BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN ARBAULT

Sur l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 253-317

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__253_0>

SUR L'ENSEMBLE DE CONVERGENCE ABSOLUE D'UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. Jean ARBAULT.

INTRODUCTION.

1. C'est dans la thèse de Fatou (1906) qu'est apparue pour la première fois le problème de la convergence absolue des séries trigonométriques. L'auteur y montre que tout point de l'ensemble de convergence absolue est centre de symétrie de cet ensemble. En 1912, M. A. Denjoy dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* montre que si une série trigonométrique $\Sigma\rho_n \sin(nx + \varphi_n)$, $\rho_n \geqq 0$ converge absolument sur un ensemble de mesure positive, la série converge absolument partout, la série des coefficients $\Sigma\rho_n$ étant elle-même convergente. Ce remarquable théorème, conséquence des propriétés de la mesure pose le problème de la caractérisation des ensembles de convergence absolue d'une série telle que $\Sigma\rho_n$ diverge.

La question a été reprise ensuite par Niemytzki (1926), qui remarque que si un ensemble $\mathcal{E}$ est une *base du continu* — c'est-à-dire si tout point d'un intervalle (α, β) peut se mettre sous la forme $\Sigma\lambda_i x_i$; $x_i \in \mathcal{E}$: λ_i entier le Σ étant fini, c'est-à-dire ne comprenant qu'un nombre fini de termes —, toute série trigonométrique qui converge absolument sur $\mathcal{E}$ converge absolument partout. Appelons *base de convergence* un ensemble $\mathcal{E}$ ayant cette dernière propriété. Le résultat de Niemytzki — cette forme de l'exposé des résultats est due à Zygmund (1935) — s'énonce : une base du continu est une base de convergence. Lusin avait remarqué auparavant (1915) que tout ensemble de convergence absolue est de première catégorie et de type $F\sigma$. Un résiduel est, du reste, base du continu, autrement dit un sous-groupe de R ne peut être un résiduel.

Ce n'est qu'en 1938 que le problème fait de nouveaux progrès avec Marcinkiewicz. Celui-ci appelle N-*ensemble* ou ensemble de type N, un ensemble $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une série trigonométrique absolument convergente sur $\mathcal{E}$ sans l'être partout. Il est trivial que si $\mathcal{E}$ est un N-ensemble, toute partie de $\mathcal{E}$ l'est également. Les ensembles de type N sont donc les parties des ensembles de convergence absolue. Marcinkiewicz montre aussi un résultat fondamental : la réunion de deux N-ensembles peut être une base du continu et donne un exemple effectif.

M. R. Salem ensuite, en 1941, publie deux Mémoires sur le sujet. Dans le premier, il indique qu'à tout N-ensemble, on peut adjoindre un point, donc un nombre fini sans que la réunion cesse d'être N, donc aucun N-ensemble n'est saturé.

Dans le second, il remarque que $\Sigma\rho_n |\sin nx|$ a un ensemble de convergence déduit de celui de $\Sigma\rho_n |\sin(nx + \varphi_n)|$ par translation, si ce dernier n'est pas vide. On peut alors montrer que pour tout N-ensemble E il existe une série de sinus $\Sigma\rho_n |\sin nx|$ convergente sur E $(\Sigma\rho_n) = \infty)$. Pour l'étude des N-ensembles, il suffit donc de se limiter aux séries de sinus.

Ensuite, il étudie la convergence sur un parfait en utilisant certaines intégrales de Stieltjes qui lui permettent de donner une condition nécessaire pour qu'un parfait P soit de type N. Cette condition est, du reste, suffisante « presque partout ». Si elle est remplie, il existe une série convergeant presque partout sur P, la mesure étant positive à support sur le parfait. M. Salem applique cette condition aux ensembles parfaits qu'il nomme symétriques et qu'il a utilisés dans ses beaux travaux sur les ensembles d'unicité.

2. Abordant la question en 1943 sans connaître, par suite de la guerre, les travaux de M. Salem, j'ai indiqué moi-même la remarque relative aux séries de sinus en la complétant par la remarque essentielle que l'ensemble de convergence absolue est un groupe additif ou un module, ce qui est une généralisation du théorème de Fatou. Cet aspect nouveau conduit à poser de nouveaux problèmes.

Le problème initial étudié par Marcinkiewicz et M. R. Salem est la caractérisation des N-ensembles. Il vise à indiquer des conditions permettant de reconnaître qu'un ensemble E donné est de type N ou, au contraire, est une base de convergence. Une condition nécessaire pour que E soit N, est que le groupe engendré par E soit discontinu. Nous indiquons un exemple prouvant que la réciproque est fausse.

Toute série $\Sigma\rho_n |\sin nx|$ convergente sur un ensemble E, converge aussi sur le groupe G engendré par E, donc en des points n'appartenant pas à E, mais définis par la donnée de E et indépendants de la série envisagée. La convergence sur E n'implique-t-elle pas la convergence en d'autres points que ceux de G et, en particulier, en des points qui peuvent dépendre de la série considérée ? Nous indiquons un exemple répondant par l'affirmative à cette question, exemple non trivial où le groupe G est F_σ.

Un problème d'un autre ordre m'a été suggéré par M. R. Salem. Les exemples aisément accessibles de N-ensembles sont tels qu'il existe une série convergente sur l'ensemble à coefficients ne tendant pas vers zéro. On peut trouver une suite k_n telle que $\Sigma |\sin k_n \pi x|$ converge en tout point de l'ensemble envisagé. Il est commode d'appeler ensemble N_0 tout ensemble satisfaisant à cette propriété. Tout ensemble N est-il de type N_0 ? Plusieurs contre-exemples montrent que cette propriété est fausse.

Les méthodes que l'on peut utiliser dans cette étude sont variées. Les unes découlent de la structure de groupe de l'ensemble de convergence absolue et relèvent de l'algèbre. D'autres sont purement topologiques et procèdent du théorème de Baire ou des méthodes de M. A. Denjoy. Mais le problème est un problème d'analyse mathématique. Les propriétés de la convergence, de même que certaines méthodes analytiques liées à des mesures et déjà utilisées par M. Salem peuvent rendre de grands services. Enfin, le sujet relève souvent de l'arithmétique.

Puisqu'il s'agit de convergence absolue, le sinus peut être remplacé par l'arc réduit au premier quadrant et ne joue qu'un rôle de commodité. On étudie, au fond, les séries de la forme $\Sigma\rho_n p(nx)$, où $p(nx)$ désigne la distance du nombre (nx) à l'entier le plus voisin. De plus, beaucoup des propriétés subsistent si n n'est pas nécessairement un entier, et s'appliquent aux termes de la forme $\Sigma\rho_k p(\lambda_k x)$, où λ_k désigne une suite croissante, tendant vers l'infini de nombres réels. Mais il est remarquable que s'il existe une série de cette nature convergente sur un ensemble E, avec des λ_k quelconques, il en existe une autre convergente au moins sur E avec des λ_k entiers. La forme de ces séries en fait un cas particulier du problème de la répartition des nombres, modulo 1. On connaît les travaux relatifs à l'étude de ce problème et, en particulier, ceux de M. Ch. Pisot. Ces répartitions sont mal connues, en particulier pour des suites lacunaires k_n arbitraires. Très souvent. nous avons dû nous limiter à des exemples comprenant des suites particulières comme la suite 2^{2^n} dont l'étude est plus abordable.

3. Ce travail est divisé en trois parties, chaque partie étant divisée en plusieurs chapitres. Dans la première partie, après avoir étudié quelques séries particulières qui nous sont utiles par la suite, nous abordons les propriétés des ensembles de convergence absolue qui relèvent de l'algèbre et de la théorie des ensembles. Nous indiquons les propriétés algébriques, desquelles on déduit beaucoup des résultats connus jusqu'alors. Une étude des groupes du tore nous permet d'aborder une réciproque non encore démontrée. Le chapitre III est consacré aux ensembles « *permis* », c'est-à-dire aux ensembles que l'on peut adjoindre à un N-ensemble donné sans que la réunion cesse d'être un N-ensemble.

La deuxième partie est consacrée aux ensembles N_0 et à quelques généralisations. Dans le premier chapitre, nous démontrons pour ce type les propriétés des ensembles N qui continuent à être vérifiées. Le second nous donne par l'étude des « suites de limite nulle » pour un ensemble e, suites $\{\lambda_n\}$ telles que $\sin\lambda_n\pi x$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ en tout point $x \in e$ certains lemmes utilisés au chapitre III à plusieurs contre-exemples. Un ensemble N n'est pas, en général, de type N_0 ; un ensemble N_0^2 (pour lequel existe une suite $\{k_n\}$ telle que la série $\sin^2 k_n\pi x$ converge en tout point de l'ensemble) est un ensemble N, mais en général n'est pas N_0. Enfin l'espace vectoriel sur les rationnels $\mathcal{E}$ engendré par un N_0 ensemble, qui est de type N n'est pas N_0. Ces problèmes sont traités sur un cas particulier où intervient la suite 2^{2^n}.

Dans la troisième partie, nous abordons d'autres méthodes d'étude des ensembles de convergence absolue. Le chapitre I étudie la nature de la convergence et, en particulier, la convergence normale. Le chapitre II utilise des méthodes topologiques qui conduisent à un théorème général relatif à la convergence absolue sur certains parfaits. M. P. Malliavin a montré que si une série converge sur un parfait symétrique, la convergence y est uniforme. Cet énoncé peut être étendu à des parfaits dont les portions se déduisent l'une de l'autre par des translations. Il permet de donner un exemple de parfait P engendrant un groupe G tel que toute série (1) $\Sigma\rho_n |\sin n\pi x|$ convergente sur P converge nécessairement sur un sur-groupe G_1 de G tel que le groupe-quotient G_1/G ait la puissance du continu. Mais G_1 n'a aucun point fixe en dehors de G, il existe une série de la forme indiquée divergente en un point donné $a \notin G$. L'applicatiou des théorèmes si pénétrants de M. A. Denjoy permet de montrer que si la série (1) diverge sur un sous-ensemble partout dense d'un parfait P à translations, elle diverge sur un résiduel de P et de montrer que l'ensemble triadique de Cantor n'est pas du type de Marcinkiewicz, c'est-à-dire ne peut être décomposé en deux parties qui soient de type N (ni même en une infinité dénombrable de parties).

Enfin, le dernier chapitre utilise certaines intégrales de Stieltjes liées à des mesures positives ayant pour support un parfait donné. On en déduit qu'il existe des ensembles discontinus constituant un groupe additif qui sont pourtant des bases de convergence.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma vive reconnaissance à M. A. Denjoy qui n'a cessé de m'encourager au cours de mon travail, a bien voulu présenter à l'Académie les principaux résultats et m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

J'adresse des remercîments très sincères à M. R. Salem qui n'a cessé de suivre mes travaux et qui, par son cordial dévouement, a été pour moi le plus sûr des conseillers.

Mes remercîments vont aussi à M. G. Choquet qui s'est intéressé à mes recherches, m'a permis de les exposer à son Séminaire et m'a donné de précieux conseils pour la rédaction; à M. P. Dubreil qui veut bien se joindre à M. A. Denjoy et à M. G. Choquet pour constituer le jury, ainsi qu'à M. Ch. Pisot dont les conseils m'ont été fort précieux.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA CONVERGENCE ABSOLUE DE QUELQUES SÉRIES PARTICULIÈRES.

1. Série $\Sigma \,|\sin n!\,\pi x\,|$. — Il est immédiat que cette série converge pour toutes les valeurs de x rationnelles. Si elle converge pour un point α, elle converge aussi pour tout nombre $\alpha + \frac{p}{q}$, en particulier pour $\alpha + \frac{1}{k!}$.

On sait que tout nombre x du segment $(0, 1)$ peut se mettre sous la forme

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} \quad (\alpha_n \text{ entier}), \qquad 0 \leqq \alpha_n < n,$$

le développement factoriel est unique, sauf pour x rationnel qui possède un développement limité ($\alpha_n = 0$ à partir d'un certain rang) et un développement illimité ($\alpha_n = n - 1$ à partir d'un certain rang).

Nous allons voir que l'on peut développer un tel nombre sous la forme

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} \qquad (\beta_n \text{ entier}), \tag{1}$$

avec

$$-\left(\frac{n}{2} - 1\right) \leqq \beta_n \leqq \frac{n}{2} \qquad \text{si } n \text{ est pair.}$$

$$-\left(\frac{n-1}{2}\right) \leqq \beta_n \leqq \frac{n-1}{2} \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Il suffit de montrer que les développements (1) recouvrent le continu. Si l'on fixe les chiffres jusqu'à $2n$, on atteindra au plus

$$\sum_{p=2}^{2n} \frac{\beta_p}{p!} + \sum_{p=n}^{\infty} \frac{p}{(2p+1)!} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{p}{(2p)!},$$

tandis qu'en ne prenant que des « chiffres » négatifs à partir du rang suivant, on aura au moins

$$\sum_{n=2}^{2n-1} \frac{\beta_p}{p!} + \frac{\beta_{2n}+1}{(2n)!} - \sum_{p=n}^{\infty} \frac{p}{(2p+1)!} - \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{(2p)!}.$$

L'égalité de ces deux nombres résulte de l'égalité

$$\frac{1}{(2n)!} = \sum_{p=2n}^{\infty} \frac{p}{(p+1)!}$$

Une démonstration analogue vaut pour l'ordre impair. On a, en outre, un théorème d'unicité. Supposons qu'un nombre ait deux développements

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!}.$$

Posons

$$\beta_n = \beta_n^+ - \beta_n^-, \qquad \begin{aligned} \beta_n^+ &= \beta_n \quad \text{si } \beta_n \geqq 0, \\ \beta_n^+ &= 0 \quad \text{si } \beta_n < 0, \end{aligned}$$

on aura

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n^+ + \gamma_n^-}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_n^+ + \beta_n^-}{n!}. \tag{2}$$

Mais

$$\beta_n^+ + \gamma_n^- < n.$$

Les développements de chaque membre de (2) sont des développements factoriels. Ils représentent le même nombre. Donc, ou bien les chiffres sont égaux

$$\beta_n^+ + \gamma_n^- = \gamma_n^+ + \beta_n^-,$$

ce qui implique

$$\beta_n^+ = \gamma_n^+, \qquad \beta_n^- = \gamma_n^-,$$

d'où

$$\beta_n = \gamma_n,$$

ou bien le nombre (2) est rationnel, donc à partir d'un certain rang

$$\beta_n^+ + \gamma_n^- = 0,$$
$$\gamma_n^+ + \beta_n^- = n - 1,$$

ceci implique

$$\beta_n^+ = \gamma_n^- = 0;$$

γ_n^+ et β_n^- sont maxima, donc à partir d'un certain rang, les chiffres sont extrémaux. On a unicité du développement, sauf pour une infinité dénombrable d'entre eux.

Étudions maintenant la convergence de la série $\sigma = \Sigma\,|\sin n\,!\,\pi x|$. Posons

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n\,!},$$

$$n\,!\,x = n\,!\sum_{p=2}^{n} \frac{\beta_p}{p\,!} + n\,!\sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{\beta_p}{p\,!},$$

donc

$$n\,!\,x = \frac{\beta_{n+1}}{n+1} + \frac{\beta_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \theta_n \qquad (\mathrm{mod}\,1)$$

avec

$$|\theta_n| < \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

La série $\Sigma\,|\theta_n|$ est donc convergente; d'autre part, la convergence de $\sum \frac{|\beta_n|}{n}$ implique celle de

$$\sum \frac{|\beta_{n+2}|}{(n+1)(n+2)} < \sum \frac{|\beta_{n+2}|}{n+2}.$$

σ converge au point x si et seulement si $\sum \frac{|\beta_n|}{n}$ converge. Il est évident que cet ensemble de convergence a la puissance du continu.

