complexes de D, la notation $H \between K$ signifie $H \cap K \neq \emptyset$.

On en déduit

$$h_0 y \equiv h_q y' \quad (\Omega_H^*).$$

Mais

$$h_0 y \equiv h y \quad (\Omega_H^*), \qquad h' y' \equiv h_q y' \quad (\Omega_H^*).$$

Donc

$$x \equiv t \quad (\Omega_H^*)$$

et $X = T$, contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, les deux ensembles-quotients L et M sont isomorphes

Remarque. — On a pour tout $a \in HD$ et tout x tel que $xH \subseteq H$:

$$xa \equiv a \quad (\Omega_H).$$

Théorème 44. — *Si* S *est un sous-demi-groupe et si* $S \subseteq SD$, *on a*

$$\Omega_S^* = \Sigma_S^*,$$

ou Σ_S^* *est la trace de* Σ_S *sur* SD.

En effet, SD est un demi-groupe. Comme $S \subseteq SD$, Σ_S^* est la plus fine des équivalences P telles que

$$sa \equiv a \quad (P)$$

pour tout $s \in S$ et tout $a \in SD$, d'après le théorème 8 de DG II. Mais d'après la remarque précédente, Ω_S^* est une telle équivalence P. Donc

$$\Sigma_S^* \subseteq \Omega_S^*.$$

Montrons que $\Omega_S^* \subseteq \Sigma_S^*$. Pour cela, il suffit de montrer que $\omega_S \subseteq \Sigma_S^*$. Si $a \omega_S b$, on a

$$a = s_1 m, \qquad b = s_2 m, \qquad \text{avec} \quad s_1 \in S, \qquad s_2 \in S, \qquad m \in D.$$

Mais

$$s_1 m \equiv m \quad (\Sigma_S), \qquad s_2 m \equiv m \quad (\Sigma_S); \qquad \text{d'où} \qquad a \equiv b \quad (\Sigma_S)$$

et donc, puisque $a \in SD$, $b \in SD$:

$$a \equiv b \quad (\Sigma_S^*).$$

Corollaire. — *Si* $SD = D$, *on a* $\Omega_S = \Sigma_S$.

Théorème 45. — *Si* H *est une classe de l'équivalence régulière à droite* R, *on a*

$$\Omega_H^* \subseteq R^*,$$

où R^* *est la trace de* R *sur* HD.

Soit $a \equiv a'$ (Ω_H^*), où $a \in HD$, $a' \in HD$. On a alors une suite de relations de la forme

$$a = h_0 x_0, \qquad a_1 = h'_0 x_0 = h_1 x_1, \qquad a_2 = h'_1 x_1 = h_2 x_2, \qquad \ldots,$$
$$a_n = h'_{n-1} x_{n-1} = h_n x_n, \qquad a' = h'_n x_n.$$

Comme

$$h_0 \equiv h'_0 \equiv h_1 \equiv \ldots \equiv h_n \equiv h'_n \quad (R),$$

on en déduit, puisque R est régulière à droite

$$a \equiv a_1 \equiv \ldots \equiv a_n \equiv a' \quad (R^*).$$

Corollaire. — *Si* $HD = D$, *on a* $\Omega_H \subseteq R$.

Toute classe X mod Ω_H, H *étant quelconque et* $X \neq V_H$ *est formée de complexes de la forme* Ha.

En effet, si $x \in X$, on a $x = ha$, avec $h \in H$, $a \in D$. Si $x' \in Ha$ on a évidemment $x \equiv x'$ (Ω_H).

Toute classe X mod Σ_H *est formée de composés à droite* F_a.

En effet, si $x \in X$ et si $a \in Hx$, $x \in F_a$. Si $x' \in F_a$ on a $a \in Hx'$ et $Hx \cap Hx' \neq \emptyset$. Donc $x \equiv x'$ (Σ_H).

Si $H \subseteq K$ *et si* $V_H = V_K$, on voit immédiatement que l'on a $\Omega_H \subseteq \Omega_K$.

Théorème 46. — *Si* $H \subseteq HD$ *et si* T *est l'extension saturée de* H *par* Ω_H, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $H = T$ *est que la relation* $Hx \cap H \neq \emptyset$ *entraîne* $Hx \subseteq H$. *Si* K *est un complexe contenant* H, *tel que la relation* $Ky \cap K \neq \emptyset$ *entraîne* $Ky \subseteq K$, *et si* $K \subseteq KD = HD$, *alors* $T \subseteq K$.

La condition est nécessaire. Si $Hx \cap H \neq \emptyset$, on a $h_0 x = h_1$, avec h_0, $h_1 \in H$. Si $h \in H$, on a $h_0 x \equiv hx$ (Ω_H). D'où $hx \equiv h_1$ (Ω_H), et par suite $Hx \subseteq H$.

La condition est suffisante. Soit

$$h \equiv t \quad (\Omega_H).$$

On a alors une suite de relations de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} h = h_0 x_0, \quad a_1 = h'_0 x_0 = h_1 x_1, \quad a_2 = h'_1 x_1 = h_2 x_2, \ \ldots, \\ \qquad a_n = h'_{n-1} x_{n-1} = h_n x_n, \quad t = h'_n x_n, \end{cases}$$

ce qui entraîne successivement

$$Hx_0 \subseteq H, \quad Hx_1 \subseteq H, \quad \ldots, \quad Hx_n \subseteq H, \quad \text{d'où} \quad t \in H.$$

Si $H \subseteq K \subseteq KD = HD$, on a

$$V_H = V_K \quad \text{et} \quad \Omega_H \subseteq \Omega_K.$$

Si $t \in T$, on a

$$t \equiv h \quad (\Omega_H).$$

D'où

$$t \equiv h \quad (\Omega_K).$$

Comme $K \subseteq KD$, il vient $t \in K$.

Un complexe K est dit *astreint à droite* si la relation $Kx \cap Ky \neq \emptyset$ entraîne $Kx = Ky$.

Théorème 47. — *Si* $H \subseteq HD$ *et si nous posons* $V = \bigcup_{h \in H} (H \,.\cdot\, h)$, *on a*

$$H \subseteq HV \subseteq T, \qquad HD = TD.$$

Si H *est de plus astreint à droite*, $HV = T$.

On a $H \subseteq HV$, puisque pour tout $h \in H$ il existe $h' \in H$ et $y \in D$ tel que $h = h'y$, et $y \in V$. Si $a \in HV$, il existe $v \in V$ tel que $a \in Hv$ et donc $a = h_1 v$, avec $h_1 \in H$. Mais il existe $h_0 \in H$, $h'_0 \in H$ tel que $h_0 = h'_0 v$. Par conséquent

$$a \equiv h_0 \quad (\Omega_H)$$

et $HV \subseteq T$. De $HD \subseteq TD$ résulte $V_T \subseteq V_H$ (restes à droite de T et de H). Si $w \in V_H$ et si $w \notin V_T$, on a $w = tx$, avec $t \in T$. Mais $t = hy$, avec $h \in H$. Donc $w = hyx$ et $w \notin V_H$, contre l'hypothèse. Donc $V_H = V_T$, et $HD = TD$.

Si H est astreint à droite et si $t \in T$, on a une suite de relations (1) donnée dans la démonstration du théorème 46. Donc

$$Hx_0 \cap Hx_1 \neq \emptyset, \qquad Hx_1 \cap Hx_2 \neq \emptyset, \qquad \ldots, \qquad Hx_{n-1} \cap Hx_n \neq \emptyset;$$

d'où

$$Hx_0 = Hx_1 = \ldots = Hx_{n-1} = Hx_n.$$

Par conséquent, $t \in Hx_0$. Mais $Hx_0 \cap H \neq \emptyset$, ce qui entraîne $x_0 \in V$, et $t \in HV$.

THÉORÈME 48. — *Si* $HD = D$, *et si* H *est tel que* $Hx \cap H \neq \emptyset$ *entraîne* $Hx \subseteq H$, *on a*

$$\Omega_H \subseteq R_H,$$

où R_H *est l'équivalence principale à droite associée à* H.

Il suffit de montrer que $\omega_H \subseteq R_H$. Si $a \omega_H a'$, on a $a = hx$, $a' = h'x$. Si $ay \in H$, on a $hxy \in H$. Donc $Hxy \cap H \neq \emptyset$, et $Hxy \subseteq H$. Par conséquent, $h'xy \in H$, et $H \,.\cdot\, a \subseteq H \,.\cdot\, a'$. On montre de même que $H \,.\cdot\, a' \subseteq H \,.\cdot\, a$.

Désignons por θ_H *l'équivalence* définie par

$$a \equiv a' \quad (\theta_K)$$

si et seulement si $F_a = F_{a'}$ (où F_a, $F_{a'}$ sont composés à droite de H par a et a'). Comme V_H est aussi une classe mod θ_H, on a évidemment

$$\theta_H \subseteq \Omega_H.$$

Si $x \in Ha$, on a $X \subseteq Ha$, où X est la classe mod θ_H contenant x. En effet, si $x' \in X$, on a $F_x = F_{x'}$. Donc $x' \in Ha$, puisque $a \in F_x$.

Si $a \in Hy$, et si Y est la classe mod φ_H (28) contenant y, on a

$$Y \subseteq F_a.$$

En effet, $y \in F_a$. Si $y' \in Y$, on a

$$Hy = Hy' \qquad \text{et} \qquad a \in Hy', \qquad y' \in F_a.$$

THÉORÈME 49. — *Si* H *est un complexe astreint à droite, on a* $\varphi_H = \Sigma_H$. *Toute classe* Y mod Σ_H *est un composé à droite* F_a. *Inversement, tout composé à droite* $F_a \neq \emptyset$ *est une classe* mod Σ_H.

On voit immédiatement que $\varphi_H = \Sigma_H$. Si $y \in Y$ et si $a \in Hy$, $Y \subseteq F_a$, d'après ce qui précède. Si $y' \in F_a$, on a $a \in Hy \cap Hy'$. D'où $y' \in Y$ et $Y = F_a$. L'inverse est évident.

---

(28) Équivalence définie au paragraphe 4, chapitre I.

Théorème 50. — *Si* H *est astreint à droite, la relation* $F_a \cap F_b \neq \emptyset$ *entraîne* $F_a = F_b$. *On a l'égalité* $\theta_H = \Omega_H$. *Toute classe* $X \neq V_H$, mod Ω_H, *est un complexe de la forme* Ha. *Inversement, tout complexe* Ha *est une classe* mod Ω_H.

D'après le théorème 49, F_a et F_b sont des classes mod Σ_H, donc $F_a = F_b$, $\theta_H = \Omega_H$. Si $x \in X$, on a $F_x \neq \emptyset$. Soit $a \in F_x$, c'est-à-dire $x \in Ha$. Alors $X \subseteq Ha$. Si $y \in Ha$, $a \in F_x \cap F_y$. D'où $F_x = F_y$, et $y \in X = Ha$. L'inverse est immédiat.

