

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. GERMAIN

R. BADER

Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 145-174

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__145_0

© Bulletin de la S. M. F., 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE MIXTE;

PAR MM. P. GERMAIN et R. BADER.

Introduction. — Dans un précédent travail [6], consacré à l'équation de Tricomi (T), nous avons étudié certaines solutions de cette équation aux dérivées partielles du type mixte, qui jouent un rôle important dans la résolution des problèmes aux limites. Le présent article a pour objet de déterminer sur une classe plus large (C) d'équations aux dérivées partielles du type mixte les propriétés de l'équation (T) qui peuvent être étendues aux équations (C) et de « tester » en quelque sorte certains caractères que devrait mettre en évidence une théorie générale des équations du type mixte.

Les équations du type mixte étudiées ici sont de la forme :

$$(C) \quad k(z)u_{xx} + u_{zz} = 0,$$

$k(z)$ est une fonction continue définie dans un intervalle (I) de la droite réelle comprenant le point $z = 0$; $k(z)$ a le signe de z ; l'équation est donc du type elliptique si z est positif, du type hyperbolique si z est négatif. Au voisinage de $z = 0$, on supposera que :

$$k(z) = C_0 z + C_1 z^2 + C_2 z^3,$$

C_0 et C_1 étant des constantes positives, C_2 étant une fonction continue de z . Dans le domaine hyperbolique [nous désignons ainsi la région du plan (x, z) , où l'équation est du type hyperbolique], les caractéristiques sont les courbes réelles définies par :

$$k(z)dz^2 + dx^2 = 0.$$

L'équation de Tricomi s'obtient pour $k(z) = z$. Nous nous sommes arrêtés à ce type d'équations, car c'est d'une équation de la classe (C) que dépend l'étude des écoulements plans d'un fluide parfait compressible et que ce travail a été initialement entrepris ⁽¹⁾ pour apporter une contribution à l'étude des écoulements ⁽²⁾ transsoniques [4]. Il apparaîtra clairement, d'ailleurs, que la présence

(1) Ce travail a été effectué à l'Office national d'Etudes et de Recherches aéronautiques; nous tenons à remercier respectueusement M. Maurice Roy, Directeur de l'O. N. E. R. A., de nous avoir autorisés à publier ces résultats dans le présent *Bulletin*.

(2) Les numéros entre [] renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article; les numéros entre () sont relatifs aux équations.

dans le premier membre de l'équation d'une combinaison linéaire de u , u_x , u_z à coefficients dépendant de z ne modifie sensiblement ni les méthodes d'étude, ni le caractère essentiel des résultats.

Rappelons brièvement la marche que nous avons suivie pour étudier l'équation (T); nous avons formé la fonction de Riemann d'un point P situé dans le domaine hyperbolique $\mathcal{R}(P, M)$; cette fonction est d'abord définie en tout point M du triangle PAB, limité par les arcs de caractéristiques PA et PB et le segment AB de l'axe des x , puis prolongée à travers ce segment dans tout le domaine elliptique, et enfin dans le domaine hyperbolique à travers les demi-droites $x'A$ et Bx jusqu'aux caractéristiques issues de A et B ne passant pas par P (caractéristiques réfléchies des caractéristiques issues de P); le long de ces caractéristiques réfléchies, $\mathcal{R}(P, M)$ devient infini comme un logarithme. Si maintenant, laissant M fixe, on déplace le point P pour l'amener dans la région elliptique, la fonction $\mathcal{R}(P, M)$ devient une solution élémentaire⁽³⁾ en P, n'ayant d'autre singularité dans le plan (x, z) que la singularité logarithmique classique au point P. Le cas limite obtenu lorsque P est situé sur l'axe des x fournit directement des solutions singulières de l'équation (T) que nous avons appelées source (—), doublet (—), source (+), permettant une résolution directe de certains problèmes aux limites lorsque les données sont portées par l'axe des x . Tel était, en résumé, le point de départ adopté pour définir une solution élémentaire de (T), présentant des rapports très étroits avec la fonction de Riemann.

Si l'on se propose d'adopter ce point de vue pour une équation (\mathcal{C}), on commence, ce qui est aisé, par former (§ I) la fonction de Riemann dans le triangle PAB et, ce faisant, on met en évidence les solutions singulières source (—) et doublet (—) susceptibles de rendre les mêmes services que dans le cas de l'équation (T). Le prolongement de cette solution $\mathcal{R}(P, M)$ en tout point M du domaine elliptique est déjà plus délicat, mais surtout on peut se rendre compte sur un exemple, celui d'une équation — que nous appellerons (\mathcal{C}_1) — utilisée par certains auteurs [16] dans certaines questions d'aérodynamique, que le prolongement dans le domaine hyperbolique ne peut, en général, s'effectuer jusqu'aux caractéristiques réfléchies, car il apparaît des « singularités parasites ». Ainsi le rôle très simple joué par la fonction de Riemann dans le cas de l'équation (T) est un fait bien particulier qui ne se généralise pas à la classe des équations (\mathcal{C}). Autrement dit, la fonction de Riemann ne constitue pas une solution essentielle s'imposant par sa simplicité dans l'étude des équations du type mixte.

Ce résultat quelque peu négatif acquis, nous formons au paragraphe II, un premier ensemble de solutions élémentaires généralisant de façon très simple les solutions élémentaires de l'équation (T) sous la forme donnée par A. Weinstein [19], [20], qui faisait appel à des propriétés classiques sur les intégrales de produits de fonctions de Bessel d'ordre $\frac{1}{3}$. Si P est dans la région elliptique, ces solutions sont définies et régulières en tout point M distinct de P, où l'on étudie l'équation;

(³) Nous utilisons dans le précédent travail le qualificatif « fondamentales »; nous adoptons ici l'adjectif « élémentaires » conforme à la terminologie usuelle en France.

si P est dans la région hyperbolique, il en est de même si l'on exclut les caractéristiques issues de P et leurs réfléchies.

Ces solutions élémentaires sont insuffisantes pour certaines applications, car, paires en x , elles ne tiennent pas compte d'une orientation privilégiée dans la région hyperbolique; d'où la nécessité de construire ⁽¹⁾ et d'étudier (§ III) des solutions élémentaires « orientées ». Nous faisons cette étude en limitant le domaine de définition à une bande parallèle à l'axe des z , certaines conditions aux limites étant imposées à la frontière; ceci nous permet en même temps l'étude des réflexions des singularités dans des conditions assez variées.

Pour terminer cette introduction, ajoutons un mot sur la méthode suivie. Dans le cas de l'équation (T), nous avons utilisé les propriétés d'un groupe de transformations à trois paramètres qui permettait une étude assez géométrique des solutions. Dans le cas plus général des équations (C) seul subsiste le groupe des translations parallèles à l'axe des x . Aussi utiliserons-nous la transformation de Fourier qui transforme l'équation donnée en une équation différentielle. De façon précise, nous ferons appel à la théorie de la transformation de Fourier des distributions tempérées [14], [15]. Ceci présente l'avantage non seulement de faciliter les discussions sur la convergence, mais surtout de pouvoir considérer globalement comme « distributions solutions » certaines fonctions présentant des discontinuités ou des singularités à l'intérieur du domaine où elles sont définies.

Une partie de ce travail a été résumé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [5]; l'ensemble a fait l'objet d'une Communication orale au VIII^e Congrès de Mécanique à Istanbul (août 1952).

I. — La Fonction de Riemann de l'équation (C₁).

1. **Forme générale de la fonction de Riemann pour une équation (C).** — Étant donné l'équation :

$$(1) \quad \mathcal{L}(u) = k(z)u_{x,x} + u_{z,z} = 0,$$

$k(z)$ étant définie comme il a été précisé dans l'introduction, nous considérons le domaine PAB situé dans le demi-plan hyperbolique limité par les deux arcs de caractéristiques PA et PB et le segment AB de la ligne parabolique. Nous nous proposons de former la fonction ⁽²⁾ de Riemann $\mathcal{R}(M, P)$ du point P en un point M de ce domaine. Par définition, c'est la solution de (1) qui est égale ⁽³⁾

⁽¹⁾ Nous prenons connaissance à la fin de la rédaction de cet article d'un travail de J. D. Cole, consacré aux solutions élémentaires de l'équation de Tricomi dans lequel l'auteur insiste sur cette notion, sans toutefois envisager le cas où P est dans la région hyperbolique [2].

⁽²⁾ Pour l'existence d'une telle fonction, voir par exemple [7].

⁽³⁾ Au point P sa valeur est ainsi $2^{-1} |k(z_p)|^{-\frac{1}{2}}$; nous choisissons cette valeur au lieu de 1 pour compenser le facteur $4k$ qui apparaît quand on écrit le premier membre de (1) en coordonnées caractéristiques.

à $2^{-1} |k(z_M)|^{-\frac{1}{4}} |k(z_P)|^{-\frac{1}{4}}$ sur PA et PB. On sait alors que la formule de Green, appliquée dans PAB à une solution u de (1) et à $\mathcal{R}(M, P)$ s'écrit :

$$(2) \quad u(P) = \int_{AB} u(M) \mathcal{R}_z(M, P) dM - \int_{AB} u_z(M) \mathcal{R}(M, P) dM.$$

Cette formule résoud directement le problème de Cauchy lorsque les données sont portées par un segment de la ligne parabolique.

Nous utiliserons systématiquement la transformation de Fourier selon la définition de L. Schwartz, qui est l'extension aux distributions tempérées (et, en particulier, aux fonctions qui peuvent être considérées comme telles) de la transformation qui, pour un couple de fonctions $u(x)$, $U(\alpha)$, homologues, indéfiniment dérivables et à décroissance rapide ([15], p. 89) s'écrit :

$$(3) \quad \begin{cases} U(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-2i\pi\alpha x} dx = \mathcal{F}[u], \\ u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha) e^{2i\pi\alpha x} d\alpha = \mathcal{F}^{-1}[U]. \end{cases}$$

Cette transformation fait passer de (1) à l'équation différentielle

$$(4) \quad U_{zz} - 4\pi^2 \alpha^2 k(z) U = 0.$$

Nous noterons $S(\alpha, z)$ et $D(\alpha, z)$ les solutions de (4) satisfaisant aux conditions initiales :

$$(5) \quad \begin{cases} S(\alpha, 0) = 0, & D(\alpha, 0) = 1, \\ S_z(\alpha, 0) = 1, & D_z(\alpha, 0) = 0. \end{cases}$$

Ces fonctions sont régulières en z , dans l'intervalle (I) et entières en α (théorème de Poincaré [8], p. 20). Leur comportement asymptotique pour les grandes valeurs de α , qui est donné de façon précise au début du paragraphe II, et le théorème de Paley-Wiener ([15], p. 127) montrent que leurs originales de Fourier sont des fonctions solutions de (1) pour z négatif, identiquement nulles dans la région hyperbolique extérieure aux caractéristiques issues de l'origine.

Manifestement, l'expression :

$$\mathcal{F}^{-1}[A(\alpha) D(\alpha, z) + B(\alpha) S(\alpha, z)]$$

est une solution de (1) résolvant un problème de Cauchy dont les données sont portées par la ligne $z = 0$; c'est la somme de deux produits de composition et en vertu des propriétés de S et D signalées, la valeur de cette solution en un point P ne dépend que des valeurs de $\mathcal{F}^{-1}[A]$ et $\mathcal{F}^{-1}[B]$ sur le segment AB; conformément à une dénomination définie dans [6], nous dirons donc que $\mathcal{F}^{-1}[S]$ et $\mathcal{F}^{-1}[D]$ sont respectivement la source (—) et le doublet (—) du point O.