2. Série $\Sigma\,|\cos n\,!\,\pi x|$. — Pour que cette série converge au point x, il est nécessaire que $n\,!\,x$ tende vers $\frac{1}{2}$ (modulo 1).

$$n\,!\,x = \frac{\beta_{n+1}}{n+1} + \frac{\beta_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \theta_n \qquad (\mathrm{mod}\,1),$$
$$\Sigma\,|\theta_n| < \infty,$$

$\frac{|\beta_n|}{n}$ tend donc vers $\frac{1}{2}$.

Posons

$$\beta_n = \varepsilon_n\left(\frac{n}{2} - r_n\right), \qquad \varepsilon_n = \pm 1 = \mathrm{Sgn}\,\beta_n,$$
$$0 \leq r_n \leq \frac{n}{2},$$

r_n est entier si n est pair;

r_n est congru à $\frac{1}{2}$ (mod 1) si n est impair.

De toute façon, $\frac{r_n}{n}$ tend vers zéro.

La série (2) converge en même temps que

$$(2.1)\qquad \left| \varepsilon_{n+1}\frac{r_{n+1}}{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+2}}{2(n+1)} + \varepsilon_{n+2}\frac{r_{n+2}}{(n+1)(n+2)} \right|.$$

Mais le troisième terme est $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Si n est impair, quelle que soit la valeur de r_{n+1}, la somme des deux premiers termes reste au moins égale à $\frac{1}{2(n+1)}$, de sorte qu'il ne peut y avoir convergence pour aucune valeur de x.

Théorème. — *La série $\Sigma \cos n!\,\pi x$ ne converge nulle part.*

3. **Série $\Sigma\,|\sin(n!+1)\pi x|$.** — Reprenons pour x un développement factoriel $\sum \frac{\alpha_n}{n!}$. On voit que la série (3) converge au point x, en même temps que la série de terme général :

$$(3.1)\qquad p\left(\frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_{n+1}}{n(n+1)} + x\right),$$

$p(a)$ désignant la distance du nombre a à l'entier le plus voisin. Il faut pour cela que $\frac{\alpha_n}{n}$ ait pour limite $1-x$. Posons

$$(3.2)\qquad \frac{\alpha_n}{n} = 1 - x + \frac{k_n}{n}, \qquad |k_n| < 1, \qquad \frac{k_n}{n} = o(1).$$

La convergence de (3.1) entraîne celle de

$$(3.3)\qquad \frac{k_n}{n} + \frac{1-x}{n} = \frac{\alpha_n - (n-1)(1-x)}{n}.$$

Comme la différence de deux numérateurs successifs de cette expression $\alpha_{n+1} - \alpha_n + 1 - x$ est, modulo 1, égale à $1-x$, il en résulte que de deux termes consécutifs de la série (3.3) l'un au moins surpasse en module $\frac{1-x}{2n}$ ce qui assure la divergence de la série (3) pour tout x non nul.

Théorème. — *La série $\Sigma|\sin(n!+1)\pi x|$ ne converge absolument qu'à l'origine.*

4. **Série $\Sigma\,|\sin 2^n \pi x|$.** — Il est évident que cette série converge pour tous les rationnels dont le dénominateur est une puissance exacte de 2. Considérons

$$x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r}{2^r} \qquad (\alpha_r = 0,\ 1).$$

Il vient

$$2^n x = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+s}}{2^s} \qquad (\text{mod}\, 1).$$

Si α_r n'est pas à partir d'un certain moment, constamment égal à 0 ou à 1, on pourra trouver certaines valeurs de n pour lesquelles cette quantité sera comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$; $\sin 2^n\pi x$ ne tend pas vers zéro. Donc :

THÉORÈME. — *La série* (4) *ne converge que pour les rationnels à dénominateur puissance entière de* 2.

5. **Série** $\Sigma|\sin 2^{2^n}\pi x|$. — Tout nombre réel $\theta (0<\theta<1)$ admet un développement dyadique

$$\theta=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\alpha_r}{2^r}\qquad(\alpha_r=0,\ 1). \tag{1}$$

On en déduit qu'il admet un développement

$$\theta=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\beta_s}{2^{2^s}}\qquad\left(\beta_s<2^{2^{s-1}}=\frac{2^{2^s}}{2^{2^{s-1}}}\right), \tag{2}$$

développement unique, sauf pour les nombres dyadiques. Il est donc possible, comme au paragraphe 1 de trouver un développement

$$\theta=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^{2^s}}, \tag{3}$$

avec

$$-(2^{2^{s-1}-1}-1)\leq\gamma_s\leq 2^{2^{s-1}-1}=\frac{2^{2^{s-1}}}{2};$$

le développement est encore unique, sauf pour une infinité dénombrable d'entre eux pour lesquels les chiffres ont la valeur extrême à partir d'un certain rang.

On voit que

$$\begin{aligned}2^{2^n}\theta=2^{2^n}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^{2^s}}&\equiv\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{\gamma_s}{2^{2^s-2^n}}\qquad(\text{mod }1)\\&=\frac{\gamma_{n+1}}{2^{2^{n+1}-2^n}}+\omega_n,\end{aligned}$$

avec

$$|\omega_n|<\frac{1}{2^{2^n}}.$$

La série $\Sigma|\sin 2^{2^n}\pi\theta|$ converge donc en même temps que la série

$$\frac{|\gamma_{n+1}|}{2^{2^{n+1}-2^n}}=\frac{|\gamma_{n+1}|}{2^{2^n}}<\frac{1}{2}.$$

Cette convergence peut être assurée en prenant γ_n nul, sauf pour une suite partielle $\{n_i\}$, où $\gamma_{n_i}=1$.

Les suites $\{n_i\}$ qui assurent cette convergence ont la puissance du continu.

THÉORÈME. — *La série* (5) *converge sur un ensemble ayant la puissance du continu.*

6. **Remarque.** — Supposons que la série $\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n \,|\sin n\pi x|$ converge absolument en x_0 sans converger partout. Il est, du reste, nécessaire que la série $\Sigma\rho_n$ diverge.

Soit $\{n_i\}$ une suite partielle de la suite des entiers naturels telle que $|\sin(n_i\pi x_0)|$; soit constamment supérieure à un nombre $a > 0$. Il est alors nécessaire que

$$\Sigma\rho_{n_i} < \infty$$

et la série des ρ_n dans laquelle on supprime les ρ_{n_i} reste divergente.

Il sera donc toujours possible dans une série $\mathfrak{S}$ de supprimer une suite partielle de termes n_i, telle que $\Sigma\rho_{n_i}$ converge sans changer la convergence de $\mathfrak{S}$. Soit une série $\mathfrak{S}$, de laquelle on supprime les termes de rang n_i de façon à obtenir la série $\mathfrak{S}_1$; si $\mathfrak{S}$ converge en x_0, $\mathfrak{S}_1$ converge aussi en x_0. Si $\mathfrak{S}_1$ diverge en x, $\mathfrak{S}$ a la même propriété.

En particulier, une série $\mathfrak{S}$ diverge en un point x_0 si l'on peut trouver une suite partielle $\{n_i\}$ telle que

$$(1) \qquad |\sin n_i\pi x| > \alpha > 0 \quad \text{pour tout } i,$$

$$(2) \qquad \Sigma\rho_{n_i} = \infty.$$

Cette dernière condition est automatiquement satisfaite si $\underline{\lim}\,\rho_{n_i} > 0$, par exemple pour une série $\mathfrak{S}$ de la forme $\Sigma\,|\sin p_n\pi x|$; il suffira, dans ce cas, de s'assurer que la suite retirée $\{n_i\}$ comprenne une infinité de termes. Cette remarque nous sera utile dans la seconde partie.

CHAPITRE II.

Propriétés algébriques de l'ensemble de convergence absolue.

1. Nous désignons par *série trigonométrique* une série de la forme

$$\Sigma\rho_n \sin(k_n x + \varphi_n), \qquad \rho_n \geqq 0, \qquad \Sigma\rho_n = \infty,$$

où k_n désigne une suite donnée, croissante, tendant vers l'infini de nombres réels. Sauf lorsque cela est précisé, nous ne supposons pas les k_n nécessairement entiers.

Pour l'étude de la convergence absolue, le sinus peut être remplacé par l'arc réduit au premier quadrant, de sorte que nous étudions en réalité la convergence des séries $\Sigma\rho_n p\left(\frac{k_n x + \varphi_n}{\pi}\right)$ où $p(a)$ désigne la distance du nombre réel a à l'entier le plus voisin. Mais, à l'exception des exemples pour lesquels cette dernière notation est souvent plus avantageuse, nous conservons le sinus par simple commodité.

Définition. — Nous disons avec Marcinkiewicz qu'un ensemble donné $E \subset R$ est un N-*ensemble*, ou *ensemble de type* N s'il existe une série trigonométrique $\Sigma\rho_n \sin(nx + \varphi_n)$; $\Sigma\rho_n = \infty$ convergente absolument sur E. La série ne converge que sur un ensemble de mesure nulle comprenant E.

2. Soit $\rho_n \sin(k_n x + \varphi_n)$ le terme général d'une série trigonométrique, a et b deux points de convergence absolue; de

$$\sin k_n(b - a) = \sin[(k_n b + \varphi_n) - (k_n a + \varphi_n)]$$

résulte

$$\Sigma\rho_n \sin kn(b - a) \leqq \Sigma\rho_n |\sin(k_n b + \varphi_n)| + \Sigma\rho_n |\sin(k_n a + \varphi_n)|;$$

la série $\Sigma\rho_n \sin k_n x$ converge absolument en $b - a$. La réciproque est vraie. Si $\Sigma\rho_n |\sin k_n x|$ converge en b et $\Sigma\rho_n |\sin(k_n x + \varphi_n)|$ en a, cette dernière converge aussi en $a + b$. Autrement dit, les ensembles de convergence de ces deux séries se déduisent l'un de l'autre par la translation a.

Théorème (Salem). — *Si l'ensemble de convergence absolue de la série $\Sigma\rho_n \sin(k_n x + \varphi_n)$ n'est pas vide, il se déduit de celui de $\Sigma\rho_n \sin k_n x$ par une translation.*

La condition imposée est nécessaire comme le montre l'exemple $\Sigma \sin\left(n!\,\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ étudié au chapitre I.

Si $\mathcal{E}'$ est un ensemble de convergence absolue, c'est-à-dire un N-ensemble, l'ensemble $\mathcal{E}$ déduit de $\mathcal{E}'$ par une translation qui amène un point de $\mathcal{E}'$ en zéro est aussi un N-ensemble, mais pour une série de sinus. Nous nous limiterons dans la suite aux séries de sinus et appellerons dorénavant N-ensemble un ensemble $\mathcal{E}$ tel qu'il existe une série de sinus $\Sigma\rho_n |\sin nx|$ convergeant absolument en tout point de $\mathcal{E}$ sans converger partout, c'est-à-dire pour laquelle $\Sigma\rho_n = \infty$. Cette définition est, à une translation près, équivalente à la précédente. Nous nous affranchirons plus loin (1^{re} Partie, chap. III, § 4) de cette restriction.

Soit une série trigonométrique $\Sigma\rho_n |\sin k_n x|$; k_n quelconque. Déterminons un entier λ_n tel que

$$(1) \qquad \lambda_n k_n = p_n + \theta_n \qquad (|\theta_n| < \varepsilon_n),$$

$\{\varepsilon_n\}$ étant une suite donnée tendant vers zéro qui sera tout à l'heure soumise à certaines restrictions. La relation (1) peut être satisfaite pour

$$\lambda_n < \frac{1}{\varepsilon_n}.$$

Considérons la série $\Sigma\rho'_n |\sin p_n x|$

$$\rho'_n |\sin p_n x| \leqq \lambda_n \rho'_n |\sin k_n x| + \rho'_n \varepsilon_n \pi.$$

Elle converge en tout point de E si

$$\lambda_n \rho'_n \leqq \rho_n, \qquad \Sigma\rho'_n \varepsilon_n < \infty.$$

Il suffit de prendre

$$\rho'_n = \rho_n \varepsilon_n,$$
$$\Sigma\rho'_n = \Sigma\rho_n \varepsilon_n = \infty, \qquad \Sigma\rho'_n \varepsilon_n = \Sigma\rho_n \varepsilon_n^2 < \infty$$

et il est facile de déterminer ε_n satisfaisant à ces deux dernières conditions.

Théorème. — *S'il existe une série $\Sigma\rho_n |\sin k_n x|$ convergente sur un ensemble* E *sans converger partout,* E *est un N-ensemble.*

3. De l'égalité

$$\sin k_n(b-a) = \sin k_n b \cos k_n a - \sin k_n a \cos k_n b,$$

nous déduisons

$$|\sin k_n(b-a)| \leqq |\sin k_n b| + |\sin k_n a|$$

et, par suite,

THÉORÈME. — *L'ensemble de convergence absolue d'une série de sinus est un groupe additif.*

Mais si $x \in E$,

$$x + \lambda\pi \in E \quad (\lambda \text{ entier}).$$

Nous pouvons donc nous contenter de la restriction de l'ensemble à l'intervalle $(0, \pi)$, un point de l'ensemble étant défini modulo π et en posant le terme général sous la forme $\rho_n \sin k_n \pi x$, nous envisagerons des points x définis modulo 1.

Nous aurons donc à faire l'étude de groupes du segment $(0, 1)$ à cette congruence près — c'est-à-dire à un isomorphisme près — l'étude de groupes du cercle (désigné par T, tore à une dimension dans la terminologie de Bourbaki).

Il résulte de cet énoncé que si une série de sinus converge absolument sur un ensemble $\mathcal{E}$, elle converge absolument en tous les points du groupe G engendré par $\mathcal{E}$, soit en tous les points, définis modulo 1 par

$$\Sigma\lambda_i\alpha_i \quad \alpha_i \in \mathcal{E} \quad (\lambda_i \text{ entier relatif})$$

et le Σ étant fini.

La convergence absolue sur un ensemble $\mathcal{E}$ entraîne la convergence absolue en des points *fixes* (c'est-à-dire indépendants de la série $\mathfrak{S}$ considérée) et définis à partir de $\mathcal{E}$ par un procédé algébrique.

4. Soit $S(x)$ la somme de la série

$$\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n |\sin k_n \pi x|,$$

$S(x)$ n'est fini que si x appartient à l'ensemble E où $\mathfrak{S}$ converge; comme $S(x)$ est somme d'une série de fonctions continues positives, cette fonction est semi-continue inférieurement. L'ensemble des points où elle prend une valeur donnée est donc un G_δ et, par suite, le groupe G de convergence absolue (ensemble des points où $S(x) \neq \infty$) est un F_σ.