Corollaire. — *Pour qu'un complexe* H *soit astreint à droite il faut et il suffit que la relation* $F_a \cap F_b \neq \emptyset$ *entraîne* $F_a = F_b$.

La condition est nécessaire, d'après le théorème. Elle est aussi suffisante. En effet, soit $a \in Hx \cap Hy \neq \emptyset$, c'est-à-dire $x \in F_a$, $y \in F_a$. Si $b \in Hx$, $x \in F_b \cap F_a$. D'où $F_a = F_b$ et $y \in F_b$, c'est-à-dire $b \in Hy$. Par conséquent $Hx \subseteq Hy$. On montre de même que $Hy \subseteq Hx$.

Théorème 51. — *Si le demi-groupe* D *vérifie la règle de simplification à droite et si* $H = H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, *où* H_1 *et* H_2 *sont des complexes astreints à droite, alors* H *est astreint à droite.*

On a $Ha = H_1 a \cap H_2 a$. En effet, $Ha \subseteq H_1 a \cap H_2 a = A$. Si $x \in A$, $x = h_1 a = h_2 a$ avec $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Mais $h_1 = h_2$, donc $x \in Ha$.

Si $Ha \cap Hb \neq \emptyset$, on a alors

$$Ha \cap Hb = (H_1 a \cap H_1 b) \cap (H_2 a \cap H_2 b) \neq \emptyset,$$

d'où

$$H_1 a \cap H_1 b \neq \emptyset, \qquad H_2 a \cap H_2 b \neq \emptyset$$

et

$$H_1 a = H_1 b, \qquad H_2 a = H_2 b$$

Donc $Ha = Hb$.

Soit maintenant H un complexe astreint à droite, et soit X une classe mod Ω_H, $X \neq V_H$, c'est-à-dire $X \subseteq HD$. D'après le théorème 50, il existe $a \in D$ tel que $X = Ha$, et l'on a $a \in F_x$ pour tout $x \in X$.

Lemme. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $m \in \overline{F}_r = (X \mid r)_d$ *est que* $am \in F_r = (H \mid r)_d$.

En effet, si $m \in \overline{F}_r$, on a $r = xm$, avec $x \in X$. D'où puisque $x = ha$, $r = ham$, et $am \in F_r$.

D'autre part, si $am \in F_r$, on a $r = ham$, et $m \in \overline{F}_r$, puisque $ha \in X$.

Théorème 52. — *Si* H *est un complexe astreint à droite et* X *une classe* mod Ω_H, $X \neq V_H$, *on a*

$$V_H \subseteq V_X, \qquad XD \subseteq HD, \qquad \Omega_H \subseteq \Omega_X.$$

Le complexe X *est astreint à droite, et l'on a*

$$\Omega_H^* = \Omega_X^*,$$

où Ω_H^* *et* Ω_X^* *sont les traces respectives de* Ω_H *et* Ω_X *sur* XD. *Si de plus* $H \subseteq X$, *on a*

$$HD = XD, \qquad \Omega_H = \Omega_X.$$

De $X \neq V_H$ suit $X \subseteq HD$. Donc $XD \subseteq HD^2 \subseteq HD$ et $V_H \subseteq V_X$.

D'après le lemme précédent, on a

$$\overline{F}_r = F_r \cdot\cdot a; \qquad a\overline{F}_r \subseteq F_r.$$

Par conséquent, la relation $F_r = F_s$ entraîne $\overline{F}_r = \overline{F}_s$, donc

$$\Omega_H \subseteq \Omega_X.$$

Pour montrer que X est astreint à droite, il suffit de montrer, d'après le corollaire du théorème 50, que $\overline{F}_r \cap \overline{F}_s \neq \emptyset$ entraîne $\overline{F}_r = \overline{F}_s$.

Or si $m \in \overline{F}_r \cap \overline{F}_s$, $am \in F_r \cap F_s$. D'où $F_r = F_s$, et $\overline{F}_r = \overline{F}_s$.

De $\Omega_H \subseteq \Omega_X$ suit $\Omega_H^* \subseteq \Omega_X^*$. D'autre part, si $r \equiv s(\Omega_X^*)$ on a $\overline{F}_r = \overline{F}_s$, puisque X est astreint à droite. Comme $r \in XD$, $s \in XD$, $\overline{F}_r \neq \emptyset$, $\overline{F}_s \neq \emptyset$. Donc $a\overline{F}_r = a\overline{F}_s \neq \emptyset$ et $F_r \cap F_s \neq \emptyset$. Ceci entraîne $F_r = F_s$, et $r \equiv s(\Omega_H^*)$. D'où

$$\Omega_X^* \subseteq \Omega_H^* \quad \text{et} \quad \Omega_X^* = \Omega_H^*.$$

Si $H \subseteq X$, on a évidemment $HD = XD$, puisque $XD \subseteq HD$, et par suite $V_H = V_X$. On en déduit immédiatement d'après ce qui précède

$$\Omega_X = \Omega_H.$$

THÉORÈME 53. — *Si* D *est un demi-groupe vérifiant la règle de simplification à droite, et si* $H = H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, H_1 *et* H_2 *étant des complexes astreints à droite, on a*

$$\Sigma_H = \Sigma_{H_1} \cap \Sigma_{H_2}.$$

Si de plus $V_H = V_{H_1} = V_{H_2}$, *on a*

$$\Omega_H = \Omega_{H_1} \cap \Omega_{H_2}.$$

D'après le théorème 51, H est astreint à droite. On a $\Sigma_H \subseteq \Sigma_{H_1}$, $\Sigma_H \subseteq \Sigma_{H_2}$, donc $\Sigma_H \subseteq \Sigma_{H_1} \cap \Sigma_{H_2}$. Soit

$$a \equiv b \quad (\Sigma_{H_1} \cap \Sigma_{H_2}),$$

c'est-à-dire

$$H_1 a = H_1 b, \qquad H_2 a = H_2 b.$$

D'après la démonstration du théorème 51, on a

$$Ha = H_1 a \cap H_2 a = H_1 b \cap H_2 b = Hb,$$

d'où

$$a \equiv b \quad (\Sigma_H) \quad \text{et} \quad \Sigma_H = \Sigma_{H_1} \cap \Sigma_{H_2}.$$

Si $V_H = V_{H_1} = V_{H_2}$, on a $\Omega_H \subseteq \Omega_{H_1}$, $\Omega_H \subseteq \Omega_{H_2}$ donc $\Omega_H \subseteq \Omega_{H_1} \cap \Omega_{H_2}$. Soit

$$a \equiv b \quad (\Omega_{H_1} \cap \Omega_{H_2}),$$

c'est-à-dire

$$(H_1 \mid a)_d = (H_1 \mid b)_d, \qquad (H_2 \mid a)_d = (H_2 \mid b)_d.$$

On a évidemment

$$(H \mid a)_d \subseteq (H_1 \mid a)_d \cap (H_2 \mid a)_d = A.$$

Si $x \in A$, $a = h_1 x = h_2 x$, avec $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. D'où $h_1 = h_2 \in H$, et $x \in (H \mid a)_d$. Par conséquent

$$(H \mid a)_d = (H_1 \mid a)_d \cap (H_2 \mid a)_d.$$

De même,

$$(H \mid b)_d = (H_1 \mid b)_d \cap (H_2 \mid b)_d.$$

Donc

$$(H \mid a)_d = (H \mid b)_d, \qquad a \equiv b \quad (\Omega_H) \qquad \text{et} \qquad \Omega_H = \Omega_{H_1} \cap \Omega_{H_2}.$$

Soient maintenant H_1 et H_2 deux complexes du demi-groupe D, astreints à droite, dont l'intersection H n'est pas vide. Supposons en outre que l'on ait $HD = H_1 D = H_2 D$, et que H_1 et H_2 soient contenus respectivement dans une classe $\bmod \Omega_{H_1}$ et une classe $\bmod \Omega_{H_2}$, avec $H_1 \cap V_{H_1} = \emptyset$, $H_2 \cap V_{H_2} = \emptyset$.

Théorème 54. — *Pour que les équivalences Ω_{H_1} et Ω_{H_2} soient permutables, il faut et il suffit que, pour chaque couple $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, il existe au moins un élément $m \in D$ tel que*

$$h_1 \in H_2 m, \qquad h_2 \in H_1 m.$$

La condition est nécessaire. Soit $h \in H$. On a

$$h_1 \equiv h \quad (\Omega_{H_1}), \qquad h \equiv h_2 \quad (\Omega_{H_2}).$$

Il existe donc $x \in D$ vérifiant

$$h_1 \equiv x \quad (\Omega_{H_2}), \qquad x \equiv h_2 \quad (\Omega_{H_1}).$$

Si $x \in V_H$, $x \in V_{H_1} = V_{H_2}$ et $h_1 \in V_{H_2} = V_{H_1}$, contre l'hypothèse que $H_1 \cap V_{H_1} = \emptyset$. Donc $x \in HD$. Soit $m \in F_x$. Comme $F_x = (H \mid x)_d \subseteq F^1_x = (H_1 \mid x)_d$ et $F^1_x = F^1_{h_2}$, on a $m \in F^1_{h_2}$ et $h_2 \in H_1 m$. On montre de même que $h_1 \in H_2 m$.

La condition est suffisante. Supposons que l'on ait

$$a \equiv x \quad (\Omega_{H_1}), \qquad x \equiv b \quad (\Omega_{H_2}).$$

Si $x \in V_H = V_{H_1} = V_{H_2}$, $a \in V_H$, $b \in V_H$. Alors pour tout $y \in V_H$, on a

$$a \equiv y \quad (\Omega_{H_2}), \qquad y \equiv b \quad (\Omega_{H_1}).$$

Si $x \notin V_H$, $F_x \neq \emptyset$. Soit $g \in F_x$. Comme $F_x \subseteq F^1_x = F^1_a$, on a $a = h_1 g$, avec $h_1 \in H_1$. De même, $b = h_2 g$, avec $h_2 \in H_2$. Par hypothèse, il existe m tel que $h_1 = h'_2 m$, $h_2 = h'_1 m$, avec $h'_1 \in H_1$, $h'_2 \in H_2$. Posons $mg = r$. On a

$$a = h'_2 r, \qquad b = h'_1 r.$$

Donc

$$r \in F^2_a = (H_2 \mid a)_d, \qquad r \in F^1_b = (H_1 \mid b)_d.$$

Soit $y \in Hr$, $y = hr$, où $h \in H$. On a

$$r \in F_y \subseteq F^1_y, \qquad F_y \subseteq F^2_y.$$

Donc

$$r \in F_b^1 \cap F_y^1, \qquad r \in F_a^2 \cap F_y^2.$$

D'où

$$F_b^1 = F_y^1, \qquad F_a^2 = F_y^2$$

et

$$b \equiv y \quad (\Omega_{H_1}), \qquad a \equiv y \quad (\Omega_{H_2}).$$

3. **Équivalences** ρ_H. — Si H est un complexe quelconque du demi-groupe D, la *relation* ρ_H définie par $a \rho_H a'$ si et seulement si l'on a $H \cdot\!\!\cdot\, a = H \cdot\!\!\cdot\, a' = \emptyset$ ou s'il existe un nombre fini n d'éléments $m_1, \ldots, m_n \in D$ tels que

$$H \cdot\!\!\cdot\, a \between H \cdot\!\!\cdot\, m_1 \between \ldots \between H \cdot\!\!\cdot\, m_n \between H \cdot\!\!\cdot\, a'$$

est une *équivalence*.

