BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 166-170

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__166_0>

Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes;
par M. Désiré André.

(Séance du 13 mars 1878.)

I. On sait qu'on appelle *série récurrente* toute série dont chaque terme est la somme d'un nombre fixe des termes précédents multipliés respectivement par des coefficients constants.

La relation qui existe entre le terme général V_n et les termes précédents V_{n-1}, V_{n-2}, ... est la *loi* de la série. Lagrange a nommé ([1]) *équation génératrice* de cette série l'équation en x qu'on obtient en remplaçant, dans la loi, V_n, V_{n-1}, V_{n-2}, ... respectivement par x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, ..., et en supprimant ensuite la plus haute puissance de x qui se trouve en facteur commun dans tous les termes.

Une même série récurrente, comme Moivre l'a démontré ([2]) et comme on peut le voir aisément, admet une infinité de lois, et par suite une infinité d'équations génératrices différentes. Néanmoins, comme, dans la présente Note, nous ne considérerons jamais, pour une série récurrente donnée, qu'une seule équation génératrice, nous emploierons constamment cette locution : *l'équation génératrice de telle série récurrente.*

II. Cela étant, voici le problème que nous nous proposons de résoudre :

Étant donnée une relation linéaire et homogène entre les termes V_n, V_{n-1}, V_{n-2}, ... *d'une série récurrente et les termes* U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, ... *d'une autre série récurrente, en laquelle relation les termes* V *sont multipliés par des constantes, et les termes* U *par des polynômes entiers en* n, *déduire l'équation génératrice de la série* V *de l'équation génératrice de la série* U.

Pour répondre à cette question, faisons passer au premier membre de la relation donnée tous les termes V, au second tous les termes U, appelons T_n le premier membre de la relation ainsi écrite, et dési-

([1]) *Œuvres complètes*, t. V, p. 265.
([2]) *Miscellanea analytica.*

gnons par i le plus fort exposant de n dans les polynômes entiers en n qui multiplient les termes U. Soient d'ailleurs $f(x) = 0$ l'équation génératrice de la série récurrente U et $\varphi(x) = 0$ l'équation génératrice de la série récurrente dont la loi serait $T_n = 0$, série qu'il faut se garder de confondre avec la série récurrente V.

Si nous désignons par a l'une des racines de l'équation génératrice $f(x) = 0$ et par α le degré de multiplicité de cette racine, la relation donnée peut, comme on le sait, s'écrire de la manière suivante :

$$T_n = S_n + \xi_a(n)\, a^n,$$

$\xi_a(n)$ étant un polynôme entier en n du degré $\alpha + i - 1$, et S_n représentant la somme des termes analogues à $\xi_a(n)\, a^n$ qui correspondent aux racines autres que a.

Remplaçons n par $n - 1$, nous trouvons immédiatement

$$T_{n-1} = S_{n-1} + \xi_a(n-1)\, a^{n-1}.$$

Retranchons membre à membre cette équation, multipliée préalablement par a, de l'équation qui précède, nous arrivons à l'équation

$$T_n - aT_{n-1} = (S_n - aS_{n-1}) + \Delta\xi_a(n-1)\, a^n,$$

en laquelle $S_n - aS_{n-1}$ est de même forme que S_n; où $\Delta\xi_a(n-1)$, différence première de $\xi_a(n-1)$, est encore un polynôme entier en n, mais du degré $\alpha + i - 2$ seulement, et où la série récurrente définie par la loi $T_n - aT_{n-1} = 0$ a évidemment pour équation génératrice l'équation

$$\varphi(x)(x - a) = 0.$$

Si nous répétons l'opération que nous venons d'effectuer $\alpha + i - 1$ fois encore, nous sommes conduits à la relation

$$T'_n = S'_n,$$

en laquelle S'_n est de même forme que S_n, mais où le terme en a^n a complétement disparu. Il suit d'ailleurs évidemment de ce qui précède que l'équation génératrice de la série ayant pour loi $T'_n = 0$ n'est autre que l'équation

$$\varphi(x)(x - a)^{\alpha + i} = 0.$$

De là cette première conséquence que, quand on fait disparaître la racine a, le premier membre de l'équation génératrice $\varphi(x) = 0$ est multiplié par $(x - a)^{\alpha+i}$.