Mais si $\varepsilon = \pm 1$,

$$|S(b) - S(a)| \leqq S(b + \varepsilon a) \leqq S(a) + S(b).$$

Nous voyons que $S(x)$ permet de doter le groupe G d'une distance invariante $d(x, y) = S(x - y)$ à condition que $S(x)$ ne soit jamais nul pour $x \neq 0$, ce qui est le cas si la série $\mathfrak{S}$ a un terme en $\sin \pi x$ à coefficient non nul, ce que l'on peut toujours supposer. $S(x)$ est alors $d(0, x)$. Si une suite $\{x_n\}$ n'a pas de limite euclidienne, elle ne saurait en avoir une au sens de la métrique. Avec cette métrique, G est complet. Soit, en effet, une suite de Cauchy telle que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pour $m, n > N(\varepsilon)$. Soit x un point d'accumulation euclidien de la suite

$$x = x_i + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{m_k} - x_{m_{k-1}}) \qquad (m_0 = i)$$

Choisissons

$$i > N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N_1 \qquad \text{et} \qquad m_k > N\left(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) = N_{k+1}.$$

Alors

$$d(x, x_i) < \varepsilon.$$

x est limite de $\{x_m\}$ au sens de la métrique.

La topologie de G associée à cette distance est plus fine que la topologie euclidienne. Pour celle-ci, G est un F_σ. Mais, avec la métrique invariante, le groupe est un G_δ absolu.

Théorème. — *L'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique est un groupe F_σ susceptible d'une métrisation invariante fournissant une topologie plus fine que la topologie euclidienne et dans laquelle il est complet.*

Si G est dénombrable, il n'a que des points isolés pour la métrique invariante, sinon aucun point ne serait isolé et G contiendrait un parfait.

5. Il est connu (Steinhaus, *a*; Zygmund, p. 143) que pour un ensemble de mesure positive, ou pour un résiduel, l'ensemble des distances contient un segment comprenant l'origine. En prenant l'ensemble des points de la forme $\lambda(a - b)$, où λ est un entier convenablement choisi, on peut donc obtenir le segment $(0, 1)$ tout entier; on déduit de là les deux énoncés :

Théorème de Denjoy-Lusin. — *Si une série trigonométrique converge absolument sur un ensemble de mesure positive, elle converge absolument partout.*

Ce n'est qu'une partie du théorème classique qui contient en plus l'affirmation que $\Sigma\rho_n$ est convergente.

Théorème de Lusin. — *L'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique est de première catégorie, et si une série trigonométrique converge absolument sur un ensemble de seconde catégorie, elle converge absolument partout.*

6. Steinhaus désigne par base du continu un ensemble $\mathcal{E}$ tel que tout point du segment $(0, 1)$ puisse être mis au moins d'une façon sous la forme $\Sigma\lambda_i\alpha_i$, le Σ étant fini, les λ entiers et les $\alpha \in \mathcal{E}$. Autrement dit, le groupe engendré par $\mathcal{E}$ contient le segment $(0, 1)$ entier. Le résultat du paragraphe 3 permet d'énoncer le

Théorème de Steinhaus. — *Si $\mathcal{E}$ est une base du continu, toute série trigonométrique convergeant absolument sur est partout absolument convergente.*

Ce résultat permet de montrer que certains ensembles ne sont pas des N-ensembles par le fait qu'ils sont base du continu.

Ainsi, soit C l'ensemble triadique de Cantor construit sur le segment $(0, 1)$. Tout point de ce segment est somme de deux points de C. L'ensemble de Cantor n'est pas un N-ensemble

7. C'est par un raisonnement semblable que Marcinkiewicz a pu montrer que la réunion de deux N-ensembles n'est pas nécessairement un N-ensemble. Marcinkiewicz (a) donne un exemple de deux séries trigonométriques convergeant sur des ensembles respectifs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ discontinus dont la réunion est une base du continu.

Voici un exemple plus simple que celui de Marcinkiewicz, mais de même principe.

Soit $\{\omega_n\}$ une suite telle que

$$\omega_n < 2^n \quad \sum \frac{1}{2^{\omega_n}} < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2^{2^n - \omega_n}} < \infty.$$

Un nombre quelconque x est somme de deux nombres a et b définis par leurs chiffres dans le système dyadique de la manière suivante :

Les chiffres de a d'ordre compris entre 2^n et $2^n + \omega_n$ seront ceux de x de même ordre, les chiffres de b d'ordre supérieur à $2^n + \omega_n$ et inférieur à 2^{n+1} seront ceux de x, les autres chiffres de a et de b compris entre $2^n + 1$ et 2^{n+1} seront nuls. Il est évident que $x = a + b$. L'ensemble P_1 des nombres a et l'ensemble P_2 des nombre b sont des parfaits (construction classique des parfaits en annulant des chiffres de rangs fixés).

Or

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\omega_n} \frac{\alpha_{2^n+r}}{2^{2^n+n}},$$

$$2^{2^{n-1}+\omega_{n-1}} a = 2^{2^{n-1}+\omega_{n-1}} \sum_{\lambda=0}^{\omega_n} \frac{\alpha_{2^n+\lambda}}{2^{2^n+\lambda}} + \theta_n \qquad (\text{mod } 1)$$

et

$$\Sigma \, |\theta_n| < \infty.$$

Le premier terme s'écrit $\sum\limits_{\lambda=0}^{\omega_n} \frac{\alpha_{2^n+\lambda}}{2^{2^{n-1}+\lambda-\omega_{n-1}}}$, le dénominateur est au moins égal à $2^{2^{n-1}-\omega_{n-1}}$, terme général d'une série convergente, donc la série $\Sigma \, |\sin 2^{2^n+\omega_n} \pi x|$ converge au point a, l'ensemble P_1 est de type N.

De même,

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=\omega_n+1}^{2^{2^n+1}-2^{2^n}-1} \frac{\alpha_{2^n+r}}{2^{2^n}+r}.$$

Mais

$$2^{2^n} \sum_{\lambda=\omega_n+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2^n}+\lambda}{2^{2^n+\lambda}} = \sum_{\lambda=\omega_n+1}^{\infty} \frac{\alpha^{2^n+\lambda}}{2^\lambda} = \frac{1}{2^{\omega_n}},$$

terme général d'une série convergente, la série $\Sigma|\sin 2^{2^n}\pi x|$ converge en b; l'ensemble P_2 est de type N.

On voit que la réunion des deux N-ensembles P_1 et P_2 ne saurait être de type N.

Définition. — L'ensemble $P = P_1 \cup P_2$ est la réunion de deux N-ensembles, mais n'est pas lui-même un N-ensemble; nous dirons d'un tel ensemble qu'il est du *type de Marcinkiewicz*. Nous devons nous poser le problème de l'existence d'ensembles qui ne sont ni du type N, ni du type de Marcinkiewicz. Nous verrons plus loin (3e partie, chap. II, § 7), que l'ensemble triadique de Cantor répond à ce problème.

8. Fatou a montré (Fatou, *b*) que l'ensemble de convergence absolue d'une série trigonométrique est symétrique par rapport à chacun de ses points. Mais la structure de groupe montre la généralisation.

Théorème de symétrie. — *Un ensemble de convergence absolue* E *d'une série trigométrique est fermé par rapport à la symétrie.*

C'est-à-dire que si a et b appartiennent à cet ensemble E, E admet le milieu $\frac{a+b}{2}$ comme centre de symétrie.

E peut ne pas converger en tous ces milieux, mais ceux-ci constituent un groupe $\mathcal{E}$ qui est sur-groupe de E, Si $\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x|$ converge sur E et E seulement, il est évident que $\mathfrak{S}_1 = \Sigma\rho_n|\sin 2n\pi x|$ converge sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ seulement.

Comme $\sin 2n\pi x = \sin n\pi x \cos n\pi x$, on en conclut que si la série

$$\mathfrak{S}' = \Sigma\rho_n|\cos n\pi x|$$

converge en un point x_0, ce point appartient nécessairement à $\mathcal{E}$, il est un milieu pour E. Mais $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ ne peuvent converger simultanément en un point α, sinon la série $\Sigma\rho_n e^{in\pi\alpha}$ converge absolument, ce qui implique $\Sigma\rho_n < \infty$, contrairement aux hypothèses.

Soit G un groupe tel qu'il existe une série $\mathfrak{S}$ convergeant sur G sans converger partout. Si G est confondu avec l'ensemble de ses milieux et si la conjuguée $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ converge en un point, on peut conclure que $\mathfrak{S}$ converge certainement sur un sur-groupe G_1 de G.

9. Soit G_1 un sur-groupe de G, on sait qu'il est possible de répartir G_1 en classes modulo G, chaque classe étant un élément du groupe-quotient G_1/G; une classe est ici constituée par une translation du groupe G. Si nous considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des milieux du paragraphe précédent, il est donc possible de le décomposer en classes modulo E, et si la série conjuguée converge en un point, elle converge sur une de ces classes.

Il est possible que $\mathcal{E}$ ne soit pas confondu avec E et que la conjuguée diverge partout. Un exemple est fourni par les séries $\Sigma|\sin n!\,\pi x|$ et $\Sigma|\cos n!\,\pi x|$ étudiées au chapitre I.

10. Soit E un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathcal{E}$ formé des nombres $\Sigma\alpha_i a_i$, où les a_i sont pris dans E, les α_i étant rationnels et le Σ étant fini, constitue un groupe contenant E. C'est *l'espace vectoriel sur les rationnels engendré par* E.

Théorème. — *L'espace vectoriel sur le corps des rationnels engendré par un N-ensemble est lui-même un N-ensemble.*

Supposons que $\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x| < \infty$ sur E. Considérons la série

$$\mathfrak{S}' = \Sigma\rho'_n|\sin(p_n)!\, n\pi x|$$

en définissant p_n constant égal à p pour $N_{p-1} < n \leqq N_p$.

Soit S_n la somme de rang n de la série divergente $\Sigma\rho_n$. Prenons les N de sorte que $(p_n)!$ soit la plus grande factorielle contenue dans S_n

$$(p_n)! \leqq S_n < (p_n + 1)!.$$

En fixant $\rho'_n = \frac{\rho_n}{S_n}$, on a encore pour $\Sigma\rho'_n$ une série divergente et, de plus,

$$\rho'_n(p_n)! \leqq \rho_n. \tag{1}$$

Si a $\in$ E,

$$\Sigma\rho'_n|\sin(p_n)!\, n\pi a| \leqq \Sigma\rho'_n(p_n)!\,|\sin\pi a| \leqq \Sigma\rho_n|\sin n\pi a| < \infty,$$

de sorte que $\mathfrak{S}'$ converge sur E.

Soit $b = \frac{a}{q}$, où q est un entier quelconque pour $p_n \geqq q$, $\frac{p_n!}{q}$ est un entier.

$$\rho'_n \sin p_n!\, n\pi b = \rho'_n \sin\frac{p_n!}{q} n\pi a,$$

de sorte que

$$\Sigma\rho'_n|\sin p_n!\, n\pi b| \leqq \Sigma\rho'_n\frac{p_n!}{q}|\sin n\pi a| \leqq \Sigma\frac{\rho_n}{q}|\sin n\pi a|$$
$$= \frac{1}{q}\Sigma\rho_n|\sin n\pi a| < \infty,$$

de sorte que $\mathfrak{S}'$ converge pour tout point $b = \frac{a}{q}$ donc en tout point αa (α rationnel), donc en tous les points du groupe engendré par cet ensemble, qui n'est autre que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Conséquences. — 1° On sait que, moyennant l'axiome du choix, tout espace vectoriel admet une base. Il suffit que cette base soit un N-ensemble pour que toute partie de l'espace vectoriel le soit également.

2° Un tel espace vectoriel $\mathcal{E}$ est un groupe confondu avec le groupe de ses milieux. Il s'ensuit que si la conjuguée de la série $\mathfrak{S}$, qui converge sur $\mathcal{E}$ a un seul point de convergence, $\mathfrak{S}'$ converge en des points n'appartenant pas à $\mathcal{E}$ sans toutefois converger partout.

3° L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par un N-ensemble étant lui aussi un N-ensemble, est totalement discontinu. Si un ensemble E engendre le segment (0, 1) complet, il ne saurait être un N-ensemble.

Soit, par exemple, $\mathfrak{H}$ une base de Hamel, c'est-à-dire un ensemble de nombres réels tel que tout nombre réel puisse se mettre et d'une seule manière sous la forme $\Sigma\alpha_i h_i$; $h_i \in \mathfrak{H}$; α_i rationnel, le Σ étant fini. L'existence de telles bases résulte de l'axiome de choix. Cette base engendre un groupe $\mathfrak{G}$ qui est certainement totalement discontinu. Mais $\mathfrak{H}$ engendre l'espace du segment $(0, 1)$, donc $\mathfrak{G}$ ne peut être un N-ensemble.

Ce dernier exemple, qui ne peut être envisagé que grâce à l'axiome du choix, a le mérite de montrer qu'il existe des groupes totalement discontinus qui sont pourtant des bases de convergence.

11. **Problème.** — En outre il pose un problème important. Jusqu'alors, nous avons vu que si une série converge en a et b, elle converge en $\alpha + \varepsilon b$, si elle converge sur un ensemble E, elle converge sur le groupe $\mathcal{G}$ engendré par E. Mais la convergence sur E ne peut-elle entraîner la convergence en des points n'appartenant pas à $\mathcal{G}$? La réponse à cette question est partiellement fournie par l'ensemble $\mathfrak{H}$ qui engendre un groupe totalement discontinu, mais qui est base de convergence. La convergence sur un tel ensemble entraîne donc la convergence en des points n'appartenant pas au groupe engendré par cet ensemble.

Nous poserons le problème sous une forme différente, G étant un groupe de type N, existe-il une série $\mathfrak{S}$ convergeant en tous les points de G sans converger ailleurs ou, au contraire, est-il possible que la convergence sur G entraîne la convergence sur un sur-groupe G_1 de G; dans ce dernier cas, les points de $G_1 - G$ sont-ils arbitraires ou, au contraire, certains sont-ils imposés par la donnée de G indépendamment de la série $\mathfrak{S}$ considérée? La réponse partielle peut être donnée dans le cas où G n'est pas de type F_σ. Il est bien évident que toute série $\mathfrak{S}$ devra converger sur un F_σ contenant G. Cette question sera reprise dans la troisième partie.

12. Nous résoudrons ici le problème dans un très particulier

Théorème. — *Il existe une série de sinus qui ne converge absolument qu'aux points rationnels. Pour la métrique, définie par la somme de cette série, tous les points rationnels sont isolés.*

Considérons, en effet, la série

$$\mathfrak{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \leq n} |\sin pn!\,\pi x| \tag{1}$$

qui converge visiblement pour tous les points rationnels.

Soit x un nombre quelconque

$$x = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\alpha_r}{r!} \qquad (\alpha_r < r), \tag{2}$$

$$pn!\,\pi x = \left(pn! \sum_{r=2}^{n} \frac{\alpha_r}{r!} + pn! \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_r}{r!}\right)\pi;$$

la première partie étant un entier, on voit que

$$pn!\,\pi x = p\pi\left(\frac{\alpha_{n+1}}{n+1} + \frac{\alpha_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \theta_n\right) \qquad (\text{mod } 1).$$

Mais

$$p\theta_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$pn!\,\pi x = p\pi\left(\frac{\alpha_{n+1}}{n+1} + \theta'_n\right) \qquad \left(\theta'_n < \frac{1}{n+1}\right),$$

x étant irrationnel, il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles α_{n+1} est différent de o ou de n, soit l'un d'eux; $q_n = \frac{\alpha_{n+1}}{n+1} + \theta'_n$ est compris entre $\frac{1}{n+1}$ et $1 - \frac{1}{n+1}$. Or, on peut trouver un entier $p \leq n$ tel que pq_n soit modulo 1 compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, soit p_n un tel nombre. On voit que pour la suite infinie $|\sin p_n n!\,\pi x|$ est supérieur à $\sin\frac{\pi}{3}$, donc ne tend pas vers o, la série (1) diverge pour tout x irrationnel.