On définit d'une manière symétrique l'équivalence ${}_H\rho$.

Si le résidu à droite W_H n'est pas vide, W_H est une classe mod ρ_H. On a donc la relation

$$R_H \subseteq \rho_H.$$

THÉORÈME 55. — *Pour que* $R_H = \rho_H$, *il faut et il suffit que* H *soit un complexe fort.*

La condition est nécessaire. Soit en effet $R_H = \rho_H$; si

$$(H \cdot\!\!\cdot\, a) \cap (H \cdot\!\!\cdot\, b) \neq \emptyset,$$

on a

$$a \equiv b \quad (\rho_H), \qquad \text{d'où} \qquad a \equiv b \quad (R_H),$$

c'est-à-dire $H \cdot\!\!\cdot\, a = H \cdot\!\!\cdot\, b$.

Il est clair que la condition est suffisante.

THÉORÈME 56. — *Si* H *est quelconque, toute classe* X mod ρ_H, *distincte du résidu* W_H, *est formée de résiduels à gauche non vides* $H \cdot\!\!\cdot\, a$ *et tout résiduel à gauche non vide* $H \cdot\!\!\cdot\, b$ *est contenu dans une classe* mod ρ_H *distincte de* W_H.

Si $x \in X$, $H \cdot\!\!\cdot\, x \neq \emptyset$. Si $a \in H \cdot\!\!\cdot\, x$, $x \in H \cdot\!\!\cdot\, a$.

D'autre part, si $H \cdot\!\!\cdot\, b \neq \emptyset$ et si $y \in H \cdot\!\!\cdot\, b$, $z \in H \cdot\!\!\cdot\, b$, on a

$$b \in (H \cdot\!\!\cdot\, y) \cap (H \cdot\!\!\cdot\, z),$$

c'est-à-dire

$$y \equiv z \quad (\rho_H).$$

Par conséquent, si Y est la classe mod ρ_H contenant y, on a $H \cdot\!\!\cdot\, b \subseteq Y$.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une classe* X mod ρ_H, $X \neq W_H$, *soit un résiduel à gauche* $H \cdot\!\!\cdot\, t$, *il faut et il suffit que l'on ait* $t \in (H \cdot\!\!\cdot\, x) \cap (H \cdot\!\!\cdot\, x')$, *quels que soient* x *et* x' *appartenant à* X.

La condition est nécessaire. Si $X = H \cdot\!\!\cdot\, t$, $x \in H \cdot\!\!\cdot\, t$, $x' \in H \cdot\!\!\cdot\, t$, donc $t \in (H \cdot\!\!\cdot\, x) \cap (H \cdot\!\!\cdot\, x')$.

La condition est suffisante. Nous avons $x \in H \cdot\!\!\cdot\, t$. D'où $H \cdot\!\!\cdot\, t \subseteq X$. Mais $X \subseteq H \cdot\!\!\cdot\, t$; donc $X = H \cdot\!\!\cdot\, t$.

Théorème 57. — *Si* H *et* K *sont deux complexes corésiduels à droite* ($W_H = W_K$), *et si* $H \subseteq K$, *on a*

$$\rho_H \subseteq \rho_K.$$

Soit $x \equiv y(\rho_H)$. Si $H \cdot\!\cdot\, x = \emptyset$, $H \cdot\!\cdot\, y = \emptyset$, et $x \equiv y(\rho_K)$.

Si $H \cdot\!\cdot\, x \neq \emptyset$, il existe n éléments $m_1, \ldots, m_n \in D$ tels que

$$H \cdot\!\cdot\, x \between H \cdot\!\cdot\, m_1 \between \ldots \between H \cdot\!\cdot\, m_n \between H \cdot\!\cdot\, y.$$

Posons $x = m_0$, $y = m_{n+1}$. Nous avons

$$(H \cdot\!\cdot\, m_i) \cap (H \cdot\!\cdot\, m_{i+1}) \neq \emptyset \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

D'où, puisque $H \cdot\!\cdot\, m \subseteq K \cdot\!\cdot\, m$,

$$(K \cdot\!\cdot\, m_i) \cap (K \cdot\!\cdot\, m_{i+1}) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad K \cdot\!\cdot\, x \between K \cdot\!\cdot\, m_1 \between \ldots \between K \cdot\!\cdot\, m_n \between K \cdot\!\cdot\, y.$$

Théorème 58. — *Si* K *est un complexe net à droite et si* H *est un complexe tel que* $H \cdot\!\cdot\, K \neq \emptyset$, *on a*

$$\rho_K \subseteq \rho_H.$$

Si $x \equiv y(\rho_K)$, on a une suite de relations de la forme

$$K \cdot\!\cdot\, x \between K \cdot\!\cdot\, m_1 \between \ldots \between K \cdot\!\cdot\, m_p \between K \cdot\!\cdot\, y.$$

Si $(K \cdot\!\cdot\, a) \cap (K \cdot\!\cdot\, b) \neq \emptyset$, il existe x' tel que $ax' \in K$, $bx' \in K$. D'où, si $t \in H \cdot\!\cdot\, K$, $ax't \in H$, $bx't \in H$, et $(H \cdot\!\cdot\, a) \cap (H \cdot\!\cdot\, b) \neq \emptyset$. Par conséquent

$$H \cdot\!\cdot\, x \between H \cdot\!\cdot\, m_1 \between \ldots \between H \cdot\!\cdot\, m_p \between H \cdot\!\cdot\, y.$$

Corollaire. — *Si* $H \subseteq K$, *on a* $\rho_H = \rho_K$.

C'est immédiat, d'après le théorème 57, car H est aussi net à droite.

Théorème 59. — *Si* S *est un sous-demi-groupe de* D, *net à droite, on a*

$$\Sigma_S \subseteq \rho_S.$$

On a

$$sa \equiv a \quad (\rho_S)$$

pour tout $s \in S$ et tout $a \in D$. En effet, si $x \in S \cdot\!\cdot\, a$, $ax \in S$ et $sax \in S$. D'où

$$x \in (S \cdot\!\cdot\, a) \cap (S \cdot\!\cdot\, sa) \qquad \text{et} \qquad a \equiv sa \quad (\rho_S).$$

Ceci entraîne d'après le théorème 8 de DG II :

$$\Sigma_S \subseteq \rho_S.$$

Théorème 60. — *Si* H *est un complexe tel que* $H \cap W_H = \emptyset$, W_H *étant le résidu à droite de* H, *si* T *est l'extension saturée de* H *par* ρ_H *et si* $V = \bigcup_{h \in H} (H \cdot\!\cdot\, h)$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $H = T$ *est que la relation* $(H \cdot\!\cdot\, x) \cap V \neq \emptyset$, *entraîne* $x \in H$. *Si* U *est l'ensemble des éléments* x *tels que* $(H \cdot\!\cdot\, x) \cap V \neq \emptyset$, *on a*

$$H \subseteq U \subseteq T, \qquad W_H = W_T.$$

La condition est nécessaire. Si $a \in (H .\cdot x) \cap V$, il existe $h \in H$ tel que $ha \in H$. Donc $a \in (H .\cdot x) \cap (H .\cdot h)$ et

$$x \equiv h \quad (\rho_H), \qquad \text{d'où} \qquad x \in H.$$

La condition est suffisante. Soit

$$h \equiv t \quad (\rho_H).$$

On a alors une suite de relations de la forme

$$H .\cdot h \between H .\cdot m_1 \between \ldots \between H .\cdot m_n \between H .\cdot t,$$

d'où, en opérant de proche en proche

$$m_1 \in H, \qquad \ldots, \qquad m_n \in H, \qquad t \in H.$$

Si $h \in H$, il existe y tel que $hy \in H$, et donc $H \subseteq U$. Si $x \in U$, il existe $h_1 \in H$ tel que

$$(H .\cdot h_1) \cap (H .\cdot x) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad h_1 \equiv x \quad (\rho_H).$$

Par conséquent, $U \subseteq T$.

On a $W_T \subseteq W_H$, puisque $H \subseteq T$. Si $w \in W_H$ et si $w \notin W_T$, il existe x tel que $wx = t \in T$. Mais $T \cap W_H = \emptyset$. Il existe donc $h \in H$ tel que $ty = h$. D'où $wxy = h$ et $w \notin W_H$, contre l'hypothèse. Donc $W_H = W_T$.

Si H *est un complexe fort, le théorème précédent s'étend à l'équivalence principale* R_H, *puisqu'alors, d'après le théorème* 55, $\rho_H = R_H$, *et l'on a*

$$U = T.$$

En effet, si $t \equiv h (R_H)$, on a $H .\cdot t = H .\cdot h \neq \emptyset$, donc $t \in U$.

Théorème 61. — *Si* S *est un sous-demi-groupe net de* D, *tel que l'équivalence* $\rho = \rho_S$ *soit régulière, le demi-groupe-quotient* D/ρ *est un groupe homomorphe à* D, *et* S *est contenu dans la classe-unité.*

On a en effet

$$S \subseteq (S .\cdot s) \cap (S .\cdot s_1)$$

quels que soient $s \in S$, $s_1 \in S$, et par suite S est contenu dans une classe $\bar{S} \bmod \rho$. Cette classe est élément-unité à gauche dans D/ρ, d'après la démonstration du théorème 59.

Comme S est net dans D, $\bar{S}$ est net dans D/ρ qui est par conséquent un groupe.