En supposant l'abscisse de P nulle, ce qui ne restreint pas la généralité, on voit en comparant ce résultat à (2) qu'en posant :

$$z_M = 0, \quad z_P = z_0,$$

on a, si M est intérieur à AB :

$$\mathcal{F}^{-1}[S(\alpha, z_0)] = -\mathcal{R}(M, P), \quad \mathcal{F}^{-1}[D(\alpha, z_0)] = \mathcal{R}_z(M, P),$$

les originales de $S(\alpha, z_0)$ et $D(\alpha, z_0)$ étant nulles en dehors de AB. Par suite, si

$$(6) \quad \mathcal{O}(z, z_0) = S(\alpha, z) D(\alpha, z_0) - S(\alpha, z_0) D(\alpha, z),$$

la fonction de Riemann à l'intérieur du triangle PAB peut être définie par :

$$\mathcal{R}(M, P) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{O}(z, z_0)].$$

De façon précise, si $z_0 \leq z \leq 0$, $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{O}(z, z_0)]$ est nulle dans la région extérieure au triangle PAB comme on peut le voir, soit en appliquant le théorème de Paley-Wiener à la fonction entière $\mathcal{O}(z, z_0)$ de α et en utilisant le comportement asymptotique de $\mathcal{O}(z, z_0)$ donné plus loin, soit en remarquant que

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{O}(z_0, z_0)] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{O}_z(z_0, z_0)]$$

sont identiquement nulles en dehors du point $x = 0$. Notons encore que

$$(7) \quad \mathcal{O}(z, z_0) = U_1(\alpha, z) U_2(\alpha, z_0) - U_1(\alpha, z_0) U_2(\alpha, z),$$

si $U_1(\alpha, z)$ et $U_2(\alpha, z)$ sont deux solutions de (4) dont le wronskien est égal à -1 .

Le résultat obtenu ne nous permet pas de voir si la fonction $\mathcal{R}(M, P)$ peut être prolongée à travers AB dans tout le demi-plan elliptique; on remarquera, en effet, que pour $z > 0$, $\mathcal{O}(z, z_0)$ n'est pas une distribution tempérée. Nous allons effectuer ce prolongement dans un cas particulier auquel nous consacrons le reste de ce paragraphe; nous pourrions étudier ainsi les singularités de cette fonction de Riemann en dehors du triangle PAB.

2. Prolongement de la fonction de Riemann de l'équation (\mathcal{C}_1) dans le domaine elliptique. — L'équation (\mathcal{C}_1) que nous allons étudier s'écrit :

$$(\mathcal{C}_1) \quad u_{zz} + (1 - e^{-2z}) u_{xv} = 0$$

et l'intervalle (I) est ainsi la droite réelle z .

Pour obtenir l'expression des solutions de l'équation (4) quand $k(z) = 1 - e^{-2z}$, il est indiqué de faire le changement de variable $t = e^{-z}$; (4) prend alors la forme :

$$(8) \quad t^2 U_{tt} + t U_t - 4\pi^2 x^2 (1 - t^2) U = 0$$

et les solutions de (8) sont des combinaisons des fonctions (7) de Bessel $J_{2\pi x}(2\pi \alpha t)$ et $J_{-2\pi x}(2\pi \alpha t)$. En posant

$$(9) \quad \beta = 2\pi \alpha, \quad J_\beta(\beta) = [(J_\beta(y))_r]_{y=\beta}$$

et en remarquant que

$$J_\beta(\beta) J_{-\beta}(\beta) - J'_\beta(\beta) J_{-\beta}(\beta) = -\frac{2 \sin \pi \beta}{\pi \beta},$$

(7) Pour les définitions et les propriétés des fonctions de Bessel, voir [18].

on voit d'après (7) que $\mathcal{O}(z, z_0)$ s'écrit ici :

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}(z, z_0) &= -\frac{\pi}{2 \sin \pi \beta} [J_\beta(\beta t) J_{-\beta}(\beta t_0) - J_{-\beta}(\beta t) J_\beta(\beta t_0)] \\ &= -\frac{i\pi}{4} [H_\beta^1(\beta t_0) H_\beta^3(\beta t) - H_\beta^3(\beta t_0) H_\beta^1(\beta t)], \end{aligned}$$

$H_\beta^1(\beta t)$ et $H_\beta^3(\beta t)$ étant les fonctions de Hankel.

Nous allons chercher le prolongement de $\mathcal{R}(M, P)$ dans le demi-plan elliptique par un procédé formel que nous interpréterons et justifierons par la suite. Soit $T(\alpha, z, z_0)$ la transformée de Fourier de cette fonction — si elle existe —; c'est en α une fonction paire et pour z réel positif, il convient de la chercher sous la forme :

$$(11) \quad T(\alpha, z, z_0) = J_\beta(\beta t) [\mathcal{A}(\beta) H_\beta^1(\beta t_0) + \mathcal{B}(\beta) H_\beta^3(\beta t_0)];$$

en effet, considérée en t , T est une solution de (8) qui doit être proportionnelle à $J_\beta(\beta t)$, sinon T ne serait pas une distribution tempérée régulière quand z augmente indéfiniment (*), et considérée en t_0 elle doit être également solution de (8), car il est raisonnable de penser que cette propriété acquise lorsque z est négatif, est encore vérifiée quand z est positif. Pour déterminer $\mathcal{A}(\beta)$ et $\mathcal{B}(\beta)$, nous devons écrire que si

$$\mathcal{V}(\alpha, z, z_0) = T(\alpha, z, z_0) - \mathcal{O}(z, z_0),$$

les expressions $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{V}(\alpha, 0, z_0)]$ et $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{V}_z(\alpha, 0, z_0)]$ définies sur l'axe des x , sont nulles sur le segment AB, ou ce qui revient au même, que :

$$(12) \quad \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{V}(\alpha, z, z_0)] = 0$$

dans le triangle PAB.

Or, on sait (voir, par exemple, [13]) qu'une fonction $\varphi(x)$ de la variable réelle x , de carré sommable, est nulle pour $x + l > 0$ si, et seulement si $\mathcal{F}[\varphi(x)]$ est une fonction de carré sommable de la variable réelle α , prolongeable dans le demi-plan supérieur de la variable complexe α en une fonction holomorphe, et ayant dans ce demi-plan un comportement asymptotique en $e^{2i\pi l x}$. On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(\alpha)$ de la variable réelle α , de carré sommable en α ait une transformée de Fourier nulle dans l'intervalle $-l < x < l$ est que $f(\alpha)$ soit « décomposable » en deux fonctions $g(\alpha)$ et $h(\alpha)$ de carré sommable :

$$f(\alpha) = g(\alpha) + h(\alpha),$$

$g(\alpha)$ étant prolongeable en une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur de la variable complexe α et y ayant un comportement en $e^{2i\pi l x}$, $h(\alpha)$ étant prolongeable dans le demi-plan inférieur en une fonction holomorphe ayant un

(*) Quand β augmente indéfiniment par valeurs positives, $J_\beta(\beta t)$ décroît comme une exponentielle à exposant négatif, alors que $J_{-\beta}(\beta t)$ croît comme une exponentielle à exposant positif; $J_\beta(\beta t)$ tend également vers zéro quand β étant fixe, z augmente indéfiniment.

comportement en $e^{-2i\pi t x}$. En supposant ce résultat généralisé ⁽⁹⁾ aux distributions tempérées et en écrivant :

$$\mathfrak{C} = \mathcal{C}(\beta) H_{\beta}^1(\beta t_0) + \mathcal{S}(\beta) H_{\beta}^2(\beta t_0),$$

on voit que (12) est réalisé si et seulement si :

$$(13) \quad \mathcal{C}(\beta e^{i\pi}) + \mathcal{S}(\beta) = 0,$$

en raison des propriétés classiques ⁽¹⁰⁾ :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{\beta e^{i\pi}}^1(\beta e^{i\pi} t_0) = -H_{\beta}^2(\beta t_0), \quad H_{\beta e^{-i\pi}}^2(\beta e^{-i\pi} t_0) = -H_{\beta}^1(\beta t_0), \\ H_{\beta}^1(\beta t_0) \sim \left(\frac{2}{\pi\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i\beta t_0 - i\frac{\pi}{4}}}{|k|^{\frac{1}{4}}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \text{Arg } \beta < \pi, \\ y_0 = \text{tg } \gamma - \gamma, \quad t_0 = \frac{1}{\cos \gamma}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

compte tenu de (10) et (11), la relation (13) conduit à l'identité en t et β ⁽¹¹⁾ :

$$J_{\beta}(\beta t) \left[\mathcal{B}(\beta) + \frac{\pi}{4} \cotg \pi \beta \right] + e^{-i\pi\beta} J_{-\beta}(\beta t) \left[\mathcal{A}(\beta e^{i\pi}) - \frac{\pi}{2} \cotg \pi \beta \right] = 0,$$

qui ne peut être satisfaite que si :

$$(15) \quad \mathcal{A}(\beta) = \mathcal{B}(\beta) = -\frac{\pi}{2} \cotg \pi \beta.$$

Le résultat obtenu ne pourrait être considéré comme valable que si l'expression trouvée pour $T(\alpha, z, z_0)$ pouvait être interprétée comme une distribution tempérée de la variable α . Mais cette expression devient infinie pour toutes les valeurs entières de α et à l'origine T a une singularité plus complexe. Pour considérer T comme une distribution, il faut résoudre un problème de division — qui, on le sait, [14] p. 121 est susceptible de plusieurs solutions — préciser le résultat de cette division en choisissant la détermination voulue, et montrer que ce résultat est une distribution tempérée. Il revient au même de donner directement une interprétation du résultat trouvé plus haut en faisant appel à des intégrales prises dans le plan complexe α et de vérifier que l'expression ainsi trouvée pour $\mathcal{R}(M, P)$ répond bien à toutes les conditions du problème.

De façon précise, nous définirons cette fonction par l'égalité :

$$(16) \quad \mathcal{R}(M, P) = -\frac{1}{2} \int_{c_1+d_1} \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) H_{\beta}^1(\beta t_0) \cos \beta x \\ - \frac{1}{2} \int_{c_1+d_2} \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) H_{\beta}^2(\beta t_0) \cos \beta x d\beta,$$

⁽⁹⁾ Cette généralisation doit être obtenue de façon analogue à celle du théorème de Paley-Wiener donnée par Schwartz. Elle ne semble pas avoir été formulée explicitement jusqu'à présent. Nous n'avons pas besoin de faire appel à ce résultat, puisque nous ne faisons ici qu'un raisonnement formel.

⁽¹⁰⁾ Ce sont ces propriétés qui conduisent à introduire les fonctions de Hankel dans cette question.

⁽¹¹⁾ Pour écrire cette relation, on utilise des propriétés classiques telles que :

$$J_{\beta e^{i\pi}}(\beta e^{i\pi} t) = e^{-i\pi\beta} J_{-\beta}(\beta t).$$

c_1 , d_1 et c_2 , d_2 étant les chemins symétriques par rapport à l'axe réel du plan α représentés sur la figure 1. Séparément, les deux intégrales figurant dans (16) sont divergentes ⁽¹²⁾ en raison du comportement des quantités à intégrer au voisinage de l'origine; cependant, leur somme peut être définie comme la limite de la somme des intégrales, obtenues en supprimant des chemins d_1 et d_2 un segment de longueur ε d'origine O, quand ε tend vers zéro; c'est ce sens que nous donnerons à (16).

Lorsque M est dans le demi-plan elliptique, la convergence des intégrales prises le long de c_1 et c_2 est assurée par la présence du facteur $J_2(\beta t)$ qui décroît en module comme une exponentielle à exposant négatif. D'autre part, lorsque M est dans le triangle PAB, ces intégrales restent convergentes (mais non absolument) et la quantité à intégrer le long de c_1 (resp. de c_2) tend uniformément vers zéro comme $e^{i\beta(x-|x|-y)}$ [resp. $e^{-i\beta(x-|x|-y)}$] dans le demi-plan supérieur $\delta \leq \text{Arg } \alpha \leq \pi - \delta$ (resp. dans le demi-plan inférieur $-\pi + \delta \leq \text{Arg } \alpha \leq \delta$); c'est cette propriété que nous avons voulu réaliser en choisissant l'interprétation (16).