On peut même considérer une série à termes tendant vers o; en effet, q_n étant fixé, il y a au moins $\frac{n}{4}$ nombres $p \leq n$ pour lesquels pq_n est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$; donc pour lesquels $|\sin p_n n!\,\pi x|$ dépasse $\frac{1}{2}$, ce qui assure la divergence de la série

$$\mathfrak{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} |\sin pn!\,\pi x|. \tag{2}$$

Si nous imposons à p d'être au plus égal à n^2, il y a au moins $\frac{n^2}{4}$ valeurs de p donnant pq_n compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, de sorte que la série

$$\mathfrak{S}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p \leq n^2} |\sin pn!\,\pi x| \tag{3}$$

ne converge absolument que pour les valeurs rationnelles de x. On voit aisément que $\mathfrak{S}_2$ est la série de Fourier d'une fonction de carré sommable.

Le groupe des rationnels est confondu avec le groupe de ses milieux. Il s'ensuit que les séries conjuguées des séries $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ ne convergent nulle part.

CHAPITRE III.

Ensembles permis.

1. D'après le théorème de Marcinkiewicz (1re partie, chap. II, § 7) la réunion de deux N-ensembles peut ne pas être de type N.

La question se pose donc de savoir quel ensemble e on peut ajouter à un N-ensemble donné $\mathcal{E}$ pour que la réunion $\mathcal{E} \cup e$ soit encore un N-ensemble. Nous pouvons d'abord résoudre la question dans le cas où e est dénombrable.

Soit $\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n \sin n\pi x$ une série convergente absolument sur un ensemble G non continu et a un point quelconque ($a \notin G$). On peut déterminer un nombre λ_n tel que $|\sin\lambda_n n\pi a| < \eta_n$, $\{\eta_n\}$ étant une suite donnée à l'avance et tendant vers o, avec $\frac{1}{n}$. Ceci résulte du principe du tiroir de Dirichlet et l'on sait que l'on peut y satisfaire avec $\lambda_n < \frac{1}{\eta_n}$. Prenons dans tous les cas le plus petit λ_n y satisfaisant et ceci pour tout n. La théorie des séries nous apprend qu'il est possible de déterminer η_n de manière que

$$\Sigma\rho_n\eta_n = \infty \qquad \text{et} \qquad \Sigma\rho_n\eta_n^2 < \infty \quad (^1).$$

Posons $\rho'_n = \rho_n\eta_n$ et considérons la série $\mathfrak{S}' = \Sigma\rho'_n|\sin\lambda n\pi x|$, au point a, son terme général est inférieur à $\rho'_n\eta_n$, donc elle y converge.

En un point $b \in G$, on a

$$\rho'_n|\sin\lambda_n n\pi b| < \lambda_n\rho'_n|\sin n\pi b| < \rho_n|\sin n\pi b|;$$

donc $\mathfrak{S}'$ converge en tous les points de convergence de G.

Ainsi $\mathfrak{S}'$ sans converger partout converge sur l'ensemble engendré par la réunion de G et de a, d'où :

LEMME. — *La réunion d'un N-ensemble et d'un point arbitraire est un N-ensemble* (¹).

2. Rappelons maintenant une propriété des séries à termes positifs. Soit $f(x)$ une fonction croissant vers l'infini avec x et u_n le terme général d'une série divergente ($u_n > 0$). La série $\frac{u_n}{f(S_n)}$ est de même nature que la série $\frac{1'}{f(n)}$ (²).

Comme cas particulier, on retrouve en prenant $f = x$ ou x^2 le fait bien connu et utilisé ci-dessus que $\frac{u_n}{S_n}$ diverge, alors que $\frac{u_n}{S_n^2}$ converge.

3. Considérons alors un ensemble dénombrable e formé des points a_n. Reprenons $\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x|$. Soit p un entier croissant vers l'infini, fonction de n, mais inférieur à n, donc constant par paliers, que nous déterminerons ultérieurement. Le théorème du tiroir nous indique que l'on peut déterminer λ_n tel que

$$|\sin\lambda_n n\pi a_j| < \eta_n \qquad (j = 1, 2, \dots, p_n),$$

(¹) On peut, par exemple, désignant par S_n la somme $\sum_1^n \rho_n$ qui augmente indéfiniment avec n prendre $\eta_n = \frac{1}{S_n}$.

(¹) Cet énoncé a été signalé par M. R. Salem (a) qui signale l'extension évidente à un ensemble fini.

(²) Cet énoncé très général est peu connu, mais peut rendre de grands services. Il a été utilisé par M. A. Denjoy dans son *Mémoire fondamental sur les nombres dérivés* (*Journal de Liouville*, 1915, p. 168) et auparavant a été signalé comme exercice dans le *Cours d'Analyse* de M. de la Vallée-Poussin.

les η_n tendant vers o seront déterminés par des conditions ultérieures, et ceci est réalisé avec

$$\lambda_n < \left(\frac{1}{\eta_n}\right)^p.$$

Supposons l'existence d'une suite $\{\rho'_n\}$ telle que

$$\Sigma\rho'_n = \infty \qquad \text{et} \qquad \Sigma\rho'_n\eta_n < \infty$$

et considérons $\mathfrak{S}' = \Sigma\rho'_n|\sin\lambda_n n\pi x|$; en un point a_r dès que $p_n > r$,

$$\rho'_n|\sin\lambda_n n\pi a_r| < \rho'_n\eta_n.$$

Donc $\mathfrak{S}'$ converge en tout a_r.

En un point $b \in G$,

$$\rho'_n|\sin\lambda_n n\pi x| < \frac{\rho'_n}{(\eta_n)^p}|\sin n\pi x|,$$

$\mathfrak{S}'$ converge en b, si nous pouvons trouver des indéterminées p_n, η_n, ρ'_n, de telle sorte que

$$\frac{\rho'_n}{\eta_n^p} \leqq \rho_n.$$

Posons

$$\rho'_n = \rho_n\eta_n^p \qquad \text{et} \qquad \eta_n^p = \alpha_n.$$

Prenons $\alpha_n = S_n^{-1}$. Alors,

$$\Sigma\rho'_n = \sum\frac{\rho_n}{S_n} = \infty.$$

Il suffit alors de déterminer p_n de telle sorte que $\Sigma\rho_n\eta_n^{p+1} < \infty$, donc que la série $\sum\frac{\rho_n}{S_n^{1+\frac{1}{p_n}}}$ converge. D'après le théorème du paragraphe **2**, il suffit de prendre p_n de telle sorte que la série $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p_n}}}$ converge, ce qui est possible en prenant par exemple $n^{\frac{1}{p_n}} \geqq (\operatorname{Log} n)^2$, soit $p_n < \frac{\operatorname{Log} n}{2\operatorname{Log}\operatorname{Log} n}$. On pourra prendre la partie entière de cette expression, d'où :

Théorème [1]. — *La réunion d'un* N-*ensemble et d'un dénombrable arbitraire est encore un* N-*ensemble.*

4. *Conséquence.* — Soit une série

$$\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin\pi(nx + \varphi_n)|, \qquad \text{avec} \qquad \Sigma\rho_n = \infty$$

---

[1] M. R. Salem m'a signalé que ce théorème a été démontré par M. P. Erdös, mais non publié. La démonstration de M. Erdös repose sur le fait montré plus haut que si $\Sigma\rho_n|\sin_n\pi x| < \infty$ dans E, il existe une série

$$\Sigma r_n^{(1)}|\sin m_n^{(1)}\pi x| \qquad \text{avec} \qquad \Sigma r_n^{(1)} < \infty,$$
$$m_n^{(1)} > n \qquad \text{et} \qquad r_n^{(1)}|\sin m_n^{(1)}\pi x| \leqq \rho_n|\sin n\pi x|,$$

si $x \in E$ et qui converge sur $E \cup a_1$. Donc, on peut déterminer de proche en proche

$$\Sigma r_n^{(k)}|\sin m_n^{(k)}\pi x| < \infty \qquad \text{sur} \qquad E \cup a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_k;$$

et soit a un point quelconque de l'ensemble E de convergence. La série translatée $\mathfrak{S}_1 = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x|$ converge sur G déduit de E par la translation $-a$; on peut toujours supposer que l'on a adjoint le point a à G en considérant $\mathfrak{S}'_1 = \Sigma\rho'_n|\sin\lambda_n n\pi x|$ convergente sur G′ qui contient G et a; alors la série $\mathfrak{S}' = \Sigma\rho'_n|\sin\lambda_n\pi(nx + \varphi n)|$ converge sur un ensemble E′ qui contient l'origine, qui se déduit de G′ par la translation a, donc qui lui est identique. Ainsi $\mathfrak{S}'_1$ converge en tous les points de E.

Théorème. — *Un ensemble sur lequel converge absolument une série trigonométrique est un* N*-ensemble* (*au sens réduit*).

5. Nous avons vu que l'on pouvait adjoindre à un N-ensemble un dénombrable sans qu'il perde son caractère. Étant donné un N-ensemble E, nous dirons qu'*un ensemble* F *est permis pour* E, si E∪F est encore un N-ensemble; E et F sont permis l'un pour l'autre. Un dénombrable est permis pour tout N-ensemble. Étant donné un N-ensemble E, le fait de lui adjoindre un point a revient à lui adjoindre l'ensemble E′ déduit de E par la translation a. Il existe donc des ensembles ayant la puissance du continu, en particulier des ensembles parfaits, permis pour un ensemble N quelconque donné.

6. Soit P un ensemble parfait totalement discontinu. Nous pouvons lui associer une fonction $q(\eta)$, q étant le plus petit entier tel que P puisse être recouvert par q intervalles de longueur η. $q(\eta)$ est une fonction non décroissante et tend vers l'infini quand η tend vers zéro.

Soit, d'autre part, G l'ensemble où converge la série

$$\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x|.$$

Posons

$$\sum_{p=1}^{n}\rho_p = S_n.$$

Nous pouvons toujours supposer $S_n \leqq n$ en changeant au besoin les ρ_n sans que la nouvelle série cesse de converger en tout point de G.

Soient $\pi\alpha_i$ les abscisses gauches des q intervalles de longeur η ($i = 1, 2, \ldots, q$).

Nous pouvons choisir λ_n de façon que

$$(1) \qquad |\sin\lambda_n n\pi\alpha_i| < \pi\varepsilon_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

---

il suffit de déterminer N_k tel que

$$\sum_{N_{k-1}+1}^{N_k} r_n^{(k)} \geqq 1.$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{N_{k-1}+1}^{N_k} r_n^{(k)}|\sin m_n^{(k)}\pi x|\right)$ converge sur la réunion de E et des a_i.

les ε_n étant des quantités définies tendant vers o en décroissant, ceci avec

$$\lambda_n < \left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)^q.$$

Associons à n un η, donc un q d'une manière qui sera précisée tout à l'heure. Nous imposons pour l'instant à η de tendre vers o en décroissant avec $\frac{1}{n}$. La fonction $q(n)$ sera donc non décroissante.

Supposons, de plus,

$$(2) \qquad |\sin \lambda_n n\pi\eta_n| < \pi\varepsilon_n.$$

Alors, tout point y de P est égal à $\alpha_{i_n} + \theta\eta_n (0 \leqq \theta \leqq 1)$, donc pour tout y

$$(3) \qquad |\sin \lambda_n n\pi y| < 2\pi\varepsilon_n.$$

Considérons alors une série

$$\mathfrak{S}' = \Sigma\rho'_n |\sin \lambda_n n\pi x|.$$

Elle converge pour tout y si

$$(4) \qquad \Sigma\rho'_n\varepsilon_n < \infty.$$

De plus, $|\sin\lambda_n n\pi x| \leqq \lambda_n |\sin n\pi x|$. Si $x \in G$, $\mathfrak{S}'$ y converge si

$$(5) \qquad \rho'_n\lambda_n \leqq \rho_n.$$

Si toutes les hypothèses sont vérifiées, $\mathfrak{S}'$ converge sur la réunion $R = P \cup G$ qui est donc un N-ensemble à la condition

$$(6) \qquad \Sigma\rho'_n = \infty.$$

Restent à vérifier les hypothèses et à déterminer η_n. Prenons

$$(7) \qquad \rho'_n = \rho_n\varepsilon_n^{q_n}$$

et

$$(8) \qquad n\eta_n < \varepsilon_n^{q_n+1}$$

(2) et (5) sont alors vérifiées.

(4) et (6) le sont si

$$(9) \qquad \Sigma\rho_n\varepsilon_n^{q_n} = \infty,$$

$$(10) \qquad \rho_n\varepsilon_n^{q_n+1} < \infty.$$

Prenons, par exemple, $\varepsilon_n^{q_n} = \frac{1}{S_n}$ qui entraîne (9). Mais (8) nous laisse un choix pour η_n. Prenons $n\eta_n = \frac{1}{S_n^2}$ qui entraîne (8) dès que $q_n > 1$. Alors

$$(11) \qquad \eta_n = \frac{1}{nS_n^2}$$

tend vers o en décroissant en même temps qus $\frac{1}{n}$. η_n est alors déterminée. Reste seule à vérifier la condition (10), c'est-à-dire la convergence de $\sum \frac{\rho_n}{S_n^{1+\frac{1}{q_n}}}$. D'après le résultat rappelé au paragraphe 2, il suffit de pouvoir prendre $n^{\frac{1}{q_n}} > (\operatorname{Log} n)^2$, par exemple, soit

$$(12) \qquad q_n < \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}^{(2)} n} \quad (^1).$$

Mais

$$\operatorname{Log}\frac{1}{\eta_n} = \operatorname{Log} n + 2 \operatorname{Log} S_n,$$

d'où, d'après l'hypothèse faite sur S_n,

$$\operatorname{Log} n < \operatorname{Log}\frac{1}{\eta_n} < 3 \operatorname{Log} n,$$

$$\operatorname{Log}^{(2)} n < \operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{\eta_n} < \operatorname{Log}^{(2)} n + \operatorname{Log} 3.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}^{(2)} n} > \frac{1}{6}\,\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{\eta_n}}{\operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{\eta_n}};$$

(12) est donc réalisée si :

$$(13) \qquad q(\eta) < \frac{1}{6}\,\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{\eta_n}}{\operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{\eta_n}},$$

quel que soit η. Cette condition (²) exprime que la mesure de Haussdorf de P définie par la fonction $\dfrac{\operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{x}}{\operatorname{Log}\frac{1}{x}}$ est inférieure à $\frac{1}{6}$. On sait qu'il existe de tels ensembles parfaits, par exemple ayant à ce sens une mesure nulle.

La seule condition (13) imposée à P est intrinsèque, indépendante de l'ensemble G et de la série $\mathfrak{S}'$. La série $\mathfrak{S}'$ converge sur le groupe engendré par P.

Nous montrons ainsi l'existence d'une famille $\mathfrak{U}$ d'ensembles, tels que si $\mathfrak{N}$ désigne la famille des N-ensembles,

$$\mathfrak{U} \cup \mathfrak{N},$$

si $u \in \mathfrak{U}$, $n \in \mathfrak{N}$,

$$u \cup n \in \mathfrak{N},$$

u est permis pour tout n, en particulier

$$(u_1 \cup n) \cup u_2 = (u_1 \cup u_2) \cup n \in \mathfrak{N}.$$

Donc

$$u_1 \cup u_2 \in \mathfrak{U}$$

et, par suite, toute réunion finie d'ensembles u_i appartient à $\mathfrak{U}$. Comme de

---

(¹) Nous posons $\operatorname{Log}^{(2)} n = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} n)$.

