

# BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

**Sur le développement de la fonction elliptique  $\mu(x)$   
suivant les puissances croissantes du module**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 163-165

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1878\\_\\_6\\_\\_163\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__163_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur le développement de la fonction elliptique  $\mu(x)$  suivant les puissances croissantes du module; par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.*

(Séance du 10 avril 1878.)

I. Dans le développement, suivant les puissances du module  $k$ , de la fonction elliptique  $\mu(x)$ , les coefficients des puissances successives de  $k$  sont des fonctions de  $x$ .

Nous nous proposons, dans la présente Note, de déterminer la forme générale de ces fonctions.

II. Pour y parvenir, nous partons de l'équation connue

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = (2k^2 - 1)\mu - 2k^2\mu^3,$$

que nous écrivons sous cette forme

$$(1) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \mu = 2k^2(\mu - \mu^3),$$

et nous posons simultanément

$$(2) \quad \mu = v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + v_3 k^6 + \dots,$$

$$(3) \quad \mu^3 = V_0 + V_1 k^2 + V_2 k^4 + V_3 k^6 + \dots$$

En portant ces développements dans l'équation (1), puis égalant aux deux membres de cette équation les coefficients de  $k^{2i}$ , nous ob-

tenons l'équation différentielle

$$(4) \quad \frac{d^2 v_t}{dx^2} + v_t = 2 v_{t-1} - 2 V_{t-1},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs entières et non négatives de  $t$ , si l'on convient de regarder comme nulles les expressions  $v_{-1}$  et  $V_{-1}$ .

III. Cette équation (4) nous donne immédiatement

$$v_0 = \cos x;$$

de plus, elle nous permet de calculer, de proche en proche, les fonctions  $v_1, v_2, \dots$ , dont nous cherchons à déterminer la forme.

Supposons, en effet, connues toutes les quantités  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{t-1}$ , c'est-à-dire tous les  $v$  dont l'indice est inférieur à  $t$ . Nous pouvons immédiatement calculer  $V_{t-1}$ , qui ne dépend que de ces  $v$ , et qui est lié à eux par l'équation

$$(5) \quad V_{t-1} = \frac{1}{(t-1)v_0} \sum_0^{t-2} (3t-3-4h) V_h v_{t-1-h},$$

laquelle se déduit très-facilement des égalités (2) et (3).

Or,  $V_{t-1}$  calculé,  $v_t$  s'obtient aussitôt; car on tire sans peine, de l'équation (4), la formule

$$(6) \quad \begin{cases} v_t = 2 \sin x \int_0^x (v_{t-1} - V_{t-1}) \cos x \, dx \\ \quad - 2 \cos x \int_0^x (v_{t-1} - V_{t-1}) \sin x \, dx. \end{cases}$$

IV. Pour revenir à la forme des coefficients considérés, appliquons les formules (5) et (6) au calcul des quantités  $v_1$  et  $v_2$ , puis écrivons les résultats que nous obtenons au-dessous de l'expression déjà trouvée pour  $v_0$ ; nous formons le tableau

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos x, \\ v_1 &= \frac{1}{16} (-\cos x + \cos 3x) + \frac{x}{4} \sin x, \\ v_2 &= \frac{1}{256} (-9 \cos x + 8 \cos 3x + \cos 5x) \\ &\quad + \frac{x}{64} (4 \sin x + 3 \sin 3x) - \frac{x^2}{32} \cos x. \end{aligned}$$

Un examen attentif de ces expressions de  $\nu_0, \nu_1, \nu_2$  nous conduit à poser

$$(7) \quad \nu_t = \sum p_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \sum q_{i,j} x^{i+1} \sin(2j+1)x,$$

$p_{i,j}$  et  $q_{i,j}$  étant des constantes,  $i$  et  $j$  des entiers non négatifs, et les  $\Sigma$  s'étendant, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers  $i$  et  $j$  qui satisfont à la condition  $2i+j \leq t$ , et le second à tous les systèmes tels que l'on ait

$$2i+1+j \leq t.$$

V. Mais cette égalité (7), prise dans toute sa généralité, n'est écrite que par induction. Vraie évidemment pour  $\nu_0, \nu_1, \nu_2$ , on peut douter qu'elle le soit pour les coefficients suivants. Elle l'est cependant, et non-seulement pour les premiers de ces coefficients, mais pour tous, de façon qu'elle exprime la forme générale des fonctions  $\nu$  et résout notre problème. On le démontre en établissant, à l'aide des formules (5) et (6), que, si elle est exacte pour tous les coefficients  $\nu$  dont l'indice est inférieur à  $t$ , elle l'est encore pour  $\nu_t$ . Les raisonnements assez longs qu'exige cette démonstration nous paraissent faciles; ils sont tout à fait analogues à ceux que nous avons employés dans notre *Mémoire Sur le développement de la fonction elliptique  $\lambda(x)$  suivant les puissances croissantes du module*.

VI. Évidemment, en remplaçant les sinus et cosinus de la formule (7) par leurs développements respectifs suivant les puissances de  $x$ , on peut arriver à la forme des coefficients du développement suivant les puissances de  $x$  de la fonction elliptique  $\mu(x)$ . On retrouve par cette voie, pour le cas particulier de  $\mu(x)$ , les résultats que nous avons présentés à l'Académie des Sciences dans la séance du 10 juillet 1876.

---