Pour justifier définitivement la formule (16), il suffit de vérifier que dans le triangle PAB on a

$$(17) \quad \mathcal{R}(M, P) - \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{O}(z, z_0)] = 0,$$

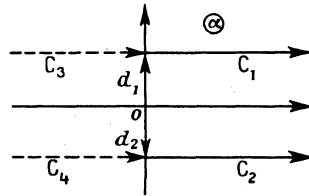


Fig. 1.

et, à cet effet, il est indiqué d'écrire l'originale de $\mathcal{O}(z, z_0)$ sous la forme :

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{O}(z, z_0)] = -\frac{i}{4} \int_{c_1+d_1} H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t_0) H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t) \cos \beta x d\beta + \frac{i}{4} \int_{c_2+d_2} H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t_0) H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t) \cos \beta x d\beta.$$

Quand on écrit (17), on vérifie que les quantités à intégrer le long de d_1 et d_2 prennent des valeurs égales en deux points symétriques ⁽¹³⁾ par rapport à l'origine; une propriété analogue permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{c_1} e^{-i\beta x} H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t_0) [i H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t) - 2 \cotg \pi \beta J_{\frac{1}{2}}(\beta t)] d\beta \\ &= - \int_{c_1} e^{i\beta x} H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t_0) [i H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t) + 2 \cotg \pi \beta J_{\frac{1}{2}}(\beta t)] d\beta, \\ & - \int_{c_2} e^{-i\beta x} H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t_0) [i H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t) + 2 \cotg \pi \beta J_{\frac{1}{2}}(\beta t)] d\beta \\ &= \int_{c_2} e^{i\beta x} H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t_0) [i H_{\frac{1}{2}}^2(\beta t) - 2 \cotg \pi \beta J_{\frac{1}{2}}(\beta t)] d\beta, \end{aligned}$$

⁽¹²⁾ Les quantités à intégrer dans (16) se comportent à l'origine, respectivement comme :

$$-(\pi \beta)^{-1} \left(\frac{i}{\pi} \text{Log } \beta + \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad -(\pi \beta)^{-1} \left(-\frac{i}{\pi} \text{Log } \beta + \frac{1}{2} \right).$$

⁽¹³⁾ Utiliser les premières formules (14) et celles signalées dans la note ⁽¹¹⁾.

et, par suite, (17) se réduit à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{c_1+c_2} e^{i\beta x} H_{\beta}^2(\beta t_0) [i H_{\beta}^2(\beta t) - 2 \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t)] d\beta \\ & - \frac{1}{4} \int_{c_1+c_2} e^{-i\beta x} H_{\beta}^2(\beta t_0) [i H_{\beta}^2(\beta t) + 2 \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t)] d\beta = 0; \end{aligned}$$

or, chacune de ces intégrales est nulle en vertu des comportements asymptotiques des quantités à intégrer lorsque M est dans PAB ($\gamma - \gamma_0 < x < \gamma_0 - \gamma$). Ce calcul est évidemment à rapprocher de celui fait pour obtenir (15).

3. Prolongement de la fonction de Riemann de (\mathcal{C}_1) dans le demi-plan hyperbolique. — Nous allons maintenant chercher le prolongement de $\mathcal{R}(M, P)$ lorsque P restant toujours fixe, M traverse l'axe $z = 0$ en dehors du segment AB . La fonction étant paire en x , il n'y a aucun inconvénient à supposer dans la suite

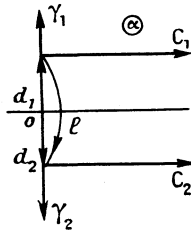


Fig. 2.

$x > 0$. Lorsque M est dans le demi-plan elliptique, on peut, en appliquant le théorème des résidus, écrire (16) sous la forme :

$$\begin{aligned} (18) \quad \mathcal{R}(M, P) = & -\frac{1}{2} \int_{d_1} \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) H_{\beta}^2(\beta t_0) \cos \beta x d\beta - \frac{1}{2} \int_{d_1} \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) H_{\beta}^2(\beta t_0) \cos \beta x d\beta \\ & - \frac{1}{2} \int_{c_1} e^{i\beta x} \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) J_{\beta}(\beta t_0) d\beta - \frac{1}{2} \int_{c_2} e^{-i\beta x} \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) J_{\beta}(\beta t_0) d\beta \\ & + \frac{1}{4} \int_l \cotg \pi \beta J_{\beta}(\beta t) [H_{\beta}^2(\beta t_0) e^{i\beta x} - H_{\beta}^2(\beta t_0) e^{-i\beta x}] d\beta \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n>0} J_n(nt) [H_n^1(nt_0) e^{-inx} - H_n^2(nt_0) e^{inx}], \end{aligned}$$

l étant un chemin joignant, comme l'indique la figure 2, l'origine de c_1 à l'origine de c_2 , situé dans le demi-plan $R(\alpha) > 0$ et laissant tous les pôles à droite. Les intégrales le long de d_1 , d_2 et l sont toujours convergentes; les intégrales prises le long de c_1 et c_2 sont toujours convergentes si $x - \gamma_0 - \gamma$ est positif et l'on peut en vertu des comportements asymptotiques des fonctions à intégrer les reporter, dans ce cas, sur les chemins γ_1 et γ_2 indiqués sur la figure. Les singularités de $\mathcal{R}(M, P)$ dans la région $x - \gamma_0 - \gamma > 0$ sont donc celles de la série. L'étude de ces singularités se fait aisément ⁽¹⁴⁾; celles-ci sont de deux sortes : d'une part,

⁽¹⁴⁾ De façon analogue à un raisonnement que nous explicitons au n° 10 du paragraphe III, on

des discontinuités égales à $|k(z)|^{-\frac{1}{4}}|k(z_0)|^{-\frac{1}{4}}$ quand on traverse de gauche à droites les caractéristiques

$$x = y_0 - y + 2h\pi \quad (h = 1, 2, \dots, n, \dots);$$

d'autre part, des singularités logarithmiques, $-\pi^{-1}|kk_0|^{-\frac{1}{4}}\text{Log}|\varepsilon|$ le long des caractéristiques

$$x = y_0 + y + 2h\pi \quad (h = 1, 2, \dots).$$

Au voisinage de $x = y_0 + y$, la série devient infinie comme $-\pi^{-1}|kk_0|^{-\frac{1}{4}}\text{Log}|\varepsilon|$, mais il faut y ajouter le comportement singulier des intégrales portés par γ_1 et γ_2 . L'exposant de l'exponentielle qui représente leur comportement asymptotique pour $|\alpha|$ grand s'annule, en effet, dans ce cas ⁽¹⁵⁾. On trouve au total, pour ces

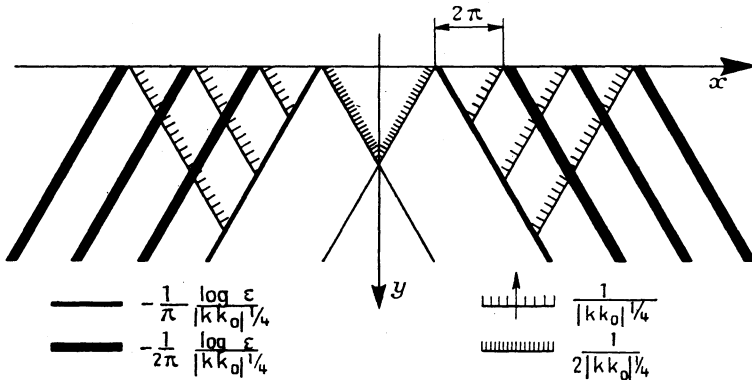


Fig. 3.

intégrales, un comportement en $(2\pi)^{-1}|kk_0|^{-\frac{1}{4}}\text{Log}|\varepsilon|$. La fonction de Riemann devient donc infinie au voisinage $x > y_0 + y$ de $x = y_0 + y$ comme

$$-(2\pi)^{-1}|kk_0|^{-\frac{1}{4}}\text{Log}|\varepsilon|.$$

peut montrer, en tenant compte du comportement asymptotique de ses termes, que cette série se comporte comme la série

$$(2\pi)^{-1}|kk_0|^{-\frac{1}{4}} \sum_1^{\infty} [n^{-1} \cos n(y + y_0 - x) + n^{-1} \sin n(y - y_0 + x)]$$

comportement que l'on étudie à partir de la relation

$$\sum_1^{\infty} n^{-1} \xi^n = -\text{Log}(1 - \xi).$$

vraie pour $|\xi| \leq 1$, $\xi \neq 1$.

⁽¹⁵⁾ Au total, on trouve que ces intégrales se comportent comme

$$-\int_c^{\infty} (2\pi)^{-1}|kk_0|^{-\frac{1}{4}} \beta^{-1} e^{\beta(y+y_0-x)} d\beta \quad (c = \text{const.} > 0)$$

qui a bien la singularité indiquée.

C'est le même comportement que celui de la fonction de Riemann de l'équation de Tricomi (fig. 3).

4. Remarques sur ce résultat. — Nous voyons ainsi apparaître dans ce prolongement de la fonction de Riemann des « singularités parasites » le long des caractéristiques issues des points $x = \pm (\gamma_0 + 2h\pi)$, h entier positif, singularités parasites que nous n'avons pas rencontrées dans le cas de l'équation de Tricomi.

Nous remarquerons encore que la fonction de Riemann de l'équation (\mathcal{C}_1) ne jouit pas de la propriété de symétrie : prenons, en effet, un point M situé sur une caractéristique $x = \gamma_0 + m\pi$, m différent d'un entier pair. Si M décrit cette caractéristique, $\mathcal{R}(M, P)$ est une fonction présentant un certain nombre de discontinuités, alors que dans les mêmes conditions $\mathcal{R}(P, M)$ est une fonction continue de M . On pourrait encore faire traverser au point PV l'axe des x et constater alors que la fonction $\mathcal{R}(M, P)$ ainsi définie a non seulement une singularité en P (comme on doit s'y attendre), mais encore en tous les points déduits de P par des translations d'amplitude $2h\pi$, h entier quelconque.

Tout ceci révèle pour la fonction de Riemann de (\mathcal{C}_1) un comportement assez complexe et suffit pour que l'on puisse affirmer que *les singularités de la fonction de Riemann dépendent essentiellement de la fonction $k(z)$* .

Pour terminer, faisons le lien entre le résultat trouvé et celui que l'on obtient dans le cas de l'équation de Tricomi. Si l'on désigne par $\mathcal{R}_1(x, z; 0, z_0)$ la fonction de Riemann de l'équation (\mathcal{C}_1) et par $\mathcal{R}(x, z; 0, z_0)$ celle de l'équation (\mathcal{C}), où

$$k(z) = \frac{\lambda^2}{\mu^2} (1 - e^{-2\lambda z}),$$

on voit immédiatement que

$$\mathcal{R}(x, z; 0, z_0) = \frac{\mu}{\lambda} \mathcal{R}_1(\mu x, \lambda z; 0, z_0).$$

On en déduit, en particulier, que les singularités parasites se reproduisent avec une période $2\pi\mu^{-1}$.

En particulier, si l'on pose $2\lambda^2 = \mu^2$ et si l'on fait tendre μ vers zéro, l'équation (\mathcal{C}) se réduit ⁽¹⁶⁾ à celle de Tricomi [$k(z) = z$]. Les singularités parasites disparaissent et la valeur de $\mathcal{R}(x, z; 0, z_0)$ est celle de la fonction de Riemann ⁽¹⁷⁾ de l'équation de Tricomi [6].

II. — Premières solutions élémentaires.

5. Généralités. — Nous nous proposons de définir des solutions élémentaires de l'équation (1). Une solution élémentaire d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles est une solution qui présente une singularité particulière

⁽¹⁶⁾ Il y a là un fait général qui correspond à ce que l'on appelle en Aérodynamique la similitude transsonique.

⁽¹⁷⁾ Il suffit d'appliquer les formules données dans [18], chap. VIII, n° 8.43.

déterminée par le type de l'équation : par exemple, pour une équation elliptique, c'est la singularité ponctuelle logarithmique.

En utilisant la théorie des distributions ([14] et [15]), on peut donner une définition plus précise et plus étendue de la notion de solution élémentaire ([14], p. 133). Pour (1), cette définition est la suivante : relativement à un point $P(x_0, z_0)$, c'est une solution de l'équation :

$$(19) \quad \mathcal{L}(u) = \delta_{(x_0, z_0)}.$$

$\delta_{(x_0, z_0)}$ étant la mesure de Dirac ([14], p. 19), dans le plan (x, z) , au point (x_0, z_0) . C'est donc une distribution. Pourtant, les solutions élémentaires que nous allons définir pourront être identifiées complètement à des fonctions régulières (différentiables jusqu'au second ordre, par exemple), partout dans le plan (x, z) , sauf au point (x_0, z_0) et, dans le cas hyperbolique, sauf sur les caractéristiques passant par ce point (dans ce cas, en effet, la singularité se propage le long de ces courbes).