(²) Cette condition peut certainement être améliorée. Le but ici n'est pas de rechercher tous les ensembles permis, mais d'en montrer l'existence.

toute évidence $u_1 \cap u_2, \in \mathfrak{U}$, il en résulte que la famille $\mathfrak{U}$ est douée d'une structure de treillis distributif (*cf.* Birkhoff),

Il résulte de là que si un ensemble parfait a une mesure de Haussdorf attachée à la fonction $\dfrac{\operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{x}}{\operatorname{Log}\frac{1}{x}}$ finie, il est réunion d'un nombre fini d'ensembles de même nature où cette mesure est inférieure à $\frac{1}{6}$, donc est permis pour tout N-ensemble. Nous aboutissons à l'énoncé suivant :

Théorème. — *Tout ensemble parfait dont la mesure de Haussdorf pour la fonction* $\dfrac{\operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{x}}{\operatorname{Log}\frac{1}{x}}$ *est finie est permis pour tout* N-*ensemble. En particulier, un tel ensemble* P *est toujours un* N-*ensemble. Si*

$$\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x|$$

converge sur un N-*ensemble donné* E, *il existe une série*

$$\mathfrak{S}' = \Sigma\rho'_n|\sin k_n\pi x|$$

convergente sur la réunion de E *et de* P *et inférieure terme à terme à la série* $\mathfrak{S}$.

Désignons par $\mathfrak{U}(n)$ la famille des ensembles v permis pour un n donné. Il est immédiat que

(1) si $n \in \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}(n) \supset \mathfrak{U}$;

(2) $\mathfrak{U}(a) = \mathfrak{U}$ si et seulement si $a \notin \mathfrak{V}$;

(3) $\mathfrak{U}(n \cup u) = \mathfrak{U}(n)$;

(4) $\mathfrak{U}(a) = 0$ si et seulement si $a \notin \mathfrak{U}$;

(5) $\mathfrak{U}(n_1 \cup n_2) \subset \mathfrak{U}(n_1) \cap \mathfrak{U}(n_2)$;

(6) $\mathfrak{U}(n_1 \cap n_2) \supset \mathfrak{U}(n_1) \cup \mathfrak{U}(n_2)$;

(7) si $a \subset b$, $\mathfrak{U}(a) \supset \mathfrak{U}(b)$.

Dans (5) l'inclusion ne peut être remplacée par l'égalité; il suffit, en effet, de prendre pour n_1 et n_2 deux N-ensembles dont la réunion n'est pas N.

8. Étude des ensembles permis. — La démonstration du paragraphe 6 montre qu'il existe des ensembles u permis pour tout N-ensemble tels de plus que si $\mathfrak{S}$ est une série convergeant sur N, il existe une série $\mathfrak{S}'$ convergeant sur $N \cup u$ et telle que chaque terme de $\mathfrak{S}'$ est inférieur au terme correspondant de $\mathfrak{S}$, ce que nous noterons $\mathfrak{S}' \leq \mathfrak{S}$. Il n'est pas prouvé que cette condition soit vérifiée pour tout u. Nous dirons que *u est permis pour* N *au sens restreint.*

Soit une infinité dénombrable d'ensembles $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots$, v_i, étant permis pour $N \bigcup_{j<i} v_j$ avec l'hypothèse de l'existence d'une série $\mathfrak{S}^{(i)} \leqq \mathfrak{S}^{(i-1)}$, de sorte que

$$\mathfrak{S} = \Sigma \rho_n \mid \sin n \pi x \mid,$$
$$\mathfrak{S}^{(1)} = \Sigma \rho_n^{(1)} \mid \sin \lambda_n^{(1)} \pi x \mid \quad \text{sur} \quad N \cup v_1,$$
$$\mathfrak{S}^{(k)} = \Sigma \rho_n^{(k)} \mid \sin \lambda_n^{(k)} \pi x \mid \quad \text{sur} \quad N \cup v \cup v_2 \cup \ldots \cup v_k$$

Prenons

$$\rho_n \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots, n_0,$$
$$\rho_n^{(1)} \quad \text{pour } n_0 < n \leqq n_1,$$
$$\rho_n^{(k)} \quad \text{pour } n_{k-1} < n \leqq n_k,$$

les n_i étant choisis de telle sorte que

$$\sum_{n_{k-1} < n \leq n_k} \rho_n^{(k)} \geqq 1,$$

la série des ρ ainsi obtenue est divergente.

Mais

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \rho_n^{(k)} \mid \sin \lambda_n^{(k)} \pi x \mid < \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \rho_n \mid \sin n \pi x \mid,$$

donc sur N la série

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \rho_n^{(k)} \mid \sin \lambda_n^{(k)} \pi x$$

converge.

Si un élément a appartient à $\bigcup_i v_i$, il appartient nécessairement à au moins un des v_i soit v_j; mais pour $k \geqq j$

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \rho_n^{(k)} \mid \sin \lambda_n^{(k)} \pi a \mid \leqq \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \rho_n^{(j)} \mid \sin \lambda_n^{(j)} \pi a \mid,$$

donc le reste de rang j de la série (1) pour $x = a$ est moindre que

$$\sum_{n=n_j}^{\infty} \rho_n^{(j)} \mid \sin \lambda_n^{(j)} \pi a \mid < \infty,$$

La série (1) converge ainsi sur $N \cup V$, d'où :

Théorème. — *La réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles v_i permis au sens resteint pour $E \bigcup_{j<i} v_j$ est permise pour E au sens restreint.*

Conséquences. — 1° Prenons, en particulier, pour ensemble v des ensembles u.

Théorème. — *Si $\mathfrak{U}_1$ désigne la famille des ensembles permis au sens restreint pour tout ensemble, toute réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}_1$ y appartient également.*

En particulier, les ensembles parfaits étudiés plus haut sont permis au sens restreint. Une réunion dénombrable de tels ensembles est un F_σ dont la mesure au sens défini plus haut est dénombrablement finie. Inversement, un F_σ ayant une telle mesure dénombrablement finie est réunion d'un dénombrable et d'une famille dénombrable de parfaits de mesure finie donc est aussi permis au sens restreint.

Théorème. — *Tout ensemble* E, *de type* F_σ *ayant une mesure de Haussdorf définie par* $\dfrac{\operatorname{Log}^{(2)}\frac{1}{x}}{\operatorname{Log}\frac{1}{x}}$ *dénombrablement finie est permis au sens restreint pour tout* N-*ensemble.*

2° Soit $\{A_i\}$ une suite croissante d'ensembles N, tels que chaque A_i soit permis au sens restreint pour A_{i-1}, que nous appellerons une *suite restrictivement croissante de* N-*ensembles.* Posons

$$A_{i+1} - A_i = B_i \ (A_i \cap B_i = 0),$$

B_i est permis au sens restreint pour A_i, donc pour $A_1 \bigcup_{j<i} B_j =$ et, par suite $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ est permis au sens restreint pour A_1, c'est-à-dire que $\bigcup A_i$ est un N-ensemble, d'où :

Théorème. — *La réunion d'une suite restrictivement croissante de* N-*ensembles est un* N-*ensemble.*

Il serait intéressant de voir si l'on pourrait supprimer dans cet énoncé le mot restrictivement. La question reste ouverte.

CHAPITRE IV.

Étude de quelques propriétés des groupes de T et applications aux séries trigonométriques.

1. Les groupes du tore T^1, c'est-à-dire les groupes pour l'addition des nombres du segment $[0, 1]$ définis modulo 1 ont déjà été étudiés (en particulier, Lomicki (a). On peut en obtenir aisément au moyen d'une base de Hamel. Soit $\mathfrak{B}$ une telle base; l'ensemble des points $\Sigma a_i x_i$ où a_i est entier; $x_i \in \mathfrak{B}$, le Σ ne contenant qu'un nombre fini de termes est un tel groupe. Si la base $\mathfrak{B}$ est prise non mesurable (*cf.* Sierpinski Fund, t. I), le groupe sera lui-même non mesurable. Si un tel groupe est mesurable, il est nécessairement de mesure nulle à moins qu'il ne coïncide avec T_1 (*voir* Zygmund).

On peut sur de tels ensembles effectuer certaines opérations que nous avons rencontrées à propos des séries trigonométriques.

Soit G un tel groupe et D un ensemble dénombrable. Désignons par $\mathfrak{G}$ le groupe engendré par G et D; un point quelconque de $\mathfrak{G}$ est somme d'un point de G et d'un point du groupe $\mathfrak{D}$ engendré par D (ensemble des points $\Sigma\lambda_i\alpha_i$, où $\alpha_i \in D$ et λ_i entier avec $\Sigma|\lambda_i|$ fini). Si $\mathfrak{G}$ coïncidait avec T^1, il serait possible de décomposer T^1 en une infinité dénombrable d'ensembles congrus à G, ce qui est impossible si G est mesurable.

Théorème. — *La réunion d'un groupe de mesure nulle et d'un dénombrable arbitraire engendre un groupe de mesure nulle.*

Corollaire. — *La réunion d'une infinité dénombrable de groupes mesurables et se déduisant l'un de l'autre par translation est encore un groupe mesurable et de mesure nulle*, car si t_i est la translation qui fait passer de l'un d'eux à un autre quelconque, il suffit d'adjoindre au premier l'ensemble dénombrable formé des t_i.

En particulier, un tel groupe ne peut contenir un segment si petit soit-il, donc :

Les groupes G sont discontinus.

Il est nécessaire d'imposer au groupe G une condition supplémentaire comme la mesurabilité. Soit, en effet, $\mathfrak{D}$ un groupe dénombrable et X le quotient $T/\mathfrak{D}$. Si nous prenons un représentant de chaque élément de ce groupe, nous obtenons un groupe $\mathfrak{G} \subset T^1$, tel que tout élément de T^1 est la réunion d'un élément de $\mathfrak{G}$ et d'un élément de $\mathfrak{D}$. Au groupe $\mathfrak{G}$, il est impossible d'adjoindre le dénombrable $\mathfrak{D}$ comme dans le théorème précédent. On en déduit que, quel que soit le groupe $\mathfrak{G}$ choisi, il est non mesurable.

2. **Définition.** — Soit E un ensemble quelconque; soit G le groupe engendré par E (ensemble des points $\Sigma\lambda_i x_i$, $x_i \in E$ et $\Sigma|\lambda_i|$ fini). Si G coïncide avec l'ensemble R des nombres réels, nous dirons que E est générateur du continu ou qu'il est *touffu*; dans le cas contraire, E sera dit *lâche*.

On pourra se contenter de $\lambda \geqq 0$ si l'on est sûr d'avoir un ensemble symétrique par rapport à l'origine.

Soit ξ un nombre réel quelconque et E un ensemble, nous désignerons par ξE l'ensemble dont les points sont obtenus à partir de ceux de E par la multiplication par ξ.

Théorème d'homothétie. — *Les ensembles* E *et* ξE *sont de même nature.*

En effet, soit $\alpha_i \in E$ (λ_i entier), $\Sigma|\lambda_i| < \infty$; si $\Sigma\lambda_i\alpha_i$ engendre tout le continu $\xi\Sigma\lambda_i\alpha_i = \Sigma\lambda_i(\xi\alpha_i)$ engendre aussi tout le continu.

Réciproquement, si $\Sigma\lambda_i(\xi\alpha_i)$ donne un point arbitraire, $\Sigma\lambda_i x_i$ donne un point arbitraire en divisant par ξ.

Ce théorème vaut aussi pour les séries trigonométriques, même en supposant les coefficients k_n entiers.

Si $\Sigma\rho_n\,|\sin n\pi x|$ converge sur E, $\Sigma\rho_n \left|\sin \frac{n}{\xi}\pi(\xi x)\right|$ converge sur E. Il suffit alors d'appliquer le théorème (1re partie, chap. II, § 1).

Théorème. — *Si* E *est* N-*ensemble*, ξE *est un* N-*ensemble quel que soit* E.

3. Le groupe engendré par un ensemble E sur le groupe R est constitué par les points $\Sigma\lambda_i\alpha_i$, le Σ est fini, mais $\Sigma|\lambda_i|$ n'est pas nécessairement borné. Si l'ensemble est touffu, obtient-on tous les points avec $\Sigma\lambda_i$ borné ? La réponse est affirmative. La démonstration repose sur le fait qu'un ensemble épais (ou de deuxième catégorie) est générateur du continu avec $\Sigma|\lambda_i|$ borné.

Considérons l'ensemble σ_n, ensemble des $x=\Sigma\lambda_i\alpha_i$, $\alpha_i\in$ E et $\Sigma|\lambda_i|\leqq n$. Si tous les σ_n sont de mesure nulle, leur réunion l'est encore et, par suite E est lâche. Si E est touffu, il existe un entier n_0 tel que σ_n soit de mesure positive pour $n\geqq n_0$. L'ensemble des points $x+y(x, y\in\sigma_{n_0})$ contient un intervalle i et est identique à σ_{2n_0}; en formant les σ_n relatifs à i, on peut arriver en prenant n assez grand à un intervalle aussi grand que l'on désire. Ainsi,

Théorème. — *Si un ensemble* E *est touffu, quel que soit* K, *tout point x tel que $|x|<$ K peut être mis sous la forme $\Sigma\lambda_i\alpha_i$, $\alpha_i\in$ E et $\Sigma|\lambda_i|$ borné par un nombre* Θ(K).

Dans ce qui précède, nous avons considéré des ensembles de R; les résultats subsistent-ils si l'on définit les points modulo 1, c'est-à-dire pour des ensembles de T ? Considérons deux ensembles A$\subset$T et B$\subset$R tel que tout point de A soit congru modulo 1 à au moins un point de B et inversement. Ajoutons à A le point 1 et à B les points entiers, ce qui ne change pas leur nature. Désignons par B_i la partie de B comprise dans $]i-1, i]$.

Effectuons sur A les translations entières. Nous obtenons un ensemble $A^+\subset R$. Il est évident que $B\subset A^+$. Donc, si B est touffu, A^+ l'est aussi; tout point $x_0\in R$ peut alors s'écrire $\Sigma\lambda_i a_i^+$. avec $a_i^+\in A^+$ et $\Sigma|\lambda_i|<\infty$, mais

$$a_i^+=a_i+p_i \quad (a_i\in A;\ p_i \text{ entier}),$$

donc

$$x_0=\Sigma\lambda_i a_i+\Sigma\lambda_i p_i$$

et, par suite, s'obtient comme combinaison finie de points de A qui est donc touffu.

Si A est touffu, A^+ l'est aussi; tout point x_0 s'écrit $\Sigma\lambda_i a_i$, mais à a_i correspond dans B au moins un point b_i tel que $b_i=a_i+t_i$ (t_i entier), donc

$$x_0=\Sigma\lambda_i b_i-\Sigma\lambda_i t_i=\Sigma\lambda_i a_i.$$

Le groupe engendré par A^+ s'obtient donc à partir de celui engendré par B par une infinité dénombrable de translations; ils sont de même nature et, par suite, B est touffu. Donc

Théorème. — *Deux ensembles mesurables dont les points sont congrus* (*modulo* 1) *sont de même nature* (*touffus ou lâches*).