Un complexe H est dit *relié à droite* si les relations

$$(H .\cdot a) \cap (H .\cdot b) \neq \emptyset, \qquad (H .\cdot b) \cap (H .\cdot c) \neq \emptyset$$

entraînent

$$(H .\cdot a) \cap (H .\cdot c) \neq \emptyset.$$

Lemme. — *Si* H *est un complexe relié à droite, pour que l'on ait*

$$x \equiv y \quad (\rho_H)$$

il faut et il suffit que

$$H .\cdot x = H .\cdot y = \emptyset \qquad \text{ou} \qquad (H .\cdot x) \cap (H .\cdot y) \neq \emptyset.$$

La condition est visiblement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Si $H .\cdot x \neq \emptyset$, on a une suite de relations de la forme

$$H .\cdot x \between H .\cdot m_1 \between H .\cdot m_2 \between \ldots \between H .\cdot m_n \between H .\cdot y,$$

d'où, puisque H est relié à droite et en opérant de proche en proche

$$(H .\cdot x) \cap (H .\cdot m_2) \neq \emptyset, \quad \ldots, \quad (H .\cdot x) \cap (H .\cdot m_n) \neq \emptyset,$$
$$(H .\cdot x) \cap (H .\cdot y) \neq \emptyset.$$

Théorème 62. — *Si* H *est un complexe net à droite et relié à droite, l'équivalence* ρ_H *est simplifiable à droite.*

Soit $ax \equiv a'x (\rho_H)$, c'est-à-dire $(H .\cdot ax) \cap (H .\cdot a'x) \neq \emptyset$. Si $y \in (H .\cdot ax) \cap (H .\cdot a'x)$ $axy \in H$, $a'xy \in H$. Par conséquent

$$xy \in (H .\cdot a) \cap (H .\cdot a'), \qquad \text{d'où} \qquad a \equiv a' \quad (\rho_H).$$

Un complexe H est dit *semi-fort à droite* si la relation $(H .\cdot a) \cap (H .\cdot b) \neq \emptyset$ entraîne

$$H .\cdot a \subseteq H .\cdot b \qquad \text{ou} \qquad H .\cdot b \subseteq H .\cdot a.$$

Théorème 63. — *Tout complexe* H *semi-fort à droite, net à droite et unitaire est un complexe fort.*

Soit $(H .\cdot a) \cap (H .\cdot b) \neq \emptyset$. On a par exemple $H .\cdot a \subseteq H .\cdot b$. Si $x \in H .\cdot b$, $bx \in H$. Il existe y tel que $axy \in H$, et $xy \in H .\cdot a \subseteq H .\cdot b$. Donc $bxy \in H$ et $y \in H$, $ax \in H$, $x \in H .\cdot a$. D'où

$$H .\cdot a = H .\cdot b.$$

Un complexe semi-fort à droite et relié à droite est dit *quasi fort à droite*.

On sait ([29]) qu'un complexe fort à droite est fort à gauche et inversement. On a une propriété analogue pour les complexes quasi forts à droite ou à gauche. Pour l'établir, nous allons d'abord démontrer un théorème plus général.

Une application multiforme f d'un ensemble E sur un ensemble E' est dite *quasi uniforme* ([30]) si les relations

$$f(x) \cap f(y) \neq \emptyset, \qquad f(y) \cap f(z) \neq \emptyset$$

entraînent

$$(a) \qquad f(x) \subseteq f(y) \quad \text{ou} \quad f(y) \subseteq f(x),$$
$$(a') \qquad f(y) \subseteq f(z) \quad \text{ou} \quad f(z) \subseteq f(y),$$
$$(b) \qquad f(x) \cap f(z) \neq \emptyset.$$

Théorème 64. — *L'application inverse* f^{-1} *de* E' *sur* E *est une application quasi uniforme.*

([29]) DG I, p. 9.

([30]) Pour les applications semi-uniformes, *voir* P. Dubreil, *Relations binaires et applications* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1028-1030).

Soit

$$(\alpha) \qquad x \in f^{-1}(x') \cap f^{-1}(y').$$

Si $f^{-1}(x') \nsubseteq f^{-1}(y')$, il existe $y \in f^{-1}(x')$ tel que $y \notin f^{-1}(y')$. Donc

$$(\beta) \qquad x' \in f(y), \qquad y' \notin f(y).$$

Comme $x' \in f(x) \cap f(y)$, on a

$$f(x) \subseteq f(y) \quad \text{ou} \quad f(y) \subseteq f(x).$$

1. Soit $f(x) \subseteq f(y)$. De (α) suit $y' \in f(x)$, donc $y' \in f(y)$, contre (β).

2. Soit $f(y) \subseteq f(x)$. Si $z \in f^{-1}(y')$, $y' \in f(z)$. Comme $y' \in f(x)$, on a

$$f(x) \subseteq f(z) \quad \text{ou} \quad f(z) \subseteq f(x).$$

2*a*. Soit $f(x) \subseteq f(z)$. Comme $x' \in f(x)$, on a $x' \in f(z)$ et $z \in f^{-1}(x')$, c'est-à-dire $f^{-1}(y') \subseteq f^{-1}(x')$.

2*b*. Soit $f(z) \subseteq f(x)$. De $x' \in f(x) \cap f(y)$ et $y' \in f(x) \cap f(z)$ suit $f(y) \cap f(z) \neq \emptyset$, et donc

$$f(y) \subseteq f(z) \quad \text{ou} \quad f(z) \subseteq f(y).$$

Si $f(y) \subseteq f(z)$, de $x' \in f(y)$ suit $x' \in f(z)$ c'est-à-dire $z \in f^{-1}(x')$, et $f^{-1}(y') \subseteq f^{-1}(x')$.

Si $f(z) \subseteq f(y)$, de $y' \in f(z)$ suit $y' \in f(y)$, contre (β).

Par conséquent, si $f^{-1}(x') \nsubseteq f^{-1}(y')$, alors $f^{-1}(y') \subseteq f^{-1}(x')$.

Si maintenant

$$x \in f^{-1}(x') \cap f^{-1}(y'), \qquad t \in f^{-1}(y') \cap f^{-1}(z'),$$

on a

$$x' \in f(x), \qquad y' \in f(x) \cap f(t), \qquad z' \in f(t)$$

donc

$$f(x) \subseteq f(t) \quad \text{ou} \quad f(t) \subseteq f(x).$$

Si $f(x) \subseteq f(t)$, on a

$$x' \in f(t) \quad \text{et} \quad t \in f^{-1}(x') \cap f^{-1}(z')$$

Si $f(t) \subseteq f(x)$, on a

$$z' \in f(x) \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(x') \cap f^{-1}(z').$$

Par conséquent, f^{-1} est une application quasi uniforme.

Si maintenant H est un complexe *quasi fort à droite*, *l'application principale à droite* [31] f_H associée à H est une *application quasi uniforme* de $D - W_H$ sur $D - {}_HW$, W_H et ${}_HW$ étant respectivement les résidus à droite et à gauche de H. L'application principale à gauche ${}_Hf$, inverse de f_H, est donc aussi quasi uniforme. On en déduit alors immédiatement le théorème suivant.

THÉORÈME 65. — *Tout complexe quasi fort à droite est quasi fort à gauche, et inversement.*

---

[31] DG II, p. 2. f_H est l'application qui, à un élément a de D, associe le résiduel à droite $H \cdot\!\!\cdot\, a$.

THÉORÈME 66. — *Si* H *est un complexe quasi fort, non net à droite, et si le résidu à droite* W_H *est consistant à gauche* [32], *l'équivalence* ρ_H *est régulière à droite.*

Soit $a \equiv a'(\rho_H)$, et soit x un élément quelconque de D.

Si $H .\cdot a = H .\cdot a' = \emptyset$, $H .\cdot ax = H .\cdot a'x = \emptyset$, puisque W_H est un idéal à droite.

Si $(H .\cdot a) \cap (H .\cdot a') \neq \emptyset$, on a soit $H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$, soit $H .\cdot a' \subseteq H .\cdot a$. Supposons que $H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$. Si $ax \in W_H$, $a \in W_H$, puisque W_H est consistant à gauche. Mais $H .\cdot a \neq \emptyset$, donc $a \notin W_H$, $ax \notin W_H$. Par conséquent, $H .\cdot ax \neq \emptyset$. Si $y \in H .\cdot ax$, $axy \in H$, et $xy \in H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$. Donc $a'xy \in H$ et

$$y \in (H .\cdot ax) \cap (H .\cdot a'x), \qquad \text{d'où} \qquad ax \equiv a'x \quad (\rho_H).$$

COROLLAIRE. — *Si* H *est un complexe net à droite et quasi fort,* ρ_H *est régulière à droite et simplifiable à droite.*

C'est immédiat, d'après le théorème 62.

Remarquons qu'un complexe quasi fort n'est pas nécessairement fort. Prenons par exemple le demi-groupe D donné par la table suivante :

	x	y
x	x	y
y	y	y

Le complexe $H = \{y\}$ est net et quasi fort, puisque

$$H .\cdot x = \{y\}, \qquad H .\cdot y = \{x, y\},$$

mais H n'est pas fort.

THÉORÈME 67. — *Si* H *est un complexe net à droite et quasi fort et si* X *est une classe mod* ρ_H, *avec* $W_X = \emptyset$, *on a*

$$\rho_H = R_X,$$

où R_X *est l'équivalence principale à droite associée à* X.

D'après le corollaire du théorème 66, ρ_H est régulière à droite et simplifiable à droite. Donc, d'après le théorème 21 de DG I, X est un complexe fort et l'on a

$$\rho_X = R_X.$$

Si $a \equiv a'(\rho_H)$, on a $(H .\cdot a) \cap (H .\cdot a') \neq \emptyset$, donc $H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$ ou $H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$. Supposons que $H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$. Si $y \in X .\cdot a$, on a $ay \in X$. Il existe t tel que $ayt \in H$, et $yt \in H .\cdot a \subseteq H .\cdot a'$. Donc $a'yt \in H$ et $t \in (H .\cdot ay) \cap (H .\cdot a'y)$. D'où

$$ay \equiv a'y \quad (\rho_H)$$

et $a'y \in X$, $y \in X .\cdot a'$. Par conséquent

$$X .\cdot a \subseteq X .\cdot a' \qquad \text{et} \qquad a \equiv a' \quad (\rho_X).$$

[32] DG I, p. 11.

Donc

$$\rho_H \subseteq \rho_X.$$

Si $a \equiv a'$ (ρ_X), on a $z \in (X \,.\!\cdot a) \cap (X \,.\!\cdot a')$, c'est-à-dire $az = x \in X$, $a'z = x' \in X$. Mais $x \equiv x'$ (ρ_H). Il existe donc t tel que $xt \in H$, $x't \in H$. D'où $azt \in H$, $a'zt \in H$ et $zt \in (H \,.\!\cdot a) \cap (H \,.\!\cdot a')$. Donc

$$a \equiv a' \quad (\rho_H) \qquad \text{et} \qquad \rho_H = \rho_X = R_X.$$

Un complexe H est dit ρ-*symétrique* si $W_H = {}_H W$ et $\rho_H = {}_H\rho$.

Théorème 68. — *Si* H *est un complexe quasi fort* ρ-*symétrique et net du demi-groupe* D, *l'ensemble-quotient* $G = D/\rho$, *où* $\rho = \rho_H = {}_H\rho$, *est un groupe homomorphe à* D.

D'après le corollaire du théorème 66 et son symétrique, l'équivalence ρ est régulière et simplifiable.