Comme nous l'avons déjà fait, nous supposons, sauf mention contraire, que $x_0 = 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Nous effectuerons cette recherche de solutions élémentaires en utilisant la transformation de Fourier, définie plus haut (3). En partant de la définition de la solution élémentaire précisée à l'aide des distributions, on est amené à rechercher la transformée de Fourier de (19). Son premier membre devient égal au premier membre de (4). Calculons la transformée de $\delta_{(x_0, z_0)}$ ([15], p. 109). Désignons par $v(\alpha, z)$ une fonction indéfiniment dérivable et décroissant à l'infini plus rapidement que toute puissance positive V de $(\alpha^2 + z^2)^{-1}$ ainsi que ses dérivées. On a les relations :

$$\mathcal{F}[\delta_{(0, z_0)}] v(\alpha, z) = \delta_{(0, z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\alpha x} v(\alpha, z) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\alpha, z_0) d\alpha = \Delta_{\alpha, z_0} v(\alpha, z);$$

Δ_{α, z_0} est égale, dans le plan (α, z) , à la mesure engendrée par la masse 1 portée en chaque point de l'axe $z = z_0$. Sur toute droite $\alpha = \text{const.}$, elle est égale à la mesure de Dirac $\delta_{(z_0)}$ du point $z = z_0$ dans l'espace (z) . En considérant α comme un paramètre, la transformée de (19) s'écrit donc :

$$(20) \quad U_{zz} - 4\pi^2 \alpha^2 k(\alpha) U = \delta_{(z_0)}.$$

Les hypothèses à faire sur $k(\alpha)$, nécessaires pour la définition du produit dans le cas d'une distribution U générale, tombent ici du fait que les distributions U envisagées seront, comme nous l'avons dit plus haut, d'un type bien particulier.

Nous avons donc à trouver maintenant une solution de (20), c'est-à-dire une solution élémentaire de (4); c'est un problème classique, bien résolu ([3] p. 306; [14], p. 135). Si $\mathcal{H}_1(\alpha, z)$ et $\mathcal{H}_2(\alpha, z)$ désignent deux solutions indépendantes de l'équation (4), dont le wronskien est égal à -1 ,

$$(21) \quad \mathcal{H}_{1z}(\alpha, z) \mathcal{H}_2(\alpha, z) - \mathcal{H}_1(\alpha, z) \mathcal{H}_{2z}(\alpha, z) = 1,$$

la distribution identique à la fonction :

$$(22) \quad E(z, z; z_0) = \begin{cases} \mathcal{K}_1(z, z) \mathcal{K}_2(z, z_0), & (z \geq z_0), \\ \mathcal{K}_1(z, z_0) \mathcal{K}_2(z, z), & (z \leq z_0) \end{cases}$$

est solution de (20), donc solution élémentaire de (4).

Pour pouvoir former l'originale de E, il faut choisir \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 de façon que E soit une distribution tempérée. Ceci nous conduit à préciser le comportement asymptotique des solutions de (4).

6. Comportement asymptotique des solutions de (4). — Dans ce paragraphe, nous supposons, pour fixer les idées que (I) est l'intervalle infini $(-\zeta, +\infty)$, $\zeta > 0$ ⁽¹⁸⁾.

Considérons d'abord les fonctions $S(\alpha, z)$ et $D(\alpha, z)$ définies plus haut (5). Leur comportement asymptotique ⁽¹⁹⁾ pour $|\alpha|$ grand est donné par [10] :

$$(23) \quad \begin{cases} S \sim -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}} \Psi'(0) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(2\pi\alpha y - \frac{5\pi}{12}\right)}{(2\pi\alpha)^{\frac{5}{6}} |k|^{\frac{1}{2}}} & z < 0, \\ D \sim \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\Psi'(0)} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(2\pi\alpha y - \frac{\pi}{12}\right)}{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{6}} |k|^{\frac{1}{4}}} & \end{cases} \begin{cases} dy = -|k|^{\frac{1}{2}} dz, \\ y(0) = 0, \\ |\text{Arg } \alpha| \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

avec

$$\Psi(z) = \frac{\int_0^z \sqrt{-k} dz}{|k|^{\frac{1}{4}}}, \quad z < 0$$

et par

$$(24) \quad \begin{cases} S \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}} \Psi'(0) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{2\pi\alpha s}{6}} + e^{-\frac{2\pi\alpha s}{6} + \frac{5i\pi}{6}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{5}{6}} k^{\frac{1}{4}}} & z > 0, \\ D \sim \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\Psi'(0)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{\frac{2\pi\alpha s}{6}} + e^{-\frac{2\pi\alpha s}{6} + \frac{i\pi}{6}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{6}} k^{\frac{1}{4}}} & \end{cases} \begin{cases} ds = k^{\frac{1}{2}} dz, \\ s(0) = 0, \\ 0 \leq \text{Arg } \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

Comme S et D sont des fonctions uniformes de α et satisfont à des propriétés de symétrie par rapport aux axes réels et imaginaires du plan α , les formules (24) et (25) sont suffisantes pour indiquer leur comportement asymptotique dans tous les cas.

⁽¹⁸⁾ C'est, en général, le cas en Aérodynamique; nous nous libérerons de cette restriction au paragraphe III.

⁽¹⁹⁾ L'écriture $f(\alpha, z) \sim G(\alpha, z)$ indique que

$$f(\alpha, z) = G(\alpha, z) \left(1 + \frac{\varepsilon(\alpha, z)}{\alpha^2}\right) \quad (\rho > 0),$$

$\varepsilon(\alpha, z)$ étant uniformément borné pour $|\alpha|$ grand.

D'autre part, on peut montrer qu'il existe une solution $\mathcal{J}_1(\alpha, z)$, régulière pour α réel ≥ 0 , dont le comportement asymptotique pour α très grand est :

$$(25.1) \quad \mathcal{J}_1(\alpha, z) \sim \frac{e^{-2\pi\alpha z}}{2^{\frac{1}{2}}(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}}}, \quad (z > 0).$$

En écrivant :

$$(26) \quad \mathcal{J}_1(\alpha, z) = r(\alpha)[\cos\theta(\alpha)S + \sin\theta(\alpha)D],$$

on voit que les comportements asymptotiques de $r(\alpha)\cos\theta(\alpha)$ et $r(\alpha)\sin\theta(\alpha)$ pour α grand sont :

$$(27) \quad \begin{cases} r(\alpha)\cos\theta(\alpha) \sim -\frac{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Psi(0)3^{\frac{1}{2}}}, \\ r(\alpha)\sin\theta(\alpha) \sim \frac{\Psi(0)\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}. \end{cases}$$

On a ainsi :

$$(25.2) \quad \mathcal{J}_1(\alpha, 0) \sim \frac{\Psi(0)\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$(25.3) \quad \mathcal{J}_1(\alpha, z) \sim \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{4}}} \sin\left(2\pi\alpha z + \frac{\pi}{4}\right), \quad (z < 0).$$

Considérons ensuite la solution :

$$(28) \quad \mathcal{J}_2(\alpha, z) = \frac{1}{r(\alpha)}[-\sin\theta(\alpha)S + \cos\theta(\alpha)D].$$

On a évidemment

$$\mathcal{J}_{1z}(\alpha, z)\mathcal{J}_2(\alpha, z) - \mathcal{J}_{2z}(\alpha, z)\mathcal{J}_1(\alpha, z) = 1$$

et en tenant compte de (27), on peut écrire les comportements asymptotiques de $\mathcal{J}_2(\alpha, z)$:

$$(29.1) \quad \mathcal{J}_2(\alpha, z) \sim -\frac{e^{2\pi\alpha z}}{2^{\frac{1}{2}}(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}}}, \quad (z > 0),$$

$$(29.2) \quad \mathcal{J}_2(\alpha, 0) \sim -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Psi(0)3^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}2^{\frac{2}{3}}(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(29.3) \quad \mathcal{J}_2(\alpha, z) \sim -\frac{2^{\frac{1}{2}}\cos\left(2\pi\alpha z - \frac{\pi}{12}\right)}{(2\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}|k|^{\frac{1}{4}}}, \quad (z < 0).$$

7. Solutions élémentaires de (1) et leurs propriétés. — Nous allons maintenant choisir \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 de façon que (22) soit la transformée de Fourier d'une fonction, ce qui nous permettra de définir une solution élémentaire de (1) comme l'originale de Fourier de (22). Il suffit pour cela que le produit $\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2$ soit régulier pour α

fini et que \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 aient un comportement pour α réel infini tel que E soit une distribution tempérée de la variable α .

On peut alors prendre :

$$(30) \quad \mathcal{K}_1(\alpha, z) = \mathcal{J}_1(|\alpha|, z), \quad \mathcal{K}_2(\alpha, z) = \mathcal{J}_2(|\alpha|, z) + \lambda(|\alpha|) \mathcal{J}_1(|\alpha|, z);$$

$\lambda(\alpha)$ représente une fonction définie pour α réel positif, dont le comportement pour α grand est proportionnel à α^m .

Pour voir que E a bien une originale de Fourier quand on fait le choix (30), et pour étudier les principales propriétés de cette solution élémentaire e , il faut se placer successivement dans les trois cas : $z_0 > 0$, $z_0 < 0$, $z_0 = 0$.

Premier cas : $z_0 > 0$. — L'intégrale :

$$(31) \quad e(x, z; 0, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\alpha, z; z_0) e^{2i\pi\alpha x} d\alpha$$

est partout convergente dans le demi-plan $z > -\zeta$, sauf au point $(0, z_0)$, au voisinage duquel elle devient singulière comme :

$$(4\pi)^{-1} (k k_0)^{-\frac{1}{2}} \text{Log}[(s - s_0)^2 + x^2],$$

ainsi que le montre un calcul facile.

C'est la singularité classique de la solution élémentaire, dans le cas elliptique.

Sans effectuer ce calcul, on peut d'ailleurs remarquer que la différence des valeurs de la solution élémentaire, pour $z = z_0 + 0$ et $z = z_0 - 0$, a pour image de Fourier 0; elle vaut donc zéro.

De même, la différence des valeurs de la dérivée par rapport à z , de la solution élémentaire, pour $z = z_0 + 0$ et $z = z_0 - 0$, a pour image de Fourier 1; elle a donc pour originale la mesure de Dirac $\delta_{(0)}$ et, par suite, vaut zéro, sauf au point $x = 0$; ceci montre bien que e se prolonge convenablement à travers $z = z_0$, pour $x = 0$.

Deuxième cas : $z_0 < 0$. — Supposons que, pour α grand, $\lambda(\alpha) = o(\alpha^m)$, m étant négatif ou nul. Dans le cas où m est positif, l'intégrale donnant la transformée de Fourier de $\lambda(\alpha) \mathcal{J}_1(|\alpha|, z) \mathcal{J}_2(|\alpha|, z)$ n'a plus de sens, mais cette transformée de Fourier est une distribution, solution que l'on peut interpréter comme la dérivée par rapport à x d'une solution continue.

L'intégrale (31) est partout convergente dans le demi-plan $z > -\zeta$, sauf au point $(0, z_0)$, sur les caractéristiques passant par ce point :

$$(32) \quad x = y_0 - y, \quad x = -y_0 + y,$$

et sur les caractéristiques réfléchies de celles-ci par l'axe $z = 0$

$$(33) \quad x = y_0 + y, \quad x = -y_0 - y.$$

Les singularités sur ces caractéristiques sont des discontinuités et des singularités logarithmiques proportionnelles respectivement à :

$$(34) \quad \frac{1}{|k(z)k(z_0)|^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{1}{|k(z)k(z_0)|^{\frac{1}{2}}} \text{Log} |\pm y \pm y_0 + x|.$$

Par exemple, pour $\lambda(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ces singularités sont représentées par la figure 4.

La discontinuité est proportionnelle à la valeur de la fonction de Riemann du point P sur les caractéristiques PQ et PR.