4. Considérons une suite $\{\xi_n\}$, ξ_n étant un nombre réel compris entre zéro et $\frac{1}{2}$.

Soit $[ab]$ un segment, nous le partageons en trois parties respectivement proportionnelles à ξ_1, $1-2\,\xi_1$, ξ_1 et nous enlevons l'intervalle médian; puis chacun des deux intervalles restants est partagé en trois parties proportionnelles à ξ_2, $1-2\,\xi_2$, ξ_2 et l'intervalle médian est enlevé à la $n^{\text{ième}}$ opération, il nous reste 2^{n-1} segments de longueur $ab\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}$ et chacun est partagé en trois portions de longueurs proportionnelles à ξ_n, $1-2\,\xi_n$, ξ_n et l'intervalle médian est enlevé. L'opération est continuée indéfiniment. Il reste un ensemble parfait P que nous appellerons, avec M. Salem, un parfait symétrique.

Théorème. — *Un parfait symétrique est lâche ou touffu en même temps qu'une quelconque de ses portions (partie de l'ensemble comprise entre deux points).*

Si l'ensemble P est lâche, il n'engendre pas tout le continu, il est évident que la partie n'engendre pas plus.

Soit p_n une partie élémentaire de P localisée sur un intervalle restant à l'opération n; l'ensemble a 2^n parties égales. Soit (h) le groupe engendré par p_n. C'est l'ensemble des points $\Sigma\lambda_i\alpha_i$, $\alpha_i \in p$; faisons-lui correspondre l'ensemble des points $(\mathcal{H})$ de la forme $\Sigma\lambda_i\beta_i$, où $\beta_i \in P$ et se déduit de α_i par une translation. $(\mathcal{H})$ se déduit de (h) par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles égaux à (h) et, par suite, est lâche ou touffu en même temps que (h).

Soit maintenant $\mathcal{T}$ une portion quelconque de P, elle est comprise dans une partie élémentaire d'ordre n et elle comprend une partie élémentaire d'ordre n'. $\mathcal{T}$ est donc de même nature que l'ensemble P.

En particulier, on pourra prendre une portion aussi petite que l'on veut entourant un point x_0 de P. Si cette portion est lâche (ou touffue), on dira que P est lâche (ou touffu) en x_0. On voit que : *si un parfait symétrique est touffu, il l'est en chaque point.*

Lemme. — *Les deux parfaits symétriques définis sur le même segment ab par les deux suites $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, et $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, sont de même nature.*

On peut toujours supposer que ab est le segment 0, 1 en faisant au besoin une translation $-a$ et une homothétie $\frac{1}{ab}$ qui ne changent pas la nature des parfaits.

Soient P_1 et P_2 les deux ensembles. Avec les notations de M. Salem, un point de P_1 peut s'écrire

$$\alpha_1 = \theta_1 + \xi_1\theta_2 + \xi_1\xi_2\theta_3 + \ldots + \xi_1\xi_2\ldots\xi_{p-1}\theta_p + \ldots,$$

où θ_p est égal soit à zéro, soit à $1-\xi_p$; de même un point de P_2 sera

$$\alpha_2 = \theta_2 + \xi_2\theta_3 + \xi_2\xi_3\theta_4 + \ldots + \xi_2\xi_3\ldots\xi_{p-1}\theta_p + \ldots$$

On voit que

$$\alpha_1 = \theta_1 + \xi_1\theta_2, \qquad \theta_1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1-\xi_1.$$

Mais P_2 et $\xi_1 P_2$ sont de même nature. P_1 est réunion de deux parties congrues à $\xi_1 P_2$ d'où le résultat et l'extension immédiate.

Théorème. — *On peut supprimer dans la suite $\{\xi_n\}$ un certain nombre de termes au début sans changer la nature du parfait symétrique.*

Autrement dit,

La nature du parfait symétrique est une propriété asymptotique de $\{\xi_n\}$.

5. M. Salem a montré que l'ensemble symétrique défini par la suite $\xi_n = \xi$ constant est une base de convergence. Il est possible d'étendre ce résultat.

Théorème. — *Pour un parfait symétrique* P *défini par une suite* $\{\xi_n\}$, *si* ξ_n *est borné inférieurement par un nombre positif, l'ensemble est touffu.*

Désignons, en effet, par $k-1$ le plus grand entier contenu dans $1/\min \xi_n$; on voit que, quel que soit n,

$$k > \frac{1}{\xi_n} - 1, \qquad k\xi_n > 1 - \xi_n. \tag{1}$$

Considérons un ensemble parfait Q. L'ensemble Q_2 dont les points sont $x+y$, avec $x \in Q\, y \in Q$, est parfait. On peut le considérer comme intersection de ses segments noirs. Soit ξ un point de 1^{re} espèce gauche et η la longueur d'un intervalle de subdivision obtenu à l'opération de rang q dans la construction de Cantor de Q, alors que ξ apparaît à l'opération de rang $p < q$. Le segment $[\xi, \xi+\eta]$ appartient certainement à un segment noir de Q_2 pour les opérations de rang au plus égal à q.

Il est possible de continuer et de définir des parfaits successifs Q_r pour $r = 1, 2, \dots, n$; $Q_1 = Q$ et Q_r est l'ensemble dont les points sont $\sum_{i=1}^{r} x_i (x_i \in Q)$. On voit, du reste, que tout point de Q_{r+s} est somme de deux points de Q_r et de Q_s.

Pour que Q soit touffu, il faut et il suffit que la réunion des Q_r donne un segment complet et, d'après le théorème du paragraphe 3, qu'à partir d'un certain rang Q_r comprenne tout un segment. Comme Q_r est parfait, à chaque opération ses segments noirs doivent recouvrir tout un intervalle fixe.

Montrons que ceci a lieu pour l'ensemble P avec l'ensemble P_k, k étant défini plus haut. Désignons par α une extrémité gauche d'ordre n. Nous obtenons des segments contenus dans des segments noirs de P_k en considérant les points $I = \Sigma\lambda_i\alpha_i (\alpha_i \in P, \Sigma\lambda_i < k)$ comme extrémités gauches et en leur ajoutant des segments de longueur $\xi_1\xi_2\dots\xi_n$ en nombre égal à k. Mais ces segments se recouvre certainement si la distance de deux I est, au plus, $k\xi_1\xi_2\dots\zeta_n$.

Si $n = 1$, la distance de deux I est $1 - \xi_1 < k\xi_1$, d'après (1).

Supposons qu'à l'opération p, la plus grande distance de deux I successifs soit inférieure à $k\xi_1\xi_2\dots\xi_p$. Les extrémités gauches d'ordre p, α_i sont de la forme

$$\theta_1 + \xi_1\theta_2 + \xi_1\xi_2\theta_3 + \dots + \xi_1\xi_2\dots\xi_{p-1}\theta_p,$$

avec θ_i égal soit à zéro, soit à $1 - \xi_i$.

Si nous passons à l'ordre $p+1$, nous obtenons des points I comprenant les anciens d'ordre p et de nouveaux obtenus en ajoutant à ceux-ci des segments de longueur

$$\sigma_{p+1} = \xi_1\xi_2\dots\xi_{p-1}\xi_p(1 - \xi_{p+1}),$$

en nombre au plus égal à k. Cette distance reste encore inférieure à $k\xi_1\xi_2\ldots\xi_p\xi_{p+1}$, d'après (1).

Soient deux I d'ordres successifs I_1 et I_2. Si à I_1 on ajoute k fois σ_{p+1}, soit $k\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\xi_{p+1}$, on n'atteint peut-être pas I_2. Mais la distance reste inférieure à

$$k\xi_1\xi_2\ldots\xi_p - k\xi_1\xi_2\ldots\xi_p(1-\xi_{p+1}) = k\xi_1\xi_2\ldots\xi_{p+1},$$

donc la loi est vérifiée pour l'opération $p+1$ et, par suite, quel que soit p. Les segments considérés forment un recouvrement et, par suite, P_k se confond avec un segment et P est touffu.

Corollaire. — *P étant un parfait symétrique, pour lequel ξ_n est borné inférieurement par un nombre positif, si une série trigonométrique converge absolument en tous les points de P, elle converge absolument partout et la série des coefficients converge.*

Le théorème précédent admet une réciproque :

Supposons, en effet, que P soit touffu; il existe donc un entier $q > 0$ tel que P_r remplit un segment pour tout $r \geqq q$. D'autre part, tout point de ce segment peut être écrit comme combinaison linéaire des points de P avec $\Sigma\lambda_i$ borné par k. Désignons par m le plus grand des deux entiers q et k. Quand nous formons P_m à l'opération d'ordre n, nous obtenons des points $\Sigma\lambda_i\alpha_i$, où α_i est de première espèce gauche, l'un de ces points est à l'origine, le suivant est $\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}(1-\xi_n)$. Pour que P_m soit confondu avec un segment contenant l'origine, il est nécessaire que pour tout n, on ait

$$\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}(1-\xi_n) < m\xi_1\xi_2\ldots\xi_n,$$

donc

$$1-\xi_n < m\xi_n,$$

$$\xi_n > \frac{1}{m+1},$$

donc $\underline{\lim}\,\xi_n > 0$, ainsi

Théorème. — *Un parfait P défini par une suite ξ_n est touffu, si et seulement si $\underline{\lim}\,\xi_n > 0$.*

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Étude des ensembles N_0.

1. La plupart des exemples que l'on peut atteindre aisément sont tels qu'il existe une série évidente à coefficients ne tendant pas vers zéro convergente sur l'ensemble. Citons, en particulier, les ensembles de convergence absolue normale, de même dans l'exemple de Marcinkiewicz, les deux ensembles P_1, P_2 en lesquels nous décomposons P appartiennent à cette catégorie.

Définition. — Il nous sera commode de dire qu'un *ensemble* E *est de type* N_0 s'il existe une série $\mathfrak{S} = \Sigma |\sin k_n \pi x|$ convergente sur E, $\{k_n\}$ étant une suite d'entiers croissante. Il est inutile, dans ce cas, de vérifier que $\Sigma\rho_n = \infty$. donc $\mathfrak{S}$ ne peut converger partout. Il est évident que si $\mathfrak{S}$ converge sur N_0, toute série $\mathfrak{S} = \Sigma |\sin k_{n_i} \pi x|$, où $\{k_{n_i}\}$ désigne une suite partielle de $\{k_n\}$ toujours infinie, converge aussi sur N_0.

2. Il est possible de montrer que la classe des ensembles de type N_0 possède encore certaines des propriétés que nous avons montrées dans le cas général.

Soient E l'ensemble de convergence de $\mathfrak{S} = \Sigma |\sin k_n \pi x|$ et a un point quelconque. Si $\lim |\sin k_n \pi a| = 0$, on peut extraire une suite $\{k_{n_j}\}$ de $\{k_n\}$ telle que $|\sin k_{n_j} \pi a\}$ tende vers zéro et même plus vite qu'une suite donnée ε_j assurant la convergence de $\Sigma |\sin k_{n_j} \pi a|$.

Si $\underline{\lim} |\sin k_n \pi a| > 0$, $|\sin k_n \pi a|$ a au moins un point d'accumulation $\sin \alpha\pi$, $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$, on peut donc extraire de $\{k_n\}$ une suite partielle $\{k_{n_i}\}$ pour laquelle $|\sin k_{n_i} \pi a|$ tende vers $\sin \alpha\pi$, puis une suite partielle de celle-ci k_{n_j} telle que $k_{n_j} \pi a$ reste dans le même quadrant, de sorte que, $k_{n_j} a = \beta + \theta_j (\operatorname{mod} 2)$, avec θ_j tendant vers zéro, β étant un des nombres inférieurs à 2 où $|\sin \beta\pi| = \sin \alpha\pi$. On voit alors que la suite $h_j = k_{n_{j+1}} - k_{n_j}$ est telle que $|\sin h_j \pi\alpha|$ tend vers zéro. On peut toujours restreindre les j pour assurer la convergence de $\Sigma |\sin h_j \pi a|$, mais sur E

$$\Sigma |\sin h_j \pi x| \leqq \Sigma |\sin k_{n_j} \pi x| + \Sigma |\sin k_{n_{j+1}} \pi x| < \infty,$$

la nouvelle série converge encore sur E. Donc :

Théorème. — *Si à un ensemble* N_0 *on adjoint un point, la réunion est encore du type* N_0.

Il est bien évident que l'énoncé s'étend à l'adjonction d'un nombre fini de points.

Considérons un ensemble dénombrable $\{a_n\}$, on peut répéter l'opération pour chaque a_n en restreignant la suite obtenue pour a_{n-1}. Donnons-nous une suite de nombres positifs décroissante et tendant vers zéro, $\{\varepsilon_j\}$ telle que $\Sigma\varepsilon_j < \infty$. On peut trouver une suite $S_1 = \{k_j^1\}$ telle que

$$k_j^1 a_1 = \beta_1 + \theta_j^1, \qquad |\theta_j^1| < \varepsilon_j;$$

de S_1 on extrait une suite partielle $S_2 = \{k_j^2\}$ telle que

$$k_1^2 = k_1^1 \quad \text{et} \quad k_j^2 a_2 = \beta_2 + \theta_j^2, \qquad |\theta_j^2| < \varepsilon_j \quad \text{pour } j \geqq 2;$$

S_{p-1} étant définie, on en extrait $S_p = \{k_j^p\}$ telle que

$$k_j^p = k_j^{p-1} \quad \text{pour } j < p; \qquad k_j^p a_p = \beta_p + \theta_j^p, \qquad |\theta_j^p| < \varepsilon_j \quad \text{pour } j \geqq p$$

et ceci pour tout entier.

Alors, la suite diagonale $\mathfrak{S} = \{k_i^i\}$ est telle que

$$k_i^i a_r = \beta_r + \theta_i^r, \qquad |\theta_i^r| < \varepsilon_r \quad \text{pour } i \geqq r.$$

On voit alors que si l'on pose $k_{i+1}^{i+1} - k_i^i = m_i$, la série $\Sigma|\sin m_i \pi x|$ converge en chaque point a_r et converge encore sur E. Ainsi,

THÉORÈME. — *La réunion d'un dénombrable et d'un* N_0-*ensemble est encore de type* N_0.

3. Soit maintenant k_n une suite donnée croissante, tendant vers l'infini de nombres réels. Supposons que E soit l'ensemble de convergence de la série $\Sigma|\sin k_n \pi x|$. Posons $k_n = p_n + \theta_n$ ($0 < \theta_n < 1$), les θ_n ont au moins un point d'accumulation a. Considérons une suite d'entiers n_i telle que $|\theta_{n_{i+1}} - \theta_{n_i}| < \varepsilon_i$, $\{\varepsilon_i\}$ étant une suite donnée avec $\Sigma\varepsilon_i < \infty$

$$|\sin(p_{n_{i+1}} - p_{n_i})\pi x| \leq |\sin k_{n_{i+1}} \pi x| + |\sin k_{n_i} \pi x| < 2\pi\varepsilon_i.$$

Si $m_i = p_{n_{i+1}} - p_{n_i}$, la série $\Sigma|\sin m_i \pi x|$ converge au moins sur E, donc, puisque l'on peut prendre les p_n entiers :

THÉORÈME. — *Si une série* $\Sigma|\sin k_n \pi x|$, (k_n *réel*), *converge sur un ensemble* E, *il existe une série* $\Sigma|\sin m_i \pi x|$ *qui converge au moins sur* E; E *est de type* N_0.

On a la conséquence immédiate :

THÉORÈME. — *Si* E *est un ensemble de type* N_0, *tout ensemble* αE *où* α *est constant est aussi de type* N_0.