Si donc on désigne par $a, b, c, \ldots, l$ les racines de $f(x) = 0$, par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ les degrés de multiplicité respectifs de ces racines, et qu'en opérant comme précédemment on les fasse disparaître toutes, l'équation génératrice $\varphi(x) = 0$ sera remplacée par l'équation

$$\varphi(x)(x - a)^{\alpha+i}(x - b)^{\beta+i}(x - c)^{\gamma+i}\ldots(x - l)^{\lambda+i} = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\varphi(x) f(x) g^i(x) = 0,$$

$g(x)$ étant le quotient de $f(x)$ par le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et sa dérivée.

Cette équation génératrice finale est évidemment l'équation génératrice cherchée de la série récurrente V. Donc on peut énoncer le résultat suivant :

Pour obtenir les racines de l'équation génératrice de la série récurrente V, *il suffit de prendre :* 1° *les racines de l'équation* $\varphi(x) = 0$ *chacune avec son degré de multiplicité;* 2° *les racines de l'équation* $f(x) = 0$, *en augmentant le degré de multiplicité de chacune d'elles du nombre entier constant* i.

III. On peut se poser le même problème d'une manière plus générale, en supposant que la relation linéaire et homogène donnée présente des termes, non plus de deux séries récurrentes V et U seulement, mais d'un nombre quelconque de séries récurrentes V, U, T, S, R, ..., les termes V ayant toujours des coefficients constants et tous les autres étant multipliés par des polynômes entiers en n. On supposera alors connues les équations génératrices de toutes les séries autres que la série V, et l'on se proposera d'en déduire celle de cette dernière série.

En raisonnant comme dans le problème particulier qui précède, on serait conduit très-facilement à une solution nouvelle, ne différant de la précédente qu'en un seul point, à savoir : que le polynôme $f(x)$ y serait remplacé par le plus petit commun multiple de tous les polynômes constituant les premiers membres des équations génératrices connues, c'est-à-dire des équations génératrices correspondant aux séries récurrentes autres que la série V.

Par conséquent, si l'on conserve à $\varphi(x)$ et à i leurs significations du problème précédent, qu'on désigne par $F(x)$ le plus petit commun multiple dont nous venons de parler, et par $G(x)$ le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et sa dérivée, l'équation génératrice cherchée de la série V sera l'équation

$$\varphi(x)\,F(x)\,G^i(x) = 0.$$

Il est bien évident d'ailleurs que, dans beaucoup de cas particuliers, cette équation génératrice pourra être remplacée par une équation plus simple; mais, dans chacun de ces cas, ces simplifications seront si faciles à effectuer qu'il est inutile d'en présenter ici une étude spéciale.

IV. Dans tout ce qui précède, nous avons constamment supposé la relation donnée homogène par rapport aux termes des séries récurrentes. On pourrait généraliser encore notre problème en supposant que cette relation contînt une partie indépendante de ces termes. Si l'on suppose que cette partie indépendante soit simplement un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n, le problème pourra encore se résoudre comme le précédent.

Alors, en effet, cette partie indépendante est justement l'expression développée du terme général d'une série récurrente, et, de cette expression développée, se déduit immédiatement, comme on le sait, l'équation génératrice de cette série. Le cas actuel rentre donc dans le précédent, et, par suite, il ne nécessite point une étude nouvelle.

V. Le problème que nous venons de résoudre et de généraliser est un problème d'une réelle importance. Les développements d'un grand nombre de fonctions présentent, en effet, comme nous l'avons établi [1], des coefficients qui sont des termes de séries récurrentes. Trouver les formes générales de ces coefficients, c'est, en définitive,

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 29 octobre 1877.

trouver les éqnations génératrices de ces séries, et il est évident que la solution du problème actuel facilite beaucoup la détermination de ces équations.