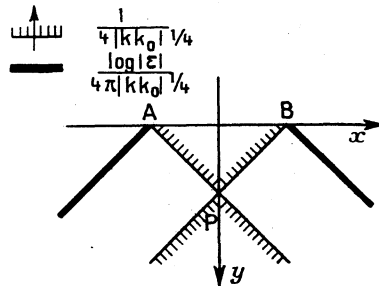


Fig. 4.

Troisième cas $z_0 = 0$. — Dans ce cas, les singularités de la fonction (31), solution élémentaire, relative à l'origine, se trouvent sur les caractéristiques passant par l'origine. Par exemple, dans le cas où $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (17) devient infini comme :

$$-\frac{1}{|x \pm y|^{\frac{1}{6}}} \frac{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{4 \pi^2 2^{\frac{1}{3}} |k|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } \pm x + y > 0,$$

$$-\frac{1}{|y \pm x|^{\frac{1}{6}}} \frac{3^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{4 \pi^2 2^{\frac{1}{3}} |k|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } y \pm x < 0.$$

Signalons enfin la propriété de symétrie de la solution élémentaire relative au point (x_0, z_0) qui, d'après ce que nous avons dit plus haut, s'écrit immédiatement

$$e(x, z; x_0, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\alpha(x-x_0)} E(\alpha, z; z_0) d\alpha.$$

On a, en effet, d'après la définition de E et sa parité en α :

$$(35) \quad e(x, z; x_0, z_0) = e(x_0, z_0; x, z).$$

On voit immédiatement la parenté des résultats ainsi trouvés avec ceux que nous avons obtenus pour l'équation de Tricomi (comparer avec la fonction H_0 de

[6], p. 28). En particulier, les discontinuités le long des caractéristiques issues de P sont proportionnelles à la valeur de la fonction de Riemann et, sur la caractéristique AP, cette discontinuité change de signe suivant la position de M par rapport à P. Le rapport entre la valeur de la discontinuité et le coefficient du logarithme réfléchi — ou dans le cas limite, $x_0 = 0$, entre les parties principales de e le long de $x = \pm \gamma$ du côté $|x| < \gamma$ et du côté $|x| > \gamma$ — est indépendant de la fonction $k(z)$.

8. Exemples. — Nous allons donner dans trois cas particuliers les fonctions $\mathcal{J}_1(\alpha, z)$ et $\mathcal{J}_2(\alpha, z)$. Dans le premier cas, des solutions élémentaires ont déjà été données. Les résultats relatifs au deuxième et au troisième cas sont nouveaux.

1° $k(z) = z$. — C'est le cas de l'équation étudiée pour la première fois par Tricomi. On trouve facilement que l'équation (4) correspondante admet comme solutions indépendantes :

$$\begin{aligned} s^{\frac{1}{3}} I_{\frac{1}{3}}(2\pi\alpha s), \quad s^{\frac{1}{3}} I_{-\frac{1}{3}}(2\pi\alpha s) \quad (z > 0), \\ \gamma^{\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}}(2\pi\alpha\gamma), \quad \gamma^{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}}(2\pi\alpha\gamma) \quad (z < 0), \end{aligned}$$

$I_{\pm\frac{1}{3}}$ et $J_{\pm\frac{1}{3}}$ désignant les fonctions de Bessel, suivant la notation usuelle. On peut alors prendre :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\alpha, z) &= 2^{\frac{1}{6}} 3^{-\frac{1}{6}} \pi^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{3}} K_{\frac{1}{3}}(2\pi\alpha s), \\ \mathcal{J}_2(\alpha, z) &= -2^{\frac{1}{6}} 3^{-\frac{1}{6}} \pi^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{3}} I_{\frac{1}{3}}(2\pi\alpha s). \end{aligned}$$

A. Weinstein [19] a donné la solution élémentaire de l'équation de Tricomi sous une forme équivalente.

2° $k(z) = 1 - e^{-2z}$. — S. Tomotika et K. Tamada [16] ont étudié et utilisé l'équation (1) correspondante, qui est l'équation (\mathcal{C}_1), comme approximation pour les écoulements transsoniques.

D'après ce que nous avons vu au n° 2, on peut alors prendre :

$$\mathcal{J}_1(\alpha, z) = \pi^{\frac{1}{2}} J_{2\pi\alpha}(2\pi\alpha t), \quad \mathcal{J}_2(\alpha, z) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} Y_{2\pi\alpha}(2\pi\alpha t).$$

$$3^\circ \quad k(z) = -\frac{(\gamma+1)\tau - (\gamma-1)}{(\gamma-1)(1-\tau)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}, \quad \text{avec } dz = -\frac{(1-\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{2\tau} d\tau, \quad \tau(0) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

L'équation (1) correspondante est satisfaite par la fonction de courant de l'écoulement d'un gaz parfait, à chaleurs spécifiques constantes [4]. Les comportements asymptotiques de la solution bien connue de l'équation (4) correspondante :

$$\begin{aligned} \psi_\beta(\tau) &= \tau^{\frac{\beta}{2}} F(\alpha_\beta, b_\beta, \beta+1, \tau), \quad (\beta = 2\pi\alpha), \\ \alpha_\beta + b_\beta &= \beta - \frac{1}{\gamma-1}, \quad \alpha_\beta \cdot b_\beta = -\frac{\beta(\beta+1)}{2(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

ont été étudiés par T. M. Cherry [1] et M. J. Lighthill [8] et l'on peut prendre :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\alpha, z) &= \frac{\tau^{\pi\alpha} e^{-\beta\sigma} F(a_\beta, b_\beta, \beta+1, \tau)}{2\pi^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathcal{J}_2(z, z) &= -\frac{e^{\beta\sigma}}{2\pi^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}} \left\{ \tau^{-\pi\alpha} F(a_{-\beta}, b_{-\beta}, 1-\beta, \tau) \right. \\ &\quad \left. - \left(\pi \cotg \pi\beta - \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2\pi}} \right) \frac{\Gamma(a_\beta)\Gamma(\beta+1-b_\beta)2^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{3}{2}}e^{\beta\sigma}}{\Gamma(a_\beta-\beta)\Gamma(1-b_\beta)[\Gamma(\beta+1)]^2} \mathcal{J}_1(\alpha, z) \right\}, \end{aligned}$$

avec

$$\sigma = -\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{argth} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \log 2(\gamma-1).$$

La présence d'un terme supplémentaire à $\psi_{-\beta}$ dans l'expression de \mathcal{J}_2 est due au fait que cette fonction admet des pôles pour β entier supérieur à 1. Nous avons utilisé ici la valeur des résidus de ces pôles, donnée par M. J. Lighthill [8], de même que leur comportement asymptotique. On vérifie ainsi que ce terme supplémentaire est bien de la forme $\lambda(\alpha) \mathcal{J}_1(\alpha_1 z)$, $\lambda(\alpha)$ satisfaisant aux hypothèses faites plus haut.

III. — Les solutions élémentaires orientées.

9. Principe. — Les solutions élémentaires définies plus haut présentent la particularité suivante : la différence de deux solutions n'est pas une *fonction régulière et bornée* lorsque le point P est dans la région $z < 0$. Cette différence, en effet, est une solution de (1) de la forme :

$$\mathcal{F}^{-1}[\mu(\alpha) \mathcal{K}_1(\alpha, z) \mathcal{K}_1(\alpha, z_0)],$$

et, si cette solution est régulière et bornée en z dans la région où est étudiée l'équation pour z_0 positif, elle peut présenter quand z_0 est négatif certaines singularités; par exemple, dans le cas où $\mu(\alpha)$ est une constante, ces singularités sont schématisées par la figure 5.

Nous avons déjà rencontré cette circonstance dans l'étude de l'équation de Tricomi [6]. *Si on n'impose pas des conditions supplémentaires, la solution élémentaire d'une équation du type mixte n'est pas caractérisée par un type unique de singularité.* Nous en avons également donné la raison; les problèmes hyperboliques — et très spécialement ceux posés par les problèmes de physique — introduisent une orientation privilégiée liée au sens de propagation des perturbations le long des courbes caractéristiques; il en est de même pour les problèmes relatifs à une équation du type mixte, la définition du problème de Tricomi [4], [6], par exemple, introduit immédiatement une distinction entre les deux familles de caractéristiques et, par conséquent, une telle orientation.

Or, les solutions élémentaires envisagées jusqu'ici sont paires en x ; elles sont donc indifférentes à toute propriété d'orientation. Par contre, nous allons voir

dans ce paragraphe que, si l'on impose à la solution la condition supplémentaire de n'admettre des singularités que dans l'un (et un seulement) des demi-plans $x \leq x_0$ ou $x \geq x_0$, les solutions élémentaires présentent un modèle unique de singularités au voisinage de P, même si le point P est dans la région hyperbolique.

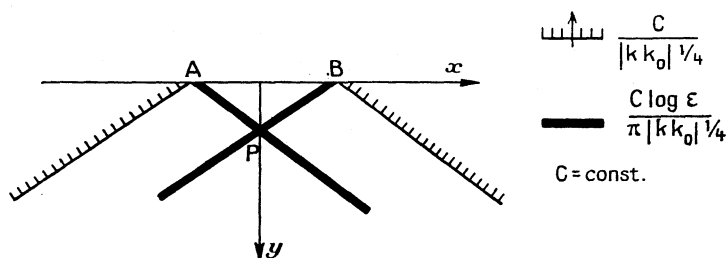


Fig. 5.

Il est aisé de former une solution élémentaire en P ($z_0 < 0$) respectant cette condition supplémentaire. Il suffit de généraliser un procédé déjà utilisé pour l'équation de Tricomi.

En effet, en choisissant $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut former la solution :

$$\mathcal{E}(M, P) = e(M, P) - \left| \frac{k(z_2)}{k(z_0)} \right|^{\frac{1}{4}} (e(M, P_1) - e(M, P_2)),$$

P_1 et P_2 étant les points d'ordonnées z_2 , $-\zeta < z_2 < z_0$, situés sur les caractéristiques de P, solution qui présente les singularités de la fonction de Green du problème de Tricomi [6] : au voisinage de P, ces singularités sont portées par les

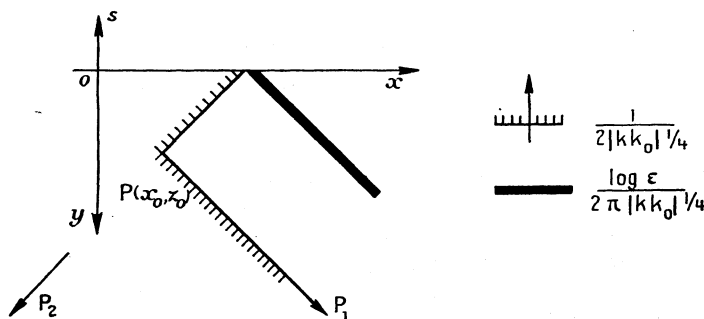


Fig. 6.

parties des courbes caractéristiques passant par P et leur réfléchies situées dans le demi-plan $x > x_0$ si $x_{p_1} > x_{p_2}$, comme l'indique la figure 6.

Mais ce résultat qui a l'intérêt de nous fournir de façon simple le modèle de la singularité lorsque P est dans la région hyperbolique ne nous donne pas une solu-

tion élémentaire qui puisse être définie de façon continue lorsque P varie dans le plan (x, z) en traversant l'axe des x . Une étude plus approfondie est donc nécessaire. Pour mieux saisir l'introduction de la condition d'orientation, nous allons former une solution élémentaire définie de façon unique dans la région elliptique, celle qui, définie dans la bande $z_2 \leq z_0 \leq z_1$ ($z_2 > 0$) s'annule sur les deux droites frontières $z = z_1$, $z = z_2$; cette fonction est la fonction de Green du problème de Dirichlet relatif à la bande. Nous examinerons ensuite le cas où z_2 devient négatif.