4. M. R. Salem (b) a montré que l'ensemble de convergence d'une série $\Sigma\rho_n \sin^2 n\pi x$ est un N-ensemble. Il est possible également de considérer des ensembles sur lesquels convergent les séries $\Sigma\rho_n |\sin n\pi x|^p$, p étant un nombre réel quelconque. Un tel ensemble sera dit du type N^p et sera du type N_0^p si les ρ_n sont égaux à zéro sauf pour une suite partielle n_k où ils sont égaux à 1.

THÉORÈME. — *Un ensemble de type* N^p *est un* N-*ensemble*.

La démonstration généralise celle que M. Salem a donnée dans le cas particulier $p = 2$.

Soit S_n la somme de rang n de la série $\Sigma\rho_n$. Posons

$$(1)\qquad u_n = S_n^q - S_{n-1}^q,$$

q étant un nombre positif inférieur à 1 qui sera déterminé ultérieurement. Nous avons, par application de l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{n=1}^{r} u_n |\sin n\pi x| < \left[\sum_{n=1}^{r}\left(\frac{u_n}{\rho_n^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{r} \rho_n |\sin n\pi x|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il suffit donc de déterminer q pour que

$$(2)\qquad \Sigma u_n = \infty.$$

$$(3)\qquad \Sigma\left(\frac{u_n}{\rho_n^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p}{p-1}} < \infty.$$

Or (2) est entraîné par (1), puisque S_n tend vers l'infini. D'autre part,

$$\frac{u_n}{\frac{1}{\rho_n^p}} = \frac{S_n^q - S_{n-1}^q}{\frac{1}{\rho_n^p}} = \frac{S_n^q\left[1-\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^q\right]}{\frac{1}{\rho_n^p}},$$

$\frac{S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{\rho_n}{S_n}$ tend vers 1, le quotient équivaut à

$$\frac{S_n^q q \frac{\rho_n}{S_n}}{\frac{1}{\rho_n^p}} = q\frac{\rho_n^{1-\frac{1}{p}}}{S_n^{1-q}};$$

(3) est donc vérifiée si la série de terme général

(4) $$\frac{\rho_n}{\frac{p(1-q)}{S_n^{p-1}}} = \frac{\rho_n}{S_n^\alpha}$$

converge. Or on sait (1re partie, chap. III, § 2) que cela a lieu si la série $\frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc si $q < \frac{1}{p}$.

La démonstration suppose $p > 1$, mais le résultat est évident dans le cas contraire, comme est trivial le fait que tout ensemble de type N^p est de type N^q si $p < q$.

5. Théorème. — *L'ensemble de convergence d'une série* $\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n|\sin n\pi x|^p$ *est un groupe additif.*

Nous avons vu que cet ensemble est un N-ensemble (si $\Sigma\rho_n = \infty$), donc il est discontinu.

Il est évident que la série $\mathfrak{S}$ converge en zéro, converge aussi pour $-x$, si elle converge pour x. La propriété résulte de l'inégalité

$$|\sin(a+b)|^p \leq 2^{p-1}(|\sin a|^p + |\sin b|^p).$$

Si $S(x)$ désigne la somme de la série $\mathfrak{S}$ au point x, on voit que

$$m \leq S(a+b) \leq 2^{p-1}[S(a)+S(b)],$$
$$m = \max\left[\left|\frac{S(a)}{2^{p-1}} - S(b)\right|, \left|S(a) - \frac{S(b)}{2^{p-1}}\right|\right].$$

6. La démonstration de l'adjonction d'un dénombrable à un N_0 (§ 2) repose sur le fait que l'on peut trouver une suite h_j telle que $|\sin h_j\pi a|$ tend vers zéro avec $\frac{1}{j}$. On peut toujours restreindre la suite h_j pour que la série $\Sigma|\sin h_j\pi a|^p$ converge. Donc :

Théorème. — *La réunion d'un dénombrable et d'un ensemble du type* N_0^p *est encore du type* N_0^p.

Pour la même raison, subsiste le théorème d'homothétie.

7. On peut même aller plus loin dans cette classification. Considérons une fonction $f(x)$ croissante pour $x > 0$, nulle à l'origine et dont la dérivée a les mêmes propriétés. $f'(x)$ est donc croissante. Les fonctions x^p satisfont à ces conditions. Mais il existe de telles fonctions plus petites au voisinage de l'origine que x^p, et ce quel que soit p. Nous dirons que de telles fonctions appartiennent à la classe (γ). On sait qu'à une fonction f de cette classe, on peut associer une fonction g, sa complémentaire de Young (*cf.* Zygmund, p. 64) et que pour tout couple ab, on a la propriété

$$ab \leqq f(a) + g(b).$$

On sait que f' et g' sont deux fonctions inverses. $g'(x)$ tend vers zéro avec x, de sorte que $g(x) = x\,o(x)$.

Considérons la série $\sum \frac{1}{p} o\left(\frac{1}{p}\right)$. On peut déterminer p_n tel que

$$\sum \frac{1}{p_n} o\left(\frac{1}{p_n}\right) < \infty, \qquad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{p_n} = \infty,$$

Soit alors la série

$$(1) \qquad \Sigma f(\,|\sin k_n \pi x|\,) \qquad [f \in (\Upsilon)]$$

et soit E l'ensemble sur lequel elle converge. On peut déterminer une série trigonométrique

$$(2) \qquad \mathfrak{S} = \Sigma u_n \,|\sin k_n \pi x\,|$$

convergente sur E sans converger partout. Nous dirons que E est un ensemble de type N_0^f. Tout ensemble N_0^f est un N-ensemble.

Il suffit de prendre, en effet, $u_n = \frac{1}{p_n}$ et d'appliquer l'inégalité de Young

$$\Sigma u_n \,|\sin k_n \pi x\,| \leqq \Sigma f(\,|\sin k_n \pi x\,|\,) + \Sigma g\left(\frac{1}{p_n}\right).$$

Remarquons que l'ensemble E n'est plus nécessairement un groupe, car $\frac{f(a+b)}{f(a)+f(b)}$ et, en particulier, $\frac{f(2a)}{f(a)}$ n'est pas borné. Il peut donc exister des x tels que

$$\Sigma f(\,|\sin k_n \pi x\,|\,) < \infty,$$

mais pour lesquels

$$\Sigma f(\,|\sin 2 k_n \pi x\,|\,) = \infty.$$

La série (2) convergera pourtant sur tout le groupe engendré par l'ensemble E.

8. Considérons une suite croissante d'entiers $\{k_n\}$ suffisamment lacunaire pour que $|\sin k_n \pi x|$ puisse tendre vers zéro, pour certains x. Ceux-ci forment un groupe $\mathfrak{G}$, car

$$|\sin k_n \pi (a+b)| \leqq \sin k_n \pi a\,| + |\sin k_n \pi b\,|.$$

On peut donc considérer des sous-groupes $\mathfrak{G}_f$ de $\mathfrak{G}$ constitués par les groupes engendrés par les ensembles E_f tels que la série (1) converge sur E_f. Ces $\mathfrak{G}_f$ sont tous des N-ensembles, quelle que soit la fonction f. Il est évident qu'il pourra exister dans $\mathfrak{G}$, quelle que soit la fonction f des points x tels que $|\sin k_n \pi x|$ tende vers zéro plus lentement que $f\left(\frac{1}{n}\right)$, de sorte que $\mathfrak{G}$ ne s'identifie avec aucun $\mathfrak{G}_f$. Ainsi, si l'on prend $k_n = 2^{2^n}$, on peut toujours déterminer un entier ω_n tel que

$$\Sigma f\left(\frac{1}{2^{\omega_n}}\right) = \infty,$$

la série $\Sigma f(|\sin 2^{2^n} \pi x|)$ diverge au point

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n + \omega_n}}.$$

Nous posons donc un double problème :

A. Un N-ensemble quelconque est-il de type N_0^f pour une suite $\{k_n\}$ et une fonction f convenables ?

B. Un ensemble $\mathfrak{G}$ est-il un N-ensemble ?

CHAPITRE II.

Suites de limite nulle.

1. Dans tout ce chapitre, k_n désignera toujours une suite croissante d'entiers Dans le but de résoudre le problème A au chapitre suivant, nous avons besoin de certains résultats qu'il est intéressant d'isoler.

Lemme 1. — *Si la série* $\mathfrak{S} = \Sigma |\sin k_n \pi x|$ *converge en tous les points dyadiques, à partir d'un certain rang,* k_n *est de la forme* $2^{r_i} m_i$, *avec* m_i *impair et* r_i *tendant vers l'infini avec* i.

Dans le cas contraire, en effet, r_i prendrait une infinité de fois, des valeurs inférieures à un nombre M. En restreignant au besoin la suite des k_n, on pourrait supposer r_i constant, mais alors si $x = \frac{1}{2^{r_i+1}}$,

$$|\sin k_n \pi x| = \left|\sin \frac{\pi m_i}{2}\right| = 1$$

ne tend pas vers zéro, la série $\mathfrak{S}$ diverge pour ce point contrairement à l'hypothèse.

Il suffit, du reste, de supposer que la suite $\sin k_n \pi x$ tend vers zéro.

2. Lemme 2. — *Soit un point* a *et une suite* $\{k_n\}$ *telle que pour toutes les valeurs de* n, $k_n a = N_n + \theta_n$; N_n *entier et* $|\theta_n| < \varepsilon_n$ *tendant vers zéro. Pour que la suite* $\sin k_n \pi x$ *tende vers zéro pour* $x = \frac{a}{q}$ *(*q *entier), il faut et il suffit que l'entier* N_n *soit divisible par* q, *pour tout* n *à partir d'un certain rang.*

Sinon,

$$N_n = \mathfrak{N}_n q + Q_n \qquad (0 < Q_n < q).$$

ceci pour une suite partielle des n. On peut restreindre la suite $\{k_n\}$ pour que cette propriété soit satisfaite et même avec un Q_n constant égal à m. Pour cette suite restreinte,

$$\sin k_n \pi \frac{a}{q} = \sin\left(\theta_n \frac{\pi}{q} + \frac{m\pi}{q}\right)$$

reste supérieur à $\sin \pi \frac{m - \varepsilon_n}{q}$ et, par suite, ne tend pas vers zéro.

La condition suffisante est triviale.

3. **Définitions.** — *a*. Étant donné un ensemble e, disons que $\{k_n\}$ est une *suite de convergence* pour e si la série $\Sigma |\sin k_n \pi x|$ converge en tout point de e. Une telle suite ne peut exister que si e est de type N_0. Toute restriction d'une suite de convergence pour e est encore une suite de convergence pour le même ensemble.

Si deux suites $\{k_n\}$ et $\{k'_n\}$ sont de convergence pour e, les suites

$$\{k_n + k'_n\}, \quad \{|k_n - k'_n|\}, \quad \{k_n + k'_{m_n}\} \qquad (m_n \to \infty)$$

ont la même propriété.

Une suite $\{k_n\}$ qui n'est pas de convergence pour e est dite *suite de divergence* pour e. L'extension d'une suite de divergence la laisse de divergence.

Si e se réduit à un point α, nous disons que $\{k_n\}$ est de convergence pour α si $\Sigma |\sin k_n \pi \alpha|$ converge. La suite $\{k_n\}$ est de convergence pour un ensemble e si et seulement si elle est de convergence pour tout point de e.

b. Nous disons que $\{k_n\}$ est une *suite de limite nulle* pour e si $\sin k_n \pi x$ tend vers zéro pour tout point de e. Les énoncés ci-dessus sont encore valables pour les suites de limite nulle. De plus, si $\{k_n\}$ est une suite de limite nulle pour e, si l_n tend vers l'infini, $j_n > l_n$, si $\alpha_i^{(n)}$ est un entier et M un nombre fixe, la suite

$$\lambda_n = \sum_{i=l_n}^{j_n} \alpha_i^{(n)} k_i,$$

où

$$\sum_{i=l_n}^{j_n} |\alpha_i^{(n)}| < M$$

est encore de limite nulle pour e. Ce dernier énoncé ne peut s'étendre tel quel à une suite de convergence. Il reste vrai, si l'on ajoute que chaque k_i n'est pris dans la suite λ_n qu'un nombre borné de fois.

On peut aussi parler pour un ensemble e de suites de f-convergence, f étant une fonction de la classe (Y), en particulier si $f = x^p$, des suites de p-convergence. Étant données deux suites $\{k_n\}$ et $\{k'_n\}$ de f-convergence, la suite somme définie par $\{k_n + k'_n\}$ n'est pas nécessairement de f-convergence, puisque $\frac{f(a+b)}{f(a)+f(b)}$ n'est pas nécessairement borné. Il en résulte que les théorèmes valables pour des ensembles N_0^p sur l'adjonction d'un point et le produit de l'ensemble par un nombre ne sont plus nécessairement vrais dans le cas N_0^f.

4. Nous avons trouvé des suites de limite nulle pour un ensemble qui admet une telle suite connue. Examinons la réciproque, si cette suite est $k_n = 2^{2^n}$. Nous savons (1[re] partie, chap. I, § 4) que si

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{2^{2^n}}, \qquad |\gamma_n| \leqq \frac{2^{2^{n-1}}}{2},$$

on a

$$2^{2^n} x = \frac{\gamma_{n+1}}{2^{2^n}} + \omega_n \qquad (\text{mod } 1).$$

$|\omega_n|$ est de toute façon inférieur à $\frac{1}{2^{2^n}}$, sa partie principale est $\frac{|\gamma_{n+1}|}{(2^{2^n})^{\lambda_2-1}}$ si $\gamma_{n+\lambda}$ est le premier chiffre non nul d'indice supérieur à $n+1$.

Théorème. — *Les seules suites de limite nulle pour l'ensemble* E_0 *sur lequel* $\sin 2^{2^n}\pi x$ *tend vers zéro, ont un terme général* λ_n *qui peut se mettre sous la forme*

$$\lambda_n = \sum_{i=l_n}^{j_n} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i},$$

$j_n > l_n$, l_n tendant vers l'infini et $\sum_{i=l_n}^{j_n} |\alpha_i^{(n)}|$ borné.

La démonstration se fait par l'absurde en montrant que si λ_n n'a pas cette forme, E_0 contient un point y pour lequel $\sin\lambda_n\pi y$ ne tend pas vers zéro.

Remarquons d'abord que l'on peut supposer $|\alpha_i^{(n)}| < 2^{2^i}$, sinon

$$\alpha_i^{(n)} = 2^{2^i}\lambda_i^{(n)} + \mu_i^{(n)},$$

de sorte que

$$\alpha^{(n)} 2^{2^i} = \mu_i^{(n)} 2^{2^i} + \lambda_i^{(n)} 2^{2^{i+1}} \qquad (|\mu_i^{(n)}| < 2^{2^i}).$$

On peut alors remplacer les $\alpha_i^{(n)}$ par d'autres valeurs inférieures à 2^2.

On peut même prendre $|\alpha_i^{(n)}| \leqq \frac{2^{2^i}}{2}$, sinon

$$|\alpha_i^{(n)}|\, 2^{2^i} = 2^{2^{i+1}} - \beta_i^{(n)} 2^{2^i}.$$

Suppposons que les $\alpha_i^{(n)}$ ainsi réduits ne soient pas bornés. Il existe alors une suite partielle $\{n_r\}$ pour laquelle, on peut trouver i_r, $l_{n_r} \leqq i_r \leqq j_{n_r}$ telle que $|\alpha_{i_r}^{n_r}|$ augmente indéfiniment, et même telle que $\{i_r\}$ croisse aussi vite que l'on désire, assez vite par exemple pour que

$$i_{r+1} > j_{n_r}.$$

On peut extraire de la suite $\{\lambda_n\}$ une suite partielle ayant cette propriété. Réordonnons la suite partielle et continuons à l'appeler $\{\lambda_n\}$, elle est donc telle qu'il existe i_n, $l_n \leqq i_n \leqq j_n$, $i_{n+1} > j_n$ et $|\alpha_{i_n}^{(n)}|$ augmente indéfiniment.