Soit $K = H \cap D^2$. Comme H est net, K est un complexe net. Soient

$$h_1 = a_1 b_1 \in K, \qquad h_2 = a_2 b_2 \in K.$$

Il existe x_1 et x_2 tels que

$$h_1 x_1 = a_1 b_1 x_1 \in H, \qquad h_2 x_2 = a_2 b_2 x_2 \in H.$$

De

$$a_1 \in (H \cdot\!. \, b_1) \cap (H \cdot\!. \, b_1 x_1), \qquad a_2 \in (H \cdot\!. \, b_2) \cap (H \cdot\!. \, b_2 x_2)$$

suit

$$b_1 \equiv b_1 x_1 \quad (\rho), \qquad b_2 \equiv b_2 x_2 \quad (\rho).$$

D'où, pour x quelconque

$$b_1 x \equiv b_1 x_1 x \quad (\rho), \qquad b_2 x \equiv b_2 x_2 x \quad (\rho)$$

et

$$x \equiv x_1 x \quad (\rho), \qquad x \equiv x_2 x \quad (\rho).$$

Donc

$$x_1 x \equiv x_2 x \quad (\rho) \qquad \text{et} \qquad x_1 \equiv x_2 \quad (\rho),$$

c'est-à-dire

$$H \cdot\!. \, x_1 \subseteq H \cdot\!. \, x_2 \qquad \text{ou} \qquad H \cdot\!. \, x_2 \subseteq H \cdot\!. \, x_1.$$

Supposons que $H \cdot\!. \, x_1 \subseteq H \cdot\!. \, x_2$. De $h_1 \in H \cdot\!. \, x_1$, résulte $h_1 \in H \cdot\!. \, x_2$ et $h_1 x_2 \in H$. Par conséquent

$$x_2 \in (H \,.\!\cdot h_1) \cap (H \,.\!\cdot h_2) \qquad \text{et} \qquad h_1 \equiv h_2 \quad (\rho).$$

Le complexe K est donc contenu dans une classe X mod ρ, et $W_X = o = {}_X W$. D'après le théorème 67 et son symétrique, on a alors

$$_X R = \rho = R_X$$

et le complexe X est fort, net et symétrique. Par conséquent G est un groupe [33].

[33] R. Croisot, *Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes* (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 80, 1952, p. 217-223).

CHAPITRE III.

Caractérisation des équivalences régulières dans les demi-groupes.

1. Caractérisation des équivalences régulières et simplifiables. — Soit $\mathcal{H}$ une famille ([34]) non vide de complexes H_i du demi-groupe D et soit $R_{\mathcal{H}}$ l'intersection des équivalences principales à droite R_{H_i} associées aux complexes H_i :

$$R_{\mathcal{H}} = \bigcap_{H_i \in \mathcal{H}} R_{H_i}.$$

Les équivalences principales à droite étant régulières à droite ([35]), $R_{\mathcal{H}}$ est une *équivalence régulière à droite.*

La famille $\mathcal{H}$ est dite *forte à droite* si la relation

$$(H_i \cdot\!\cdot\, a) \cap (H_i \cdot\!\cdot\, b) \neq \emptyset \quad \text{pour } \textit{un } H_i \in \mathcal{H}$$

entraîne

$$H_i \cdot\!\cdot\, a = H_i \cdot\!\cdot\, b \quad \text{pour } \textit{tout } H_i \in \mathcal{H}.$$

Ceci entraîne en particulier que tout complexe H_i est fort ([36]).

La famille $\mathcal{H}$ est dite *nette à droite* si le complexe $K = \bigcap_{H_i \in \mathcal{H}} H_i$ est net à droite.

Théorème 69. — *Si la famille $\mathcal{H}$ de complexes H_i est forte à droite et nette à droite, l'équivalence $R_{\mathcal{H}}$ est simplifiable à droite.*

En effet, soit

$$ax \equiv bx \quad (R_{\mathcal{H}}).$$

La famille $\mathcal{H}$ étant nette à droite, il existe un complexe $H_i \in \mathcal{H}$ tel que

$$H_i \cdot\!\cdot\, ax \neq \emptyset, \qquad \text{d'où} \qquad H_i \cdot\!\cdot\, ax = H_i \cdot\!\cdot\, bx \neq \emptyset$$

puisque $ax \equiv bx$ (R_{H_i}). Par conséquent

$$(H_i \cdot\!\cdot\, a) \cap (H_i \cdot\!\cdot\, b) \neq \emptyset$$

et, puisque la famille $\mathcal{H}$ est forte à droite

$$H_i \cdot\!\cdot\, a = H_i \cdot\!\cdot\, b \quad \text{pour tout } H_i \in \mathcal{H}.$$

D'où

$$a \equiv b \quad (R_{\mathcal{H}}).$$

Théorème 70. — *Si la famille $\mathcal{H}$ est forte à droite et nette à droite, toute classe* X mod $R_{\mathcal{H}}$ *est un résiduel à gauche* $(H_i \cdot\!\cdot\, a)$ *non vide, avec* $H_i \in \mathcal{H}$, *et inversement.*

([34]) Dans tout ce qui suit, les familles de complexes sont toujours supposées non vides.

([35]) DG I, théorème 3.

([36]) DG I, p. 9.

Soient $x \in X$, $x' \in X$. Il existe $H_i \in \mathcal{H}$ tel que $H_i \cdot\!\cdot\, x = H_i \cdot\!\cdot\, x' \neq \emptyset$. Si $a \in (H_i \cdot\!\cdot\, x)$, $a \in (H_i \cdot\!\cdot\, x')$ et $X \subseteq (H_i \cdot\!\cdot\, a)$. Si $y \in (H_i \cdot\!\cdot\, a)$, $a \in (H_i \cdot\!\cdot\, y)$. D'où

$$(H_i \cdot\!\cdot\, x) \cap (H_i \cdot\!\cdot\, y) \neq \emptyset$$

et

$$H_i \cdot\!\cdot\, x = H_i \cdot\!\cdot\, y \quad \text{pour tout } H_i \in \mathcal{H},$$

c'est-à-dire

$$x \equiv y \quad (R_{\mathcal{H}}) \qquad \text{et} \qquad y \in X.$$

Inversement, si x, $x' \in (H_i \cdot\!\cdot\, a)$, on a

$$a \in (H_i \cdot\!\cdot\, x) \cap (H_i \cdot\!\cdot\, x')$$

et

$$H_i \cdot\!\cdot\, x = H_i \cdot\!\cdot\, x' \quad \text{pour tout} \quad H_i \in \mathcal{H}.$$

D'où

$$x \equiv x' \quad (R_{\mathcal{H}}).$$

Si $y \equiv x$ $(R_{\mathcal{H}})$, on a $H_i \cdot\!\cdot\, x = H_i \cdot\!\cdot\, y$ et $a \in (H_i \cdot\!\cdot\, y)$, c'est-à-dire $y \in (H_i \cdot\!\cdot\, a)$.

Théorème 71. — *Si* R *est une équivalence régulière à droite et simplifiable à droite dans le demi-groupe* D, *toute famille, formée de classes* H_i mod R, *est forte à droite; il existe au moins une famille* $\mathcal{H}$ *de complexes, forte à droite et nette à droite, et l'on a pour toute famille de cette forme*

$$R = R_{\mathcal{H}}.$$

Soit $(H_i \cdot\!\cdot\, a) \cap (H_i \cdot\!\cdot\, b) \neq \emptyset$. D'après le théorème 21 de DG I, H_i est fort et donc $H_i \cdot\!\cdot\, a = H_i \cdot\!\cdot\, b$. De plus

$$R^* = R^*_{H_i},$$

R^* et $R^*_{H_i}$ désignant les traces des équivalences R et R_{H_i} sur $D^* = D - W_{H_i}$. Or, $a \in D^*$, $b \in D^*$. Par conséquent

$$a \equiv b \quad (R).$$

Si H_j est une classe quelconque mod R, on a $H_j \cdot\!\cdot\, a = H_j \cdot\!\cdot\, b$. En effet, si $x \in H_j \cdot\!\cdot\, a$, $ax \in H_j$. D'où, puisque $ax \equiv bx$ (R), $bx \in H_j$, donc $H_j \cdot\!\cdot\, a \subseteq H_j \cdot\!\cdot\, b$. On montre de même que $H_j \cdot\!\cdot\, b \subseteq H_j \cdot\!\cdot\, a$, d'où $H_j \cdot\!\cdot\, a = H_j \cdot\!\cdot\, b$, ce qui démontre la première partie du théorème.

Soit ensuite $\mathcal{H}$ une famille formée de classes H_i mod R telles que leur réunion soit un complexe net à droite. Une telle famille $\mathcal{H}$ existe toujours, c'est immédiat. La famille $\mathcal{H}$ est forte à droite, d'après ce qui précède, et nette à droite. D'après le théorème 20 de DG I, on a

$$R \subseteq R_{H_i}, \qquad \text{d'où} \qquad R \subseteq R_{\mathcal{H}} = \bigcap_{H_i \in \mathcal{H}} R_{H_i}.$$

Si $a \equiv b (R_{\mathcal{H}})$, il existe au moins un complexe $H_i \in \mathcal{H}$ tel que

$$H_i \cdot\!\cdot\, a = H_i \cdot\!\cdot\, b \neq \emptyset.$$

Si $x \in H_i \cdot\!\cdot\, a = H_i \cdot\!\cdot\, b$, on a

$$ax \in H_i, \qquad bx \in H_i;$$

d'où

$$ax \equiv bx \quad (\mathrm{R}) \qquad \text{et} \qquad a \equiv b \quad (\mathrm{R}).$$

Donc

$$\mathrm{R}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_{\mathcal{H}} = \mathrm{R}.$$

Des théorèmes précédents, il résulte que, *dans un demi-groupe, les équivalences régulières à droite et simplifiables à droite coïncident avec les équivalences formées de l'intersection d'équivalences principales à droite associées à des complexes dont l'ensemble forme une famille forte à droite et nette à droite.*

On a évidemment les propriétés symétriques.

Une famille $\mathcal{H}$ de complexes est dite *quasi symétrique* si $\mathrm{R}_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}\mathrm{R}$.

Si $\mathcal{H}$ est une famille de complexes, *forte*, *nette* et *quasi symétrique*, *l'équivalence* $\mathrm{R}_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}\mathrm{R} = \mathrm{R}$ est *régulière* et *simplifiable* et le demi-groupe-quotient D/R est un semi-groupe homomorphe à D.

Inversement, si R est une *équivalence régulière* et *simplifiable* dans D, il existe au moins une famille $\mathcal{H}$ de complexes, *forte*, *nette* et *quasi symétrique* telle que

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}\mathrm{R}.$$

Si S est un semi-groupe homomorphe à D et si R_{α} est l'équivalence d'homomorphisme, il existe au moins une famille $\mathcal{H}$ de complexes, forte, nette et quasi symétrique telle que

$$\mathrm{R}_{\alpha} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}\mathrm{R}, \qquad \mathrm{D}/\mathrm{R}_{\mathcal{H}} \simeq \mathrm{S}.$$

Ces propriétés résultent immédiatement des théorèmes 69 et 71, et de leurs symétriques.