Il s'agit toujours de former une solution $E(\alpha, z)$ de l'équation (20), s'annulant pour $z = z_1$ et $z = z_2$ ($z_2 \leq z_0 \leq z_1$). On peut écrire l'expression de cette solution en utilisant la fonction entière de α introduite pour former la fonction de Riemann :

$$\mathcal{O}(z, Z) = S(z) D(Z) - D(z) S(Z).$$

Nous noterons l'identité :

$$\mathcal{O}(z, Z_2) \mathcal{O}_z(z, Z_1) - \mathcal{O}(z, Z_1) \mathcal{O}_z(z, Z_2) = \mathcal{O}(Z_1, Z_2)$$

que l'on vérifie en remarquant que le premier membre est indépendant de z comme étant le wronskien de deux solutions de (4) et en le calculant pour $z = 0$, grâce aux propriétés des fonctions $S(z)$ et $D(z)$ pour cette valeur de z . Ceci dit, il est clair que la solution $E(\alpha, z)$ cherchée s'écrit :

$$(36) \quad E(\alpha, z) = \begin{cases} E_1(\alpha, z) = \frac{\mathcal{O}(z_0, z_2) \mathcal{O}(z, z_1)}{\mathcal{O}(z_1, z_2)} & \text{si } z_0 \leq z \leq z_1, \\ E_2(\alpha, z) = \frac{\mathcal{O}(z_0, z_1) \mathcal{O}(z, z_2)}{\mathcal{O}(z_1, z_2)} & \text{si } z_2 \leq z \leq z_0 \end{cases}$$

et que cette solution est unique. Elle satisfait aux propriétés suivantes :

$$E(\alpha, z_1) = E(\alpha, z_2) = 0,$$

$$E'_1(\alpha, z_0) - E'_2(\alpha, z_0) = 1,$$

$$E(\alpha, z) = E(-\alpha, z).$$

Les fonctions E_1 et E_2 sont des fonctions méromorphes de la variable α dont il importe de connaître les pôles. Si α_0 est un pôle, c'est qu'il existe une solution de (4) s'annulant pour $z = z_1$ et $z = z_2$ pour $\alpha = \alpha_0$; autrement dit, α_0 est une valeur propre du problème consistant à définir une solution de (4) prenant des valeurs données pour $z = z_1$, $z = z_2$. En appliquant les résultats classiques relatifs à ce problème ([8], p. 498), on voit que tous les zéros de $\mathcal{O}(z_1, z_2)$ sont simples, et qu'ils forment une suite dénombrable de nombres purement réels si $z_2 < z_1 \leq 0$, purement imaginaires si $0 \leq z_2 < z_1$, et une double suite de nombres purement réels et purement imaginaires si $z_2 < 0 < z_1$. Enfin, nous aurons à étudier le comportement asymptotique de la solution $E(\alpha, z)$ pour les valeurs de α grandes en module; nous utiliserons à cet effet les formules suivantes donnant le comportement asymptotique de $\mathcal{O}(z, Z)$ dans les divers cas possibles, formules que l'on

obtient aisément à partir des propriétés asymptotiques de $S(\alpha, z)$ et $D(\alpha, z)$ signalées plus haut :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{O}(z, Z) \sim \frac{\operatorname{sh} 2\pi\alpha(s-S)}{2\pi\alpha |k(z)k(Z)|^{\frac{1}{2}}} & (z > 0, Z > 0), \\ \mathcal{O}(z, Z) \sim -\frac{\sin 2\pi\alpha(\gamma-Y)}{2\pi\alpha |k(z)k(Z)|^{\frac{1}{2}}} & (z < 0, Z < 0), \\ \mathcal{O}(z, Z) \sim -\frac{\cos 2\pi\alpha\gamma \operatorname{sh} 2\pi\alpha S + \operatorname{ch} 2\pi\alpha S \sin 2\pi\alpha\gamma}{\sqrt{2}\pi\alpha |k(z)k(Z)|^{\frac{1}{2}}} & (z < 0, Z > 0). \end{array} \right.$$

Ces formules sont valables quel que soit $\operatorname{Arg} \alpha$.

10. Examen des divers cas possibles. — *Premier cas* : $0 \leq z_2 \leq z_1$. — C'est le cas classique où le domaine ouvert étudié est dans la région elliptique.

La fonction $E(\alpha, z)$ est continue sur l'axe réel du plan α et l'intégrale :

$$(38) \quad e(x, z; 0, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\alpha, z) e^{2i\pi\alpha x} d\alpha,$$

définissant l'originale de E est convergente, sauf pour $z = z_0, x = 0$. On reconnaît que $e(x, z; 0, z_0)$ est la solution élémentaire cherchée. Cette fonction est paire en x .

Deuxième cas : $z_2 < 0 < z_1$. — Dès que z_2 est négatif, E a des pôles sur l'axe réel du plan α , et l'intégrale perd toute signification. Opérons en utilisant les propriétés de $E(\alpha, z)$ considérée comme fonction de la variable complexe α ; nous indiquerons plus loin comment ces mêmes résultats peuvent s'obtenir en interprétant E comme distribution de la variable réelle α .

Dans le premier cas qui a été envisagé, il n'y a aucune difficulté à écrire l'intégrale de la formule (38) sur une parallèle à l'axe réel $\mathcal{J}(\alpha) = c$ (nous appellerons L_1 ce chemin lorsque c est positif), et il est clair que la valeur de l'intégrale n'est pas changée si aucun pôle de E n'est situé dans la bande $0 < \mathcal{J}(\alpha) \leq c$. On peut d'ailleurs choisir c suffisamment petit pour qu'il en soit ainsi lorsque, z_1 restant fixe, z_2 varie dans un voisinage de zéro. Nous allons voir que la définition de $e(x, z; 0, z_0)$ en utilisant le chemin L_1 reste encore valable quand z_2 est négatif.

Si z_0 est positif, la fonction e est partout régulière et finie, sauf au point $z = z_0, x = 0$ où elle admet la singularité logarithmique. Si z_0 est négatif, on voit que ce résultat est encore valable pour z positif; mais le cas où z est négatif réclame un examen plus approfondi que nous allons faire en supposant $z_0 \leq z \leq 0$ (le cas où $z_2 \leq z \leq z_0$ s'étudie de la même façon; nous nous contenterons de signaler les résultats).

Des formules (37) on déduit que $E_1(\alpha, z)$ a pour développement asymptotique

$$(38 \text{ bis}) \quad E_1(\alpha, z) \sim + \frac{e^{2i\pi\alpha(y_0-y)}}{4i\pi\alpha |k(z_0)k(z)|^{\frac{1}{2}}}$$

dans la région $\varepsilon \leq \text{Arg } \alpha \leq -\varepsilon + \pi$, ($z > 0$), si l'on en exclut, pour les grandes valeurs de $|\alpha|$, une suite dénombrable de cercles, de rayon petit, centrés aux points

$$\beta_n = i \left(\frac{3}{8s_1} + \frac{n}{2s_1} \right);$$

chacun de ces points est, en effet, la limite pour $|\alpha|$ grand d'un zéro de $\mathcal{O}(z_1, z_2)$ et de $\mathcal{O}(z, z_1)$. D'autre part :

$$(39) \quad E_1(z, z) \sim \frac{\sin 2\pi\alpha(y_0 - y_2) \cos\left(2\pi\alpha y - \frac{\pi}{4}\right)}{2\pi\alpha |k(z)k(z_0)|^{\frac{1}{2}} \cos\left(2\pi\alpha y_2 - \frac{\pi}{4}\right)} = \tilde{E}_1,$$

dans la région

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \text{Arg } \alpha \leq +\frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0,$$

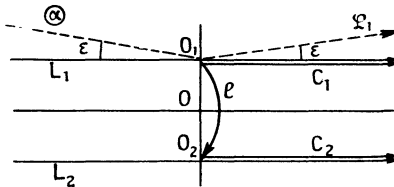


Fig. 7.

si l'on en exclut, pour les grandes valeurs de $|\alpha|$, une suite dénombrable de cercles de rayon petit, centrés aux points

$$\alpha_n = \left(\frac{3}{8y_2} + \frac{n}{2y_2} \right).$$

Il en résulte que la fonction $e(x, z; 0, z_0)$ est continue pour $x > y - y_0$. En effet, les intégrales le long de L_1 et L_2 sont égales en vertu de (39) — entre L_1 et L_2 le rapport des seconds membres de (38) et (39) est borné — et cette dernière intégrale est une fonction continue, d'après (38), car $y_0 - y + x$ est positif.

Pour étudier le comportement de $e(x, z; 0, z_0)$ au voisinage de $x = y - y_0$ et pour $x < y - y_0$, $z > z_0$, nous considérons les parties c_1 et c_2 de L_1 et L_2 ($J(\alpha) = -c$) situées dans le demi-plan $\mathcal{R}(\alpha) > 0$. Posons ⁽¹⁾

$$(40) \quad \begin{cases} \int_{c_1} E_1 e^{2i\pi x} dx + \int_{c_2} E_1 e^{-2i\pi x} dx = \{E_1\}, \\ \int_{c_1} E_1 e^{2i\pi x} dx + \int_{c_2} E_1 e^{-2i\pi x} dx = [E_1]. \end{cases}$$

D'après les propriétés de symétrie de E dans le plan z , on peut écrire :

$$(41) \quad e(x, z; 0, z_0) = \{E_1\}, \quad e(-x, z; 0, z_0) = [E_1].$$

⁽¹⁾ On définit de la même manière $\{\tilde{E}_1\}$, $[\tilde{E}_1]$ à partir de \tilde{E}_1 .

A cause de (39), la quantité $\{E_1 - \tilde{E}_1\}$ est une fonction continue dans toute la bande $z_1 > z > z_0$. Pour étudier le comportement de $\{\tilde{E}_1\}$, le théorème de Cauchy nous donne [l étant un chemin dans $\mathcal{R}(\alpha) > 0$ joignant O_1 à O_2 et laissant les pôles de \tilde{E}_1 , dans $\mathcal{R}(\alpha) > 0$, à sa gauche] :

$$\{\tilde{E}_1\} = [\tilde{E}_1] - 2i\pi \sum_{\substack{\mathcal{J}(\alpha)=0 \\ \mathcal{R}(\alpha)>0}} \text{résidus} (2i\tilde{E}_1 \sin 2\pi\alpha x) + \int_l 2i \sin 2\pi\alpha x \tilde{E}_1 d\alpha.$$

On voit ainsi que les singularités de $\{\tilde{E}_1\}$, donc celles de $e(x, z; 0, z_0)$ pour $x < 0$, $z > z_0$, sont celles de la série

$$(42) \quad 2 \sum_{\substack{\mathcal{J}(\alpha)=0 \\ \mathcal{R}(\alpha)>0}} \text{résidus} \left[\frac{\sin 2\pi\alpha(y_0 - y_2) \cos\left(2\pi\alpha y - \frac{\pi}{4}\right) \sin 2\pi\alpha x}{\alpha |k(z_0)|^{\frac{1}{4}} |k(z)|^{\frac{1}{4}} \cos\left(2\pi\alpha y_2 - \frac{\pi}{4}\right)} \right].$$

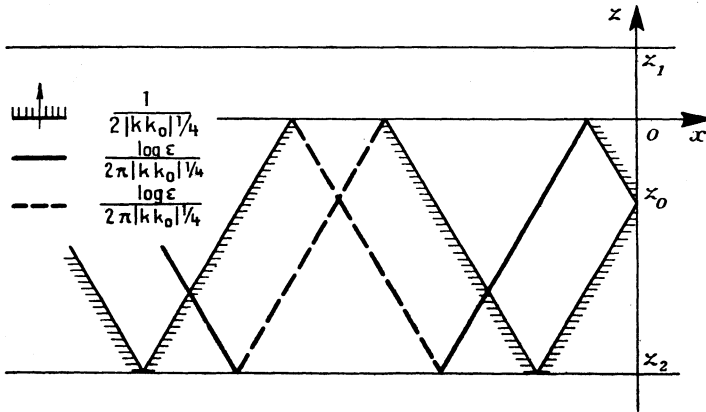


Fig. 8.

Ces singularités se calculent facilement de façon élémentaire ⁽²⁰⁾ et sont schématisées par la figure 8.

⁽²⁰⁾ Pour étudier les séries du type (42), on transforme le numérateur en somme de cosinus et de sinus et l'on utilise, pour chaque exponentielle, le fait que la fonction:

$$\sum_0^{\infty} \frac{\xi^k}{a+k} + \text{Log}(1-\xi), \quad a > 0,$$

ξ complexe $\neq 1$, $|\xi| \leq 1$, est continue; par exemple, on trouve ainsi que

$$\sum_{\substack{\mathcal{J}(\alpha)=0 \\ \mathcal{R}(\alpha)>0}} \text{résidus} \cos\left(2\pi\alpha X - \frac{\pi}{4}\right) \alpha^{-1} \cos^{-1}\left(2\pi\alpha Y - \frac{\pi}{4}\right)$$

se comporte comme :

$$-\frac{1}{\pi} \text{Log} |\epsilon| \cos \frac{3(N+1)\pi}{2} - (\text{signe } \epsilon) \frac{1}{2} \sin \frac{3(N+1)\pi}{2}$$

au voisinage de

$$X = (2N+1)Y + \epsilon Y.$$

Dans le cas particulier où $z_0 = 0$, les singularités de $\{\tilde{E}_2\}$, donc celles de $e(x, z; 0, z_0)$ dans la bande $z_2 < z < z_0$, sont celles de la série

$$- \sum_{\substack{\Re(\alpha)=0 \\ \Im(\alpha)>0}} \text{résidus} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{\frac{1}{6}}} \frac{4\pi^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi\alpha(y-y_2) \sin 2\pi\alpha x}{(2\pi\alpha)^{\frac{5}{6}} |k|^{\frac{1}{6}} \cos\left(2\pi\alpha y_2 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

et l'on obtient la figure 9 qui schématise ces singularités ⁽²¹⁾.

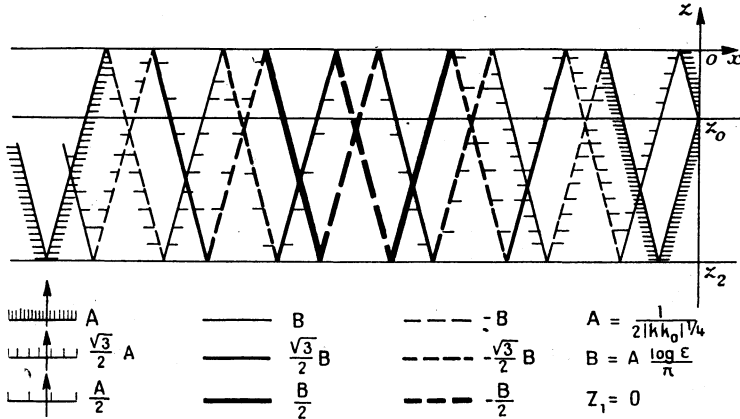


Fig. 9.

Troisième cas : $z_2 < 0$, $z_1 = 0$. — Nous gardons toujours la définition de $e(x, z; 0, z_0)$ comme intégrale prise le long de L_1 . Des formules (37) et (23), on déduit que E_1 a pour comportement asymptotique :

$$(43) \quad E_1 \sim \frac{\sin 2\pi\alpha(y_0 - y_2) \cos\left(2\pi\alpha y_2 - \frac{5\pi}{12}\right)}{2\pi\alpha |k(z_0)k(z)|^{\frac{1}{6}} \cos\left(2\pi\alpha y_2 - \frac{5\pi}{12}\right)},$$

dans la région

$$-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \text{Arg} \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0,$$

si l'on en exclut, pour les grandes valeurs de $|\alpha|$, une suite dénombrable de cercles, de rayon petit, centrés aux points

$$\alpha_n = \frac{11}{24\gamma_2} + \frac{n}{2\gamma_2}.$$

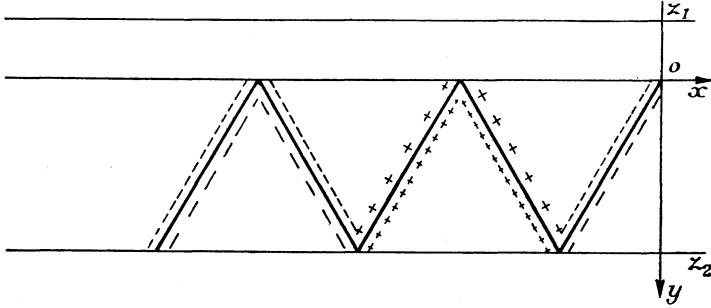
⁽²¹⁾ Ici on est amené à utiliser le fait que la fonction :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{(1-\xi)^{1-s}}, \quad |\xi| \leq 1, \quad (\xi \neq 1, s > 0),$$

est continue.

D'autre part,

$$(44) \quad E_1 \sim \frac{e^{2i\pi\alpha(y_0-y)}}{4i\pi |k(z)k(z_0)|^{\frac{1}{4}}}$$



$$z_0 = 0; z_1 > 0; z_2 < 0$$

$$A = \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/6)}{2\pi^{3/2} 3^{1/6} |\varepsilon|^{1/6}}$$

$$\begin{aligned} \text{---} & A \\ \text{---} & A\sqrt{3} \\ + + + + & -A \\ + + + + + & -A\sqrt{3} \end{aligned}$$

Fig. 10.

dans la région $\varepsilon \leq \text{Arg } \alpha \leq -\varepsilon + \pi$, $\varepsilon > 0$. A l'aide de (43) et (44) on montre, de manière analogue à ce qui vient d'être fait pour le deuxième cas, que $e(x, z; 0, z_0)$ est nulle pour $x > y - y_0 (z > z_0)$ et $x > y_0 - y (z < z_0)$ — dans ce cas, il n'y a plus de pôles sur $\mathcal{R}(\alpha) = 0$, — et que les singularités de $e(x, z; 0, z_0)$ sont celles représentées par la figure 10.

Quatrième cas : $z_2 < 0$, $z_1 < 0$. — C'est le cas où la bande est purement

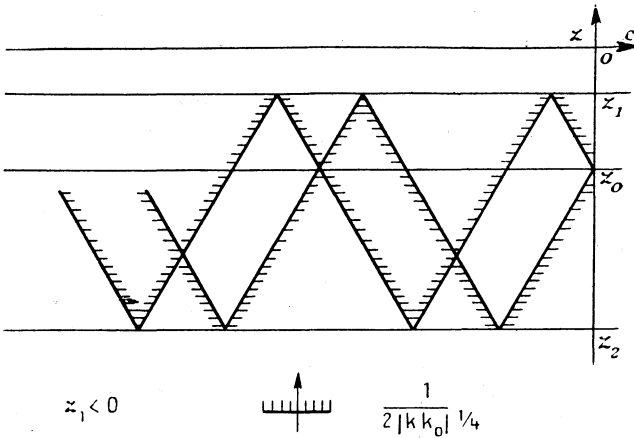


Fig. 11.

hyperbolique. Des formules (37) on déduit que E a pour développement asymptotique :

$$(45) \quad E_1 \sim - \frac{\sin 2\pi\alpha(y_0 - y_2) \sin 2\pi\alpha(y - y_1)}{2\pi\alpha |k(z_0)k(z)|^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi\alpha(y_1 - y_2)},$$

quel que soit l'argument de α . La fonction e est nulle pour $x > y - y_0$, $z > z_0$ et $x > y_0 - y$, $z < z_0$. Ses singularités dans la région $x < 0$ sont schématisées par la figure 11.

11. Remarques sur les résultats précédents. — Il convient maintenant de souligner quelques aspects des résultats précédents :

a. Indétermination de la solution élémentaire dans les domaines mixtes et hyperboliques. — Reprenons le raisonnement du deuxième cas du n° 10 en remplaçant le chemin $L_1[\mathcal{J}(\alpha) = c]$, le long duquel est prise l'intégrale de Fourier définissant la solution $e(x, z; x_0, z_0)$, par le chemin $L_2[\mathcal{J}(\alpha) = -c]$; ainsi que nous l'avons déjà signalé, on trouve une nouvelle solution élémentaire qui n'est autre que la symétrique de la précédente par rapport à l'axe $x = x_0$. Plus généralement, on peut considérer les solutions élémentaires obtenues en intégrant sur un chemin L situé le long de l'axe réel et laissant d'un côté certains pôles réels, de l'autre les autres pôles réels, ou même, entourant plusieurs fois certains de ces pôles. Les solutions correspondantes diffèrent donc de la solution $e(x, z; x_0, z_0)$ par une combinaison linéaire finie ou infinie d'expressions proportionnelles à :

$$(46) \quad [\mathcal{O}(z, z_2)]_{z=z_0} e^{2i\pi\alpha_0(x-x_0)},$$

α_0 désignant un zéro réel de $\mathcal{O}(z_1, z_2)$, les coefficients étant indépendants de z . La fonction (46) est une solution de l'équation (1) que l'on obtient par séparation des variables et qui est nulle pour $z = z_1$ et $z = z_2$.

L'indétermination trouvée est une conséquence du fait que lorsque le domaine est mixte ou purement hyperbolique ⁽²²⁾, il existe une infinité de solutions régulières satisfaisant aux conditions aux limites imposées.

Une solution élémentaire différant de $e(x, z, x_0, z_0)$ par une combinaison linéaire finie d'expressions (46) possède évidemment les mêmes singularités que $e(x, z; x_0, z_0)$. Ceci nous conduit à préciser la notion de solution « orientée » dans le domaine hyperbolique : une solution est orientée dans le sens des x négatifs si elle est identiquement nulle en tout point de la bande dont l'abscisse est supérieure à x_0 ; dans le domaine mixte, une solution est orientée dans le sens des x négatifs si les valeurs de la fonction et de ses dérivées tendent vers zéro lorsque x positif augmente indéfiniment. On voit ainsi que seule la solution $e(x, z; x_0, z_0)$, définie comme intégrale de Fourier le long de L_1 , est orientée dans le sens des x négatifs; dans le cas d'un domaine mixte, elle se comporte

⁽²²⁾ Dans le cas où le domaine est mixte ou elliptique, il existe des solutions de (1) obtenues par séparation des variables, correspondant aux pôles imaginaires de $\mathcal{O}(z_1, z_2)$, et satisfaisant aux conditions aux limites; elles sont de la forme $[\mathcal{O}(z, z_2)]_{z=\beta_0} e^{-2\pi\beta_0(x-x_0)}$ si $i\beta_0$ est un pôle imaginaire. Mais ces solutions ne sont pas à considérer ici vu leur comportement pour les grandes valeurs de x .

pour les grandes valeurs de x positives comme la somme d'une série convergente de solutions

$$[\mathcal{O}(z, z_2)]_{\alpha=\beta}, e^{-2\pi\beta_0(x-x_0)},$$

β_0 étant positif et $i\beta_0$ étant un zéro de $\mathcal{O}(z_1, z_2)$.

b. Réflexion des singularités. — Les résultats précédents fournissent quelques indications qu'il serait aisé de compléter sur le comportement et les réflexions des singularités dans le domaine hyperbolique : on peut dire en gros que si une singularité d'une solution existe en un point M, celle-ci se propage le long d'une caractéristique issue de M avec un facteur de proportionnalité égal à la valeur de la fonction de Riemann de M le long de cette caractéristique. Prenons le cas d'une discontinuité, elle se réfléchit sur une ligne hyperbolique $z = z_2$ suivant une discontinuité changée de signe ; par contre, si l'on suit son évolution quand on se rapproche de la ligne parabolique, on constate que son intensité croît indéfiniment et qu'elle se réfléchit sur celle-ci (dans le cas où z_1 est différent de zéro) suivant une singularité logarithmique. Ce fait a une interprétation importante en Aérodynamique comme l'a déjà remarqué Lighthill [12]. On notera le comportement beaucoup plus complexe de ces réflexions dans le cas où la ligne parabolique est en même temps une frontière de la bande (fig. 10). Si z_0 tend vers zéro par valeurs négatives, deux caractéristiques voisines de la même famille, l'une propageant une discontinuité et l'autre un logarithme, viennent se confondre et la singularité obtenue à la limite est en $\varepsilon^{-\frac{1}{6}}$, le coefficient de cet infiniment grand est différent de part et d'autre de la caractéristique. Tous ces résultats ne font que généraliser le comportement remarquable des singularités d'une solution élémentaire dans un domaine mixte, déjà signalé dans le cas de l'équation de Tricomi.