THÉORÈME 72. — *Pour que les complexes* H_i *d'une famille* $\mathcal{H}$ *nette à droite soient classes d'une équivalence* R *régulière à droite et simplifiable à droite il faut et il suffit que* :

1. $\mathcal{H}$ *soit forte à droite;*
2. *La relation* $\mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, h_i \neq \emptyset$, *avec* $h_i \in \mathrm{H}_i$, *entraîne* $\mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, \mathrm{H}_i \neq \emptyset$;
3. *La relation* $(\mathrm{H}_j \cdot\!.\, x) \cap \mathrm{H}_i \neq \emptyset$ *entraîne* $\mathrm{H}_j \cdot\!.\, x \subseteq \mathrm{H}_i$.

La condition est *nécessaire*. En effet, la famille $\mathcal{H}$ est forte à droite, et l'on a $\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}}$. Comme H_i est une classe mod $\mathrm{R}_{\mathcal{H}}$, on a, si $h'_i \in \mathrm{H}_i$,

$$h_i \equiv h'_i \quad (\mathrm{R}_{\mathcal{H}}), \qquad \text{d'où} \qquad h_i \equiv h'_i \quad (\mathrm{R}_{\mathrm{H}_j}),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, h_i = \mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, h'_i.$$

Par conséquent, si $x \in \mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, h_i$, $x \in \mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, h'_i$, donc $\mathrm{H}_j \,.\!\cdot\, \mathrm{H}_i \neq \emptyset$.

De $h_i \in (\mathrm{H}_j \cdot\!.\, x) \cap \mathrm{H}_i$ suit $h_i x \in \mathrm{H}_j$. Si $y \in \mathrm{H}_j \cdot\!.\, x$, $yx \in \mathrm{H}_j$. Comme H_j est une classe mod $\mathrm{R}_{\mathcal{H}}$, on a

$$h_i x \equiv yx \quad (\mathrm{R}_{\mathcal{H}}),$$

d'où, puisque $R_{\mathcal{H}} = R$ (simplifiable à droite)

$$h_i \equiv y \quad (R_{\mathcal{H}}),$$

et $y \in H_i$, c'est-à-dire $H_j \cdot . x \subseteq H_i$.

La condition est *suffisante.* La famille $\mathcal{H}$ étant forte à droite et nette à droite, $R_{\mathcal{H}}$ est une équivalence régulière à droite et simplifiable à droite. Montrons que H_i est contenu dans une classe mod $R_{\mathcal{H}}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $H_j \in \mathcal{H}$, H_i est contenu dans une classe mod R_{H_j}. Si $H_i \subseteq W_{H_j}$, c'est évident. Si $H_i \not\subseteq W_{H_j}$, il existe $h_i \in H_i$ et x tels que $h_i x \in H_j$, donc $H_j .\cdot h_i \neq \emptyset$. D'où $H_j .\cdot H_i \neq \emptyset$, et puisque H_j est fort, H_i est contenu dans une classe mod R_{H_j}.

Montrons ensuite que H_i est saturé mod $R_{\mathcal{H}}$. Si

$$y \equiv h_i \quad (R_{\mathcal{H}})$$

il existe un complexe $H_k \in \mathcal{H}$, tel que $H_k .\cdot h_i \neq \emptyset$, et puisque $y \equiv h_i\,(R_{H_k})$, on a

$$H_k .\cdot y = H_k .\cdot h_i.$$

Si $t \in H_k .\cdot h_i$, $h_i t \in H_k$, $yt \in H_k$ et $(H_k \cdot . t) \cap H_i \neq \emptyset$. D'où

$$H_k \cdot . t \subseteq H_i,$$

c'est-à-dire $y \in H_i$.

Remarquons que si une telle équivalence R existe, elle est unique, et $R = R_{\mathcal{H}}$.

De ce théorème résulte en particulier :

Pour qu'un complexe H *net à droite soit classe d'une équivalence régulière à droite et simplifiable à droite, il faut et il suffit qu'il soit parfait à droite et que la relation* $(H \cdot . x) \cap H \neq \emptyset$ *entraîne* $H \cdot . x \subseteq H$.

En effet, si H est fort et vérifie la condition 2, il est parfait à droite, car on a

$$H .\cdot H = \bigcap_{h \in H} H .\cdot h \subseteq (H .\cdot h_1) \cap (H .\cdot h_2)$$

quels que soient $h_1, h_2 \in H$. S'il existe h tel que $H .\cdot h \neq \emptyset$, H est parfait à droite. Or H est net à droite, donc $H .\cdot h \neq \emptyset$.

Si H est parfait à droite, il vérifie la condition 2. On a en effet

$$H .\cdot h_1 = H .\cdot h_2 \neq \emptyset, \qquad \text{d'où} \qquad H .\cdot H = \bigcap_{h \in H} H .\cdot h = H .\cdot h_1 \neq \emptyset.$$

2. **Caractérisation des équivalences régulières et réductives.** — Une relation T, définie dans le demi-groupe D, est dite *réductive à droite* si

$$(ax)\,T\,(bx) \quad \textit{pour tout } x \in D$$

entraîne

$$a\,T\,b.$$

Un complexe $K \subseteq D$ est dit *réducteur à droite pour la relation* T, si

$$(ak)\,T\,(bk) \quad \textit{pour tout } k \in K$$

entraîne

$$a \, T \, b.$$

L'ensemble E *des complexes réducteurs à droite pour la relation* T, *s'il n'est pas vide, est un demi-groupe pour la multiplication des complexes.*

Une famille $\mathcal{H}$ de complexes H_i du demi-groupe D est dite *complète à droite* ([37]), s'il existe un complexe M ayant les propriétés suivantes :

1°

$$DM \subseteq \bigcup_{H_i \in \mathcal{H}} H_i.$$

2° La relation

$$DM \subseteq \bigcup_{H_i \in \mathcal{H}} [(H_i \cdot\cdot a) \cap (H_i \cdot\cdot b)]$$

entraîne

$$H_i \cdot\cdot a = H_i \cdot\cdot b \quad \text{pour tout } H_i \in \mathcal{H}.$$

Théorème 73. — *Si* $\mathcal{H}$ *est une famille de complexes* H_i, *complète à droite, l'équivalence* $R_{\mathcal{H}} = \bigcap_{H_i \in \mathcal{H}} R_{H_i}$ *est régulière à droite et réductive à droite.*

Comme intersection d'équivalences principales à droite, $R_{\mathcal{H}}$ est régulière à droite.

Soit alors

$$ax \equiv bx \quad (R_{\mathcal{H}})$$

pour tout $x \in D$, et soit $y = y_1 m_1$, avec $m_1 \in M$. On a

$$ay_1 \equiv by_1 \quad (R_{\mathcal{H}}).$$

Mais $ay_1 . m_1 \in DM \subseteq \bigcup_{H_i \in \mathcal{H}} H_i$. Il existe donc un complexe H_i tel que l'on ait

$$ay_1 . m_1 \in H_i.$$

Comme $ay_1 \equiv by_1 (R_{H_i})$, on a

$$H_i \cdot\cdot ay_1 = H_i \cdot\cdot by_1$$

donc $by_1 . m_1 \in H_i$. D'où

$$y \in (H_i \cdot\cdot a) \cap (H_i \cdot\cdot b)$$

et par conséquent

$$DM \subseteq \bigcup_{H_i \in \mathcal{H}} [(H_i \cdot\cdot a) \cap (H_i \cdot\cdot b)].$$

On en déduit puisque la famille $\mathcal{H}$ est complète à droite

$$H_i \cdot\cdot a = H_i \cdot\cdot b \quad \text{pour tout } H_i \in \mathcal{H}.$$

([37]) Cette définition d'une famille complète à droite est plus générale que celle que nous avons donnée primitivement dans ER.

Donc

$$a \equiv b \quad (\mathrm{R}_{\mathcal{H}}).$$

Théorème 74. — *La classe* $\mathrm{A} \bmod \mathrm{R}_{\mathcal{H}}$ *contenant l'élément* a *est l'intersection* I *des résiduels à gauche* $\mathrm{H}_i \cdot . x$ *contenant* a, *avec* $x \in \mathrm{DM}$, $\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}$.

En effet, comme $\mathcal{H}$ est complet à droite, pour tout $x \in \mathrm{DM}$, il existe un complexe $\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}$ tel que $ax \in \mathrm{H}_i$. Donc $bx \in \mathrm{H}_i$, pour tout $b \in \mathrm{I}$ et

$$\mathrm{DM} \subseteq \bigcup_{\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}} [(\mathrm{H}_i . \cdot a) \cap (\mathrm{H}_i . \cdot b)],$$

ce qui entraîne

$$a \equiv b \quad (\mathrm{R}_{\mathcal{H}}).$$

Si l'on a inversement

$$a \equiv b \quad (\mathrm{R}_{\mathcal{H}})$$

et si $a \in (\mathrm{H}_i \cdot . x)$, $ax \in \mathrm{H}_i$. Mais $x = x_1 . m_1$ avec $m_1 \in \mathrm{M}$, et $ax_1 \equiv bx_1$ $(\mathrm{R}_{\mathcal{H}})$. Donc $\mathrm{H}_i . \cdot ax_1 = \mathrm{H}_i . \cdot bx_1$, et $bx \in \mathrm{H}_i$. D'où $b \in (\mathrm{H}_i \cdot . x)$.

Théorème 75. — *Si* R *est une équivalence régulière à droite et réductive à droite dans le demi-groupe* D, *toute famille* $\mathcal{H}$, *formée de classes* $\mathrm{H}_i \bmod \mathrm{R}$ *dont la réunion contient* D^{n+1}, *n entier positif, est complète à droite et l'on a*

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}}.$$

Supposons en effet que l'on ait

$$\mathrm{D}^{n+1} \subseteq \bigcup_{\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}} [(\mathrm{H}_i . \cdot a) \cap (\mathrm{H}_i . \cdot b)].$$

Si $x \in \mathrm{D}^{n+1}$, il existe $\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}$ tel que

$$ax \in \mathrm{H}_i, \qquad bx \in \mathrm{H}_i,$$

d'où, puisque H_i est une classe mod R,

$$ax \equiv bx \quad (\mathrm{R})$$

et cela pour tout $x \in \mathrm{D}^{n+1}$. Si $y \in \mathrm{D}^n$, on a alors

$$ayz \equiv byz \quad (\mathrm{R})$$

pour tout $z \in \mathrm{D}$. Comme R est réductive à droite, on a donc

$$ay \equiv by \quad (\mathrm{R})$$

et cela pour tout $y \in \mathrm{D}^n$.

Si $n > 1$, on a pour tout $z \in \mathrm{D}$ et pour $y_1 \in \mathrm{D}^{n-1}$,

$$ay_1z \equiv by_1z \quad (\mathrm{R}), \qquad \text{d'où} \qquad ay_1 \equiv by_1 \quad (\mathrm{R})$$

pour tout $y_1 \in \mathrm{D}^{n-1}$.

En répétant le même raisonnement autant de fois qu'il le faut, on obtient finalement

$$at \equiv bt \quad (\mathrm{R}),$$

pour tout $t \in \mathrm{D}$. D'où

$$a \equiv b \quad (\mathrm{R}).$$

Mais d'après le théorème 20 de DGI, on a $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}_{\mathrm{H}_i}$ pour tout $\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}$, donc $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{R}_{\mathcal{H}}$. Par conséquent

$$a \equiv b \quad (\mathrm{R}_{\mathcal{H}})$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{H}_i \,.\!\cdot\, a = \mathrm{H}_i \,.\!\cdot\, b$$

pour tout $\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est complet à droite.