c. Autres conditions sur la frontière du domaine. — Nous avons imposé à la fonction $E(\alpha, z)$ la condition $E = 0$ pour $z = z_1$ et $z = z_2$. Plus généralement, si l'on veut réaliser les conditions :

$$\begin{aligned} A_1(\alpha)E - B_1(\alpha)E_z &= 0 & \text{sur } z = z_1, \\ A_2(\alpha)E - B_2(\alpha)E_z &= 0 & \text{sur } z = z_2, \end{aligned}$$

il faut remplacer la formule (36) par :

$$(47) \quad E(\alpha, z) = \begin{cases} E_1(\alpha, z) = \frac{\mathcal{C}_1(z, z_1)\mathcal{C}_2(z_0, z_2)}{\mathcal{H}(z_1, z_2)} & \text{si } z_0 \leq z \leq z_1, \\ E_2(\alpha, z) = \frac{\mathcal{C}_2(z, z_2)\mathcal{C}_1(z_0, z_1)}{\mathcal{H}(z_1, z_2)} & \text{si } z_2 \leq z \leq z_0, \end{cases}$$

les fonctions $\mathcal{C}_1(z, z_1)$ et $\mathcal{C}_2(z, z_2)$ étant définies par :

$$(48) \quad \begin{cases} \mathcal{C}_1(z, z_1) = A_1(\alpha)\mathcal{O}(z, z_1) + B_1(\alpha)\mathcal{O}_{z_1}(z, z_1), \\ \mathcal{C}_2(z, z_2) = A_2(\alpha)\mathcal{O}(z, z_2) + B_2(\alpha)\mathcal{O}_{z_2}(z, z_2), \end{cases}$$

$\mathcal{H}(z_1, z_2)$ étant le wronskien des solutions \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Le cas le plus intéressant est celui où les coefficients A_1, A_2, B_1, B_2 sont

linéaires en α ; l'étude de la solution et de ses propriétés se fait par les méthodes précédentes et les résultats sont analogues. Par exemple, si

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 0; \quad A_2 = -2i\pi\alpha |k(z_2)|^{-\frac{1}{2}}, \quad B_2 = 1,$$

la solution satisfait à une condition de « radiation » le long de la ligne $z = z_2$ et les singularités de la solution $e(M, P)$ — mais non celles de ses dérivées — ne se réfléchissent pas le long de $z = z_2$.

d. Problèmes aux limites. — Bien qu'une étude des problèmes aux limites soit en dehors du cadre de cet article, notons quelques applications immédiates des solutions précédentes à l'étude de certains problèmes aux limites.

Par exemple ⁽²³⁾, cherchons une solution de (1) définie dans la partie de la bande située à droite d'un arc AB ayant par rapport aux caractéristiques la disposition indiquée sur la figure 12, à partir de ses valeurs sur $z = z_1$ ($z_1 \leq 0$), $z = z_2$ et

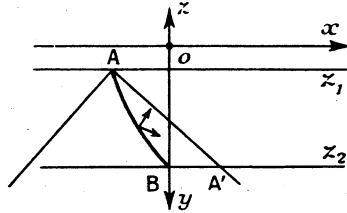


Fig. 12.

celles de ses dérivées le long de AB. Il est clair que l'on obtiendra l'expression de cette solution en appliquant la formule de Green à la fonction inconnue et à la solution élémentaire $e(M, P)$ orientée à gauche. On peut aussi donner une expression globale de cette solution en considérant la transformée de Fourier de la distribution identiquement nulle à gauche de AB et égale à la fonction inconnue à droite. Pour simplifier, nous supposons que AB est un segment parallèle à Oz et que les valeurs données sur $z = z_1$ et $z = z_2$ sont nulles. Cette transformée est alors une solution de l'équation différentielle :

$$(49) \quad U_{zz} - 4\pi^2 \alpha^2 k(z)U = 2i\pi\alpha k u(0, z) + k u_x(0, z) = F(z, z),$$

déterminée par les conditions aux limites; son expression s'écrit :

$$(50) \quad U = \int_{z_1}^{z_2} F(\alpha, t) \frac{\mathcal{O}(z, z_1) \mathcal{O}(t, z_2)}{\mathcal{O}(z_1, z_2)} dt + \int_z^{z_1} F(\alpha, t) \frac{\mathcal{O}(t, z_1) \mathcal{O}(z, z_2)}{\mathcal{O}(z_1, z_2)} dt,$$

et la solution cherchée est l'originale de cette solution, à condition de prendre

⁽²³⁾ Ce problème est une généralisation du problème de Cauchy; il s'y réduit d'ailleurs si les deux caractéristiques issues de P coupent l'arc AB; dans la partie utile, la solution $e(M, P)$ est identique à la fonction de Riemann de P. Dans le cas général, on rapprochera cette méthode de celle indiquée par M. Hadamard [9] pour résoudre un problème analogue; celui-ci définissait la fonction $e(M, P)$ successivement dans chaque région où elle est régulière; la théorie des distributions permet une définition globale de cette solution. M. Hadamard avait noté la difficulté rencontrée dans le cas où $z_1 = 0$; cette difficulté se trouve ici levée.

l'intégrale de Fourier sur le chemin L_2 . Si l'arc AB est la caractéristique AA', il suffit de se donner la valeur $f_1(z)$ de la solution; un raisonnement analogue au précédent montre que la solution cherchée est l'originale de (50) avec

$$(51) \quad F(\alpha, z) = \left[f_1(z) |k|^{\frac{1}{2}} + 2 |k|^{\frac{1}{2}} f_{1z} \right] e^{-2i\pi\alpha y},$$

à condition de prendre toujours l'intégrale de Fourier sur L_2 .

Signalons que dans le cas où $z_1 = 0$, le problème résolu comprend comme cas particulier le troisième problème aux limites avec données sur la ligne parabolique et que l'on peut généraliser ainsi aux équations étudiées la notion de source (+) dans la région hyperbolique définie dans le cas de l'équation de Tricomi.

Nous avons déjà signalé que dans le cas où $z_1 > 0$, $z_2 < 0$, la solution élémentaire orientée constituait une solution ayant les mêmes singularités que la fonction de Green du problème de Tricomi; on en déduit comme dans [6] (p. 31) que la résolution du problème de Tricomi relatif à un domaine se ramène à celle d'un problème analogue relatif au domaine conjugué et que les deux fonctions de Green de ces problèmes sont liées par une relation de symétrie.

e. Interprétation de la méthode dans le cadre de la théorie des distributions.

— Dans l'étude précédente, nous avons considéré les transformées de Fourier comme des fonctions de la variable complexe α et pris des intégrales le long de chemins tracés dans ce plan. Il va sans dire que toute cette étude peut également se faire en ne considérant α que comme une variable réelle et en utilisant systématiquement la théorie des distributions tempérées; supposons $z_2 < 0$, la distribution, solution de (20), s'annulant pour $z = z_1$ et $z = z_2$, est définie par

$$\begin{aligned} Vp \frac{\mathcal{O}(z_0, z_2) \mathcal{O}(z, z_1)}{\mathcal{O}(z_1, z_2)} + \Sigma A_v \delta_v[\mathcal{O}(z, z_1)]_{z=\alpha_v} & \quad \text{si } z_0 \leq z \leq z_1, \\ Vp \frac{\mathcal{O}(z, z_2) \mathcal{O}(z_0, z_1)}{\mathcal{O}(z_1, z_2)} + \Sigma A_v \delta_v[\mathcal{O}(z, z_1)]_{z=\alpha_v} & \quad \text{si } z_2 \leq z \leq z_0; \end{aligned}$$

α_v désigne un zéro réel de $\mathcal{O}(z_1, z_2)$; δ_v la masse de Dirac placée en ce point; les A_v sont des constantes. On peut montrer que les distributions Vp sont tempérées et il suffit de choisir convenablement les A_v pour que la série le soit également. On voit ainsi apparaître la multiplicité des solutions élémentaires que nous avons signalée; une étude analogue à celle que nous avons faite est nécessaire pour déterminer le choix des A_v de façon à obtenir une solution élémentaire orientée.

Conclusion. — Nous avons construit des solutions élémentaires de l'équation (1) en faisant appel à des considérations aussi simples que possible, et nous avons étudié assez complètement le comportement de ces solutions dans les différents cas qui peuvent se présenter. Cette étude rend compte en définitive de la manière différente dont se posent les problèmes aux limites suivant que le domaine considéré est elliptique, hyperbolique ou mixte; on peut également penser que ces solutions élémentaires peuvent fournir un moyen d'aborder ces problèmes.

Signalons en terminant que l'on peut déduire des solutions élémentaires, des solutions singulières présentant un point singulier isolé et uniforme au voisinage

de ce point — nous supposons ce point dans le domaine elliptique —; ainsi,

$$\alpha E(\alpha, z; z_0), \quad E_{z_0}(\alpha, z; z_0)$$

sont respectivement les transformées de Fourier des doublets d'axes parallèles à Ox et Oz , $E(\alpha, z; z_0)$ étant la transformée d'une solution élémentaire.

Enfin, si l'on considère la fonction dont la transformée est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi\alpha} [\mathcal{K}_1(\alpha, z) \mathcal{K}_2'(\alpha, z) + 1] & \quad (z \geq z_0 > 0), \\ \frac{i}{2\pi\alpha} \mathcal{K}_1'(\alpha, z_0) \mathcal{K}_2(\alpha, z) & \quad (z \leq z_0), \end{aligned}$$

l'intégrale de Fourier étant prise le long de L_1 et les notations étant celles du paragraphe II, on voit sans peine que cette solution est régulière dans tout le plan entaillé par une coupure $x = 0$, $z \geq z_0$, le long de laquelle elle admet une discontinuité égale à 1; c'est une fonction analogue à la fonction arctangente dans le cas de l'équation de Laplace.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] T. M. CHERRY, *Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas flow theory* (Proc. Roy. Soc., série A, vol. 202, p. 507-522).
- [2] J. D. COLE, *Note on the fundamental solution of $w_{yy} + y_{ww} = 0$* (Z. A. M. P., t. 3, 1952, p. 286-297).
- [3] R. COURANT et D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin, 1931.
- [4] P. GERMAIN, *Recherches sur une équation du type mixte. Introduction à l'étude mathématique des écoulements transsoniques* (La recherche aéronautique, n° 22, 1951).
- [5] P. GERMAIN, *Solutions élémentaires des équations régissant les écoulements des fluides compressibles* (C. R. Acad. Sc., t. 234, 1952, p. 1248-1250).
- [6] P. GERMAIN et R. BADER, *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation du type mixte de Tricomi* (Publ. O. N. E. R. A., n° 54, 1952).
- [7] P. GERMAIN et R. BADER, *Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une équation du type mixte* (Publ. O. N. E. R. A., n° 60, 1953).
- [8] E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. III, Paris, 1942.
- [9] J. HADAMARD, *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 31, 1903, p. 208-224).
- [10] R. E. LANGER, *Solutions asymptotiques d'équations différentielles ordinaires* (Trans. Amer. Soc., t. 33, 1931, p. 23-64).
- [11] M. J. Lighthill, *The hodograph transformation in transsonic flow* (Proc. Roy. Soc., série A, t. 191, 1947, p. 341-351).
- [12] M. J. Lighthill, *Reflection at a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting viscosity and heat conduction*. (Quat. J. Appl. Math. Mech., vol. 3, p. 303-325).
- [13] PLANCHEREL et POLYA, *Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples* (Comm. Math. Helv., t. 9, 1936, p. 224).
- [14] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I, Hermann, Paris, 1950.
- [15] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. II, Hermann, Paris, 1951.
- [16] S. TOMOTIKA et K. TAMADA, *Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid* (Quat. Appl. Math., part. III, t. 9, 1951, p. 129-147).
- [17] F. TRICOMI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto* (Mem. Real. Acad. Lincei, classe Fis. Mat. e Nat., série 5, vol. 14, 1923, p. 133-247).
- [18] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1948.
- [19] A. WEINSTEIN, *Discontinuous integrals and generalized potentials theory* (Trans. Amer. Soc., t. 63, 1948, p. 342-354).
- [20] A. WEINSTEIN, *On generalized potential theory and the equations of Darboux-Tricomi* (Bull. Amer. Math. Soc., t. 55, 1949).