Montrons ensuite que $\mathrm{R}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{R}$. Soit $a \equiv b(\mathrm{R}_{\mathcal{H}})$. Si $y \in \mathrm{D}^n$, $ay \in \mathrm{D}^{n+1} \subseteq \bigcup_{\mathrm{H}_i \in \mathcal{H}} \mathrm{H}_i$. Il existe donc une classe H_i telle que $ay \in \mathrm{H}_i$. Mais $\mathrm{H}_i \,.\!\cdot\, a = \mathrm{H}_i \,.\!\cdot\, b$. Donc $by \in \mathrm{H}_i$, et $ay \equiv by(\mathrm{R})$, quel que soit $y \in \mathrm{D}^n$. Comme R est réductive à droite, on a, si $n > 1$,

$$ay_1 \equiv by_1 \quad (\mathrm{R})$$

pour tout $y_1 \in \mathrm{D}^{n-1}$. Et ainsi de suite. Finalement on obtient

$$at \equiv bt \quad (\mathrm{R})$$

pour tout $t \in \mathrm{D}$. D'où

$$a \equiv b \quad (\mathrm{R}).$$

Par conséquent

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}}.$$

Ainsi, *dans un demi-groupe, les équivalences régulières à droite et réductives à droite coïncident avec les équivalences formées de l'intersection des équivalences principales à droite associées à des complexes dont l'ensemble constitue une famille complète à droite.*

On a les propriétés symétriques.

Théorème 76. — *Si le complexe* H *est unifié à gauche (c'est-à-dire si* $\mathrm{H} \,.\!\cdot\, \mathrm{H} \neq \emptyset$*), l'équivalence réversible généralisée à droite* Σ_{H} *est réductive à gauche.*

Soit $x \in \mathrm{H} \,.\!\cdot\, \mathrm{H}$, c'est-à-dire $\mathrm{H}x \subseteq \mathrm{H}$. Si $ya \equiv yb(\Sigma_{\mathrm{H}})$ pour tout $y \in \mathrm{D}$, on a en particulier

$$xa \equiv xb \quad (\Sigma_{\mathrm{H}})$$

et donc

$$\mathrm{H}xa \between \mathrm{H}m_1 \between \dots \between \mathrm{H}m_n \between \mathrm{H}xb,$$

d'où, puisque $\mathrm{H}x \subseteq \mathrm{H}$,

$$\mathrm{H}a \between \mathrm{H}m_1 \between \dots \between \mathrm{H}m_n \between \mathrm{H}b$$

et

$$a \equiv b \quad (\Sigma_{\mathrm{H}}).$$

THÉORÈME 77. — *Si* H *est un complexe réversé à droite pour un complexe* K (*en particulier si* H *est un sous-demi-groupe réversible à droite*) *et si* D *possède un élément t tel que la relation*

$$Hxt \cap Hyt \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad Hx \cap Hy \neq \emptyset$$

(*en particulier si t est un élément simplifiable à droite*), Σ_H *est réductive à droite.*

Le complexe H étant réversé à droite on a $\sigma_H = \Sigma_H$, d'après le théorème 41. Si $ax \equiv bx(\Sigma_H)$, pour tout $x \in D$, on a en particulier

$$at \equiv bt \quad (\Sigma_H),$$

c'est-à-dire

$$Hat \cap Hbt \neq \emptyset$$

et donc

$$Ha \cap Hb \neq \emptyset, \quad \text{d'où} \quad a \equiv b \quad (\Sigma_H).$$

Un demi-groupe D_0 est *réductif à droite* si la relation $ax = bx$, *pour tout* $x \in D_0$, entraîne $a = b$.

On a la définition symétrique. Un demi-groupe *réductif* est un demi-groupe réductif à droite et à gauche.

Soit, dans le demi-groupe D, l'équivalence régulière $\Sigma_\cap$ définie par

$$\Sigma_\cap = \bigcap_{x \in D} \Sigma_x,$$

où Σ_x est l'équivalence réversible généralisée associée à x. Pour qu'un demi-groupe soit réductif à gauche, il faut et il suffit que $\Sigma_\cap$ soit l'égalité. Si $D^2 = D$, $\Sigma_\cap$ est réductive à gauche.

Si $\mathcal{H}$ est une famille de complexes *complète* (à droite et à gauche) et *quasi symétrique*, l'équivalence $R_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}R = R$ est *régulière* et *réductive* (à droite et à gauche) et le demi-groupe-quotient D/R est un demi-groupe réductif homomorphe à D.

Inversement, si R est une *équivalence régulière* et *réductive* dans D, toute famille $\mathcal{H}$, formée de classes $H_i \bmod R$ dont la réunion contient D^{n+1}, est *complète* et *quasi symétrique* et l'on a

$$R = R_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}R.$$

Si D_0 est un demi-groupe réductif homomorphe à D et si R_α est l'équivalence d'homomorphisme, R_α est réductive. La famille $\mathcal{H}$ formée des classes $H_i \bmod R_\alpha$ correspondant aux éléments de D_0^{n+1} est complète et quasi symétrique et l'on a

$$R_\alpha = R_{\mathcal{H}} = {}_{\mathcal{H}}R, \qquad D/R_{\mathcal{H}} \simeq D_0.$$

THÉORÈME 78. — *Si* S *est un sous-demi-groupe de* D *tel que* $S \cdot . S = S$, *en particulier si* S *est unitaire à droite, l'équivalence principale à droite* R_S *est réductive à droite.*

Soit $ax \equiv bx(R_S)$ pour tout $x \in D$, c'est-à-dire $S .\cdot ax = S .\cdot bx$. Si $y \in S .\cdot a$, $ay \in S$ et $ayS \subseteq S$. Donc $S \subseteq (S .\cdot ay) = (S .\cdot by)$, et $byS \subseteq S$. Par conséquent, $by \in S$ et $(S .\cdot a) \subseteq (S .\cdot b)$. On montre de même que $(S .\cdot b) \subseteq (S .\cdot a)$ d'où $S .\cdot a = S .\cdot b$, c'est-à-dire

$$a \equiv b \quad (R_S).$$

Théorème 79. — *Si* H *est un complexe homogène à droite*, R_H *est réductive à droite.*

Soit $ax \equiv bx(R_H)$, pour tout $x \in D$. Si $y \in H .\cdot a$, $ay \in H$. Mais $ay \equiv by(R_H)$, donc $by \in H$, puisque H est homogène à droite. D'où $H .\cdot a \subseteq H .\cdot b$. De même, $H .\cdot b \subseteq H .\cdot a$, donc $H .\cdot a = H .\cdot b$.

Théorème 80. — *Si* A *est un anneau et si* $\mathcal{M}$ *est un idéal à droite dans* A, *une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence* R *associée à* $\mathcal{M}$ *soit réductive à droite pour la multiplication est que l'on ait* $(\mathcal{M} \cdot. A) \subseteq \mathcal{M}$.

La condition est nécessaire. En effet, soit $x \in (\mathcal{M} \cdot. A)$, c'est-à-dire $xA \subseteq \mathcal{M}$. On peut écrire $x = x_1 - x_2$, avec $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, et l'on a

$$(x_1 - x_2)y \equiv 0 \quad (R)$$

pour tout $y \in A$. D'où

$$x_1 y \equiv x_2 y \quad (R)$$

et puisque R est réductive à droite,

$$x_1 \equiv x_2 \quad (R),$$

c'est-à-dire

$$x = x_1 - x_2 \equiv 0 \quad (R) \qquad \text{et} \qquad x \in \mathcal{M}.$$

La condition est suffisante. Car si

$$x_1 y \equiv x_2 y \quad (R)$$

pour tout $y \in A$, on a

$$x_1 y - x_2 y = (x_1 - x_2)y \equiv 0 \quad (R)$$

et

$$(x_1 - x_2)A \subseteq \mathcal{M}, \qquad \text{d'où} \qquad x_1 - x_2 \in \mathcal{M}, \qquad x_1 \equiv x_2 \quad (R).$$

Théorème 81. — *Si* D *est un demi-groupe globalement idempotent (c'est-à-dire si* $D^2 = D$*), toute équivalence principale à droite* R_H *associée à un complexe* H *quelconque est réductive à droite. De même toutes les intersections d'équivalences principales à droite sont des équivalences réductives à droite, et elles coïncident avec les équivalences régulières à droite et réductives à droite dans* D.

En effet, soit $ax \equiv bx(R_H)$, pour tout $x \in D$. Si $y \in H .\cdot a$, $ay \in H$. Mais $y = y_1 . y_2$, et donc $y_2 \in (H .\cdot ay_1)$. Comme

$$ay_1 \equiv by_1 \quad (R_H),$$

on a

$$H .\cdot ay_1 = H .\cdot by_1 \qquad \text{et} \qquad by_1 . y_2 = by \in H.$$

D'où

$$H \mathbin{.\cdot} a \subseteq H \mathbin{.\cdot} b.$$

De même, on a $H \mathbin{.\cdot} b \subseteq H \mathbin{.\cdot} a$. Par conséquent

$$a \equiv b \quad (R_H).$$

La seconde partie du théorème découle du fait que toute intersection d'équivalences réductives à droite est encore une équivalence réductive à droite, et du théorème 75.

Si D est un demi-groupe non globalement idempotent, l'équivalence principale à droite R_H n'est pas nécessairement réductive à droite, comme le montre l'exemple du demi-groupe dont la table de multiplication est la suivante :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	b

Soit le complexe $H = \{b\}$. Les classes $\bmod R_H$ sont $\{a, b, c\}$ et $\{d\}$. On a $ax \equiv dx (R_H)$, quel que soit x mais $a \not\equiv d (R_H)$.

Théorème 82. — *Tout demi-groupe* D *dont les équivalences régulières à droite sont réductives à droite est globalement idempotent.*

Supposons en effet que $D^2 \subset D$ et soit $p \in D - D^2$. Partageons D en deux classes $\{D - p\}$ et $\{p\}$. Nous définissons ainsi une équivalence R régulière à droite, puisque $xy \in \{D - p\}$, quels que soient x et y. En particulier, on a, si $y \in \{D - p\}$,

$$px \equiv yx \quad (R)$$

pour tout $x \in D$, sans avoir

$$p \equiv y \quad (R)$$

contre l'hypothèse.

3. **Caractérisation des équivalences régulières.** — Soit D un demi-groupe dans lequel se trouve un ensemble non vide $D_0 \subseteq D$ ayant les propriétés :

1° Si $x_0 \in D_0$, $y_0 \in D_0$, on a $x_0 y_0 = y_0 x_0$.

2° Pour tout $x \in D$, il existe $x_0 \in D_0$ tel que $xx_0 = x$.

D'après 2°, D est globalement idempotent.

Théorème 83. — *Avec les hypothèses précédentes, toutes les équivalences régulières à droite dans* D *sont réductives à droite et elles coïncident avec les intersections d'équivalences principales à droite dans* D.

Soit R une équivalence régulière à droite dans D et soit

$$ax \equiv bx \quad (R)$$

pour tout $x \in D$. On a en particulier

$$a = aa_0 \equiv ba_0 \quad (R), \qquad b = bb_0 \equiv ab_0 \quad (R),$$

avec $a_0 \in D_0$, $b_0 \in D_0$. D'où

$$ab_0 \equiv ba_0 b_0 \quad (R), \qquad ba_0 \equiv ab_0 a_0 \quad (R).$$

Mais $a_0 b_0 = b_0 a_0$. Donc

$$ba_0 b_0 \equiv ab_0 a_0 \quad (R) \qquad \text{et} \qquad b \equiv a \quad (R).$$

Le demi-groupe D étant globalement idempotent, la seconde partie du théorème découle alors du théorème 81.

Corollaire 1. — *Dans un demi-groupe* D *possédant un élément neutre à droite, dans un homogroupe résorbant* [38] H, *les intersections d'équivalences principales à droite sont toutes les équivalences régulières à droite de* D *et de* H.

Corollaire 2. — *Dans un demi-treillis* T, *les intersections d'équivalences principales sont toutes les équivalences régulières de* T.

Si D est un demi-groupe quelconque, désignons par $D^\star$ le demi-groupe formé en adjoignant à D un élément $e \notin D$ vérifiant les relations $ee = e$ et $ex = xe = x$ pour tout $x \in D$. L'élément e est donc élément neutre de $D^\star$.

Théorème 84. — *Les équivalences régulières à droite d'un demi-groupe quelconque* D *sont les traces sur* D *des intersections des équivalences principales à droite de* $D^\star$.

Si $R^\star$ est une équivalence régulière à droite dans $D^\star$, $R^\star$ est, d'après le corollaire 1 du théorème 83, intersection d'équivalences principales à droite dans $D^\star$, puisque $D^\star$ possède un élément neutre. La trace de $R^\star$ sur D est évidemment une équivalence régulière à droite de D.

Si R est une équivalence régulière à droite de D, l'équivalence $R^\star$ de $D^\star$ formée des classes de R dans D et de la classe $\{e\}$ est régulière à droite dans $D^\star$ et R est sa trace sur D. Mais $R^\star$ est intersection d'équivalences principales à droite dans $D^\star$ (corollaire 1, théorème 83). Le théorème est donc démontré.

4. Caractérisation des groupes par leurs équivalences régulières ou simplifiables. — Théorème 85. — *Pour qu'un semi-groupe* S *soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences régulières à droite soient simplifiables à droite.*

On sait que la condition est nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, les équivalences régulières à droite de S, étant simplifiables à droite, sont réductives

[38] Le théorème 26 donne une autre caractérisation des équivalences régulières à droite d'un homogroupe résorbant.

à droite. Par conséquent, d'après le théorème 82, S est globalement idempotent. D'autre part, tout élément x de S est fort puisque la règle de simplification à droite et à gauche est valable dans S. L'équivalence principale à droite R_x associée à l'élément x est régulière à droite, donc simplifiable à droite. Si x n'est pas net à droite, son résidu à droite W_x est alors un complexe consistant à gauche, d'après le théorème 10 de DG I. L'élément x ne peut appartenir à W_x, car si $x \in W_x$, on a, puisque $S = S^2$, $x = x_1 x_2 \in W_x$, donc $x_1 \in W_x$, ce qui est impossible. Il existe donc un élément e tel que $xe = x$. S étant un semi-groupe, l'élément e est élément neutre de S. Si $w \in W_x$, $ew = w \in W_x$, donc $e \in W_x$, ce qui est impossible, puisque $ex = x$. Il s'ensuit alors que x est net à droite. En particulier l'élément e est net à droite et par conséquent S est un groupe.

Corollaire. — *Pour qu'un demi-groupe* D *soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences régulières à droite soient simplifiables à droite et que ses équivalences régulières à gauche soient simplifiables à gauche.*

En effet, l'égalité étant une équivalence régulière, est simplifiable et par conséquent D est un semi-groupe

Théorème 86. — *Pour qu'un semi-groupe* S *soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences simplifiables à droite soient régulières à droite.*

On sait que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Pour cela, établissons d'abord que le semi-groupe S est globalement idempotent c'est-à-dire que $S^2 = S$. En effet, si l'ensemble $S - S^2$ n'est pas vide, soit $p \in \{S - S^2\}$ et posons $S^* = S - \{p, p^2\}$. Considérons alors dans S l'équivalence φ définie de la manière suivante. Si $x \in S^*$, nous avons $x \equiv y (\varphi)$ si et seulement si $x = y$ tandis que

$$p \equiv p^2 \quad (\varphi).$$

Autrement dit, à part la classe $\{p, p^2\}$, toutes les autres classes mod φ ne contiennent qu'un élément. L'équivalence φ est simplifiable à droite. En effet, soit

$$ax \equiv bx \quad (\varphi).$$

Si $ax \in S^*$, nous avons $ax = bx$ et, puisque S est un semi-groupe, $a = b$. Si $ax \in \{p, p^2\}$, nous avons $ax = p^2 = bx$, donc $a = b$. Par conséquent, l'équivalence φ étant simplifiable à droite, est, d'après l'hypothèse, régulière à droite. De

$$p \equiv p^2 \quad (\varphi)$$

résulte alors

$$p^2 \equiv p^3 \quad (\varphi),$$

donc $p^2 = p^3$, c'est-à-dire $p = p^2$, ce qui est impossible. Par conséquent, $S = S^2$.

Soit ensuite a un élément quelconque de S; considérons l'équivalence Ω_a (*voir* chap. II) définie par

$$x \equiv y \quad (\Omega_a) \qquad \text{si et seulement si} \quad x \cdot\!\cdot a = y \cdot\!\cdot a.$$

L'équivalence Ω_a est simplifiable à droite. En effet, soit

$$xz \equiv yz \quad (\Omega_a), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad xz \mathbin{.\cdot} a = yz \mathbin{.\cdot} a.$$

Si $xz \mathbin{.\cdot} a \neq \emptyset$, il existe un élément t tel que l'on ait $xz = at = yz$. D'où $x = y$. Si $xz \mathbin{.\cdot} a = \emptyset$, désignons par V_a l'ensemble des éléments v de S tels que $v \mathbin{.\cdot} a = \emptyset$. Cet ensemble V_a est une classe mod Ω_a. D'autre part, la relation $rs \in V_a$ entraîne $r \in V_a$. En effet, si $r \notin V_a$, il existe r' tel que $r = ar'$. D'où $rs = ar's$, c'est-à-dire $rs \mathbin{.\cdot} a \neq \emptyset$, contre $rs \in V_a$. Par conséquent, les relations

$$xz \mathbin{.\cdot} a = yz \mathbin{.\cdot} a = \emptyset$$

entraînent $xz \in V_a$, $yz \in V_a$, donc $x \in V_a$, $y \in V_a$, c'est-à-dire

$$x \mathbin{.\cdot} a = y \mathbin{.\cdot} a = \emptyset.$$

L'équivalence Ω_a est donc simplifiable à droite. De l'hypothèse, résulte alors qu'elle est régulière à droite.

Montrons ensuite que S contient un élément neutre. L'élément a n'appartient pas à V_a. En effet, si $a \in V_a$, l'ensemble V_a ne contient alors que l'élément a. Car si $a \neq a_1 \in V_a$, nous avons

$$a \equiv a_1 \quad (\Omega_a), \qquad \text{d'où} \qquad ax \equiv a_1 x \quad (\Omega_a),$$

c'est-à-dire

$$ax \mathbin{.\cdot} a = a_1 x \mathbin{.\cdot} a.$$

Or $x \in ax \mathbin{.\cdot} a$. Donc $x \in a_1 x \mathbin{.\cdot} a$, c'est-à-dire $ax = a_1 x$, $a = a_1$, ce qui est impossible. D'autre part, S étant globalement idempotent, nous avons $a = b_1 b_2$ et $b_1 \in V_a$. Par conséquent $b_1 = a$ et $a = ab_2$, c'est-à-dire $a \notin V_a$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $a \in V_a$. Donc l'élément a ne peut appartenir à V_a et il existe e tel que $a = ae$. S étant un semi-groupe, l'élément e est élément neutre de S.

L'élément e n'appartient pas à V_a. En effet, supposons que l'on ait $e \in V_a$. Alors $e \in V_{a^2}$, car si $e \notin V_{a^2}$, nous avons $e = a^2 y$, donc $e \notin V_a$. D'autre part, l'élément a ne peut appartenir à V_{a^2}, car si $a \in V_{a^2}$ nous avons, puisque V_{a^2} est une classe mod Ω_{a^2} :

$$e \equiv a \quad (\Omega_{a^2})$$

et comme Ω_{a^2} est simplifiable à droite, donc régulière à droite,

$$a \equiv a^2 \quad (\Omega_{a^2}).$$

Mais $a^2 \notin V_{a^2}$. Donc $a \notin V_{a^2}$, contre l'hypothèse. Par conséquent, puisque $a \notin V_{a^2}$, il existe r tel que $a = a^2 r$ et $e = ar$, c'est-à-dire $e \notin V_a$, en contradiction avec l'hypothèse $e \in V_a$.

L'élément a étant quelconque, la relation $e \notin V_a$ entraîne pour tout $a \in S$ l'existence d'un élément $\bar{a}$ tel que l'on ait $a\bar{a} = e$. Donc S est un groupe.

THÉORÈME 87. — *Dans un demi-groupe* D, *toute équivalence* R, *simpli-*

fiable à droite et ne comprenant qu'un nombre fini n de classes, est régulière à droite [39].

En effet, supposons que R ne soit pas régulière à droite. Il existe alors x, x_1, $a \in D$ tels que l'on ait

$$x \equiv x_1 \quad (R), \qquad xa \not\equiv x_1 a \quad (R).$$

Soient $x_1 \in X_1, \ldots, x_i \in X_i, \ldots, x_n \in X_n$, où les X_i sont les n classes mod R. Les classes X_i^a contenant respectivement $x_1 a, \ldots, x_i a, \ldots, x_n a$, étant différentes l'une de l'autre, sont toutes les classes mod R. Il existe alors x_i tel que l'on ait

$$x_i a \equiv xa \quad (R), \qquad \text{donc} \quad x_i \not\equiv x_1 \quad (R),$$

d'où

$$x_i \equiv x \quad (R) \qquad \text{et} \qquad x \not\equiv x_1 \quad (R),$$

contre l'hypothèse.

Corollaire. — *Dans un demi-groupe fini, toute équivalence simplifiable à droite est régulière à droite.*

([39]) Cette propriété est encore valable dans un groupoïde.