Désignons par a un nombre positif fixe, inférieur à 1 et aussi petit que l'on veut. Nous allons définir y par ses chiffres dyadiques

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{2^{2^n}}, \qquad |\gamma_n| < \frac{2^{2^{n-1}}}{2}.$$

Nous désignons par y_n la valeur dyadique approchée de y obtenue en prenant les chiffres de y jusqu'à l'ordre j_{n+1}. Supposons défini y_{n-1}. Le nombre

$$\lambda_n y_{n-1} = \sum_{i=l_n}^{j_n} \alpha_i^{(n)} k_i y_{n-1}$$

est modulo 1 égal à un certain nombre θ_{n-1} compris entre zéro et 1. Nous définissons les chiffres de y jusqu'à l'ordre $j_n + 1$, donc y_n, de telle sorte que $\lambda_n y_n$ soit, modulo 1, compris entre a et $1 - a$. Mais, modulo 1,

$$\lambda_n y_n = \theta_{n-1} + \sum_{r=j_{n-1}+1}^{j_n} \alpha_r^{(n)} \frac{\gamma_{r+1}}{2^{2^r}} + \Sigma \alpha_r^{(n)} \omega_r.$$

Nous prenons $\gamma_{r+1} = 0$ si $r \neq i_n$ et γ_{i_n+1} tel que, modulo 1,

$$a < \theta_{n-1} + \alpha_{i_n}^{(n)} \frac{\gamma_{i_n+1}}{2^{2^{i_n}}} < 1 - a.$$

Ceci est possible avec $\frac{\gamma_{i_n+1}}{2^{2^{i_n}}}$ tendant vers zéro puisque $|\alpha_{i_n}^{(n)}|$ tend vers l'infini. On peut prendre $\gamma_{i_n+1} = 0$ si $a < \theta_{n-1} < 1 - a$, sinon, on peut toujours trouver une valeur de γ telle que

$$\frac{3}{4} \geqq \alpha_{i_n}^{(n)} \frac{\gamma_{i_n+1}}{2^{2^{i_n}}} \geqq \frac{1}{4},$$

$$\frac{2^{2^{i_n}}}{\alpha_{i_n}^{(n)}} \frac{3}{4} \geqq \gamma_{i_n+1} \geqq \frac{2^{2^{i_n}}}{\alpha_{i_n}^{(n)}} \frac{1}{4},$$

les deux nombres extrêmes étant au moins, dans le cas le plus défavorable distants de un.

Dans ces conditions, $|\Sigma \alpha_r^{(n)} \omega_r| < \sum \frac{|\alpha_r^{(n)}|}{2^{2^{i_n+1}}}$ n'apporte qu'une contribution infiniment petite. Il est donc possible de définir y_n pour que

$$|\sin \lambda_n y_n \pi| > \sin a\pi$$

et, par suite, y tel que, pour tout n supérieur à n_0

$$|\sin \lambda_n y \pi| > \sin a\pi$$

d'où l'énoncé avec $|\alpha_i^{(n)}|$ borné.

l_n tend vers l'infini, sinon il serait possible par une restriction de la suite $\{\lambda_n\}$ de le supposer borné, même constant égal à l et λ_n ne pourrait être une suite de limite nulle pour le point $\frac{1}{2^{l+1}}$ pour lequel $\lambda_n x$ tend vers $\frac{1}{2}$.

Montrons maintenant que $\sum_{i=l_n}^{j_n} |\alpha_i^{(n)}|$ est borné. Supposons l'hypothèse contraire, comme les $|\alpha_i^{(n)}|$ sont bornés, leur nombre augmente indéfiniment. On peut toujours, en restreignant au besoin $\{\lambda_n\}$, supposer que l_n et j_n croissent et même que $l_{n+1} > j_n$, tandis que

$$\sum_{i=l_n}^{j_n} |\alpha_i^{(n)}| = A_n$$

augmente indéfiniment.

Dans ces conditions, si y_{n-1} est un nombre dyadique d'ordre j_{n-1}, $\lambda_n y_{n-1}$ est nul modulo 1, il nous suffit de montrer que l'on peut définir les chiffres d'ordre compris entre j_{n-1} et j_n pour que $\lambda_n y_n$ soit supérieur à un nombre donné; il suffit pour cela de prendre γ_i, $l_n \leqq i \leqq j_n$ tel que $\frac{|\gamma_{i+1}|}{2^{2^i}}$ soit voisin de ε_n, γ_i du signe de $\alpha_i^{(n)}$, nul avec ce dernier et tel que $A_n\varepsilon_n$ soit compris entre a et $1-a$. Un tel ε_n existe et l'approximation est réalisée à moins de $M\sum \frac{1}{2^{2^i}} < \frac{2M}{2^{2^{l_n}}}$, donc peut être rendue arbitrairement petite.

5. Reprenons la démonstration précédente et voyons dans quelles conditions il est possible de l'étendre à un ensemble e partie de E_0.

Pour la première partie ($\alpha_i^{(n)}$ borné), il nous suffit d'admettre que, quelle que soit la suite α_i tendant vers l'infini, $|\alpha_i| \leqq \frac{2^{2^i}}{2}$, il existe une suite partielle $\{i_n\}$ pour laquelle on peut trouver au moins deux valeurs de γ_{i_n+1}, soient $\gamma_{i_n+1}^{(1)}$ et $\gamma_{i_n+1}^{(2)}$ telles que les deux nombres $\alpha_{i_n}\frac{\gamma_{i_n+1}^{(1)}}{2^{2^{i_n}}}$ et $\alpha_{i_n}\frac{\gamma_{i_n+1}^{(2)}}{2^{2^{i_n}}}$ diffèrent, modulo 1, d'une quantité supérieure à un nombre fixe a.

Étant donnée une suite arbitraire $\{\mu_n\}$ dont le terme de rang n est, soit $\gamma_{i_n+1}^{(1)}$, soit $\gamma_{i_n+1}^{(2)}$, il doit exister dans e, quelle que soit $\{\mu_n\}$, au moins un point pour lequel $\gamma_{i_n+1} = \mu_n$. Nous dirons qu'un ensemble e, satisfaisant à cette propriété, vérifie la condition A.

Dans la deuxième partie, l_n tend vers l'infini si e contient des points dyadiques dont l'exposant du dénominateur augmente indéfiniment. Il est possible de donner une condition plus large en supposant que E admet des points « suffisamment rapprochés » de tels dyadiques.

Supposons que l_n ne tende pas vers l'infini, donc par restriction de λ_n que l_n soit fixe, égal à l, même que λ_n soit égal à

$$1 + \Sigma\alpha_i^{(n)} 2^{2^i},$$

dans ce cas, nous poserons $l = -1$.

Considérons alors un nombre y défini par γ_i quelconque si $i \leqq l$

$$\gamma_{l+1} = 1, \qquad \gamma_{l+i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h,$$

h nombre fixe que nous déterminerons plus loin.

D'autre part,

$$\alpha_l^{(n)} = \beta^{(n)} \neq 0 \qquad \beta^{(n)} \leqq \frac{2^2}{2}, \qquad \text{où } \beta^{(n)} = 1 \quad \text{si } l = -1;$$

nous pouvons toujours par restriction supposer que $\beta^{(n)}$ est constant égal à β

$$\lambda_n y = \sum_{i=l}^{j_n} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\gamma_r}{2^{2^r}}. \tag{1}$$

Si nous développons (1) nous trouvons, modulo 1,

$$\sum_{i=l}^{l+h} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i} y = \frac{1}{2} + \sum_{=l}^{l+h} \frac{\alpha_i^{(n)} 2^{2^i}(\gamma\, l+h+1+\eta)}{2^{2^{l+h+1}}} \qquad (|\eta| < 1).$$

Le nombre $\sum_{i=l}^{l+h} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i}$ est un nombre défini dans le système de numération adopté, donc inférieur en valeur absolue à $|\alpha_{l+h}^{(n)}| 2^{2^{l+h}}$.

$|\alpha_{l+h}^{(n)}|$ est inférieur à M et au plus égal à $\frac{2^{2^{l+h}}}{2}$. Choisissons h pour que $\frac{M}{2^{2^{l+h}}} < \frac{1}{16}$ et prenons $\gamma_{l+h+1} = 1$, de telle sorte que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} < \sum_{i=l}^{l+h} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i} y < \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \qquad (\text{mod } 1).$$

D'autre part,

$$\sum_{i=l+h+1}^{j_n} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i} y = \sum_{i=l+h+1}^{j_n} \alpha_i^{(n)} \frac{\gamma_{l+1} + \eta_l}{2^{2^i}} = \omega_n \qquad (|\eta_l| < 1).$$

Mais $|\alpha_i^{(n)}| < M$. On peut majorer ω_n par M $\sum_{i=l+h+1}^{j_n} \frac{|\gamma_{l+1}|+1}{2^{2^i}}$ et si cette quantité peut être rendue inférieure à $\frac{1}{8}$, on voit que $\lambda_n y$ reste modulo 1, comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ donc $\sin \lambda_n \pi y$ ne tend pas vers zéro. On peut conclure si dans e, il existe des points de convergence pour la série $\Sigma |\sin 2^{2^n} \pi x|$; $\frac{\omega_n}{M}$ est alors majoré par le reste de rang $l+h$ de la série $\sum \frac{|\gamma_l|+1}{2^{2^i}}$ qui peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition de prendre h assez grand.

Nous dirons que e satisfait à la condition B s'il contient des points de convergence pour la série $\Sigma |\sin 2^{2^n} \pi x|$ et si, étant donnée une suite quelconque formée d'un nombre fini de nombres égaux, soit à zéro, soit à 1, il existe un tel point de convergence ayant cette suite comme suite de ses premiers chiffres.

L'ensemble E_0 satisfait évidemment aux conditions A et B. Nous dirons qu'il est *complet* par rapport à la suite $\{2^{2^n}\}$ ou simplement complet. Un ensemble satisfaisant aux conditions A et B sera dit *quasi complet*. Ainsi :

THÉORÈME. — *Si l'ensemble e est quasi complet, toute suite de limite nulle pour e, a un terme général λ_n qui peut se mettre sous la forme*

$$\lambda_n = \sum_{i=l_n}^{j_n} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i} \qquad \left(|\alpha_i^{(n)}| \leq \frac{2^{2^i}}{2}\right),$$

$j_n > l_n$ tendant vers l'infini et $|\alpha_i^{(n)}|$ borné.

L'ensemble E_1 sur lequel converge $\Sigma \mid \sin 2^{2^n} \pi x \mid$ est quasi-complet, la condition B étant satisfaite par la présence des points dyadiques.

Quant à la condition A, il suffit de prendre $\gamma_{i+1}^{(1)} = 0$ et $\gamma_{i+1}^{(2)}$ tel que

$$|\alpha_i| \frac{\gamma}{2^{2^i}} > a, \qquad \gamma > a \frac{2^{2^i}}{|\alpha_i|} > 1,$$

a étant un nombre fixe inférieur à 1. On prendra pour $\gamma_{i+1}^{(2)}$ le premier entier satisfaisant à cette condition; ce qui est compatible avec $\frac{\gamma_i}{2^{2^i}}$ tendant vers 0 puisque α_i tend vers l'infini. Il suffit de choisir la suite partielle $\{ i_n \}$ pour assurer la convergence de $\gamma_{i+1}^{(2)}$.

Cet exemple montre que pour un ensemble quasi complet, la troisième propriété de l'ensemble complet $\Sigma \mid \alpha_i^{(n)} \mid$ bornée n'est pas nécessairement satisfaite. Ainsi sur E_1 la suite

$$k_n = \sum_{i=i_n}^{j_n} 2^{2^i} \qquad (i_n \to \infty)$$

est de limite nulle, même si $j_n - i_n$ tend vers l'infini.

L'ensemble parfait, formé des points

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^{2^i}} \qquad (\varepsilon_i = 0,\ 1)$$

satisfait à la condition B, mais ne satisfait pas à la condition A. La suite $\{ k_n \} = \{ n 2^{2^n} \}$ est, pour lui, une suite de limite nulle, bien que $\alpha_i^{(n)}$ ne soit pas borné.

Remarquons que si e est quasi complet, tout ensemble contenu dans E_0 et contenant e est aussi quasi complet.

6. Reprenons la forme de λ_n du théorème précédent, on voit que

$$\lambda_n = 2^{2^{l_n}} \alpha_{l_n}^{(n)} + 2^{2^{l_n+1}} \alpha_{l_n+1}^{(n)} + \dots$$

Toute suite de limite nulle a donc la forme $2^{p_n} m_n$ avec m_n impair et $p_n = 2^{l_n + d_n}$, où d_n est la plus grande puissance de 2 contenue dans le nombre borné $\mid \alpha_{l_n}^{(n)} \mid$ donc est borné.

Lemme 3. — *Si e est quasi complet, de toute suite de limite nulle pour e, on peut extraire une suite infinie partielle de terme général $k_n = 2^{p_n} m_n$, m_n impair, $p_n = 2^{r_n} + d$, où d est constant.*

Quant à m_n, il peut s'écrire $\frac{\alpha_{l_n}^{(n)}}{2^{d_n}} + 2^{2^{i_n}} \theta_n$. Si l'on pose

$$m_n = 2^{2^{l_n}} \mu_n + h_n \qquad (h_n < 2^{2^{l_n}}),$$

on voit que h_n est borné lui aussi.

Lemme 4. — *Si e est quasi complet de toute suite de limite nulle pour e, on peut extraire une suite infinie telle que $m_n \equiv h \pmod{2^{2^{r_n}}}$, h étant constant.*

CHAPITRE III.

Le problème A.

1. Théorème. — *L'ensemble G de convergence de la série* $\sum \frac{|\sin 2^n \pi x|}{n}$ *n'admet aucune suite de limite nulle.*

Nous allons montrer pour cela que, quelle que soit la suite $\{k_n\}$, on peut déterminer un nombre α (dépendant de $\{k_n\}$) tel que $\sin k_n\pi\alpha$ ne tende pas vers o. Il suffit de montrer que l'on peut extraire de $\{k_n\}$ une suite infinie $\{k_{n_i}\}$ telle que

$$|\sin k_{n_i}\pi\alpha| > a \quad \text{(nombre fixe)}.$$

a. G contient tous les points dyadiques. Donc, d'après le lemme 1 du chapitre précédent, il suffit d'étudier les suites de la forme $2^{p_n}m_n$ (m_n impair, p_n tendant vers l'infini).

b. Dans ce cas, prenons un nombre quelconque x par son développement dyadique

$$x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\theta_r}{2^r} \qquad (\theta_r = \text{o ou } 1),$$

$$2^{p_n} m_n x = m_n \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\theta_{p_n+\lambda}}{2^\lambda} \qquad (\text{mod } 1).$$

Définissons α en prenant

$$\theta_{p_n+1} = 1, \qquad \theta_{p_n+\lambda} = \text{o} \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, q_n),$$

q_n étant un entier que nous devrons déterminer.

On a alors, modulo 1,

$$2^{p_n} m_n \alpha = \frac{1}{2} m_n + \sum_{\lambda=q_n+1}^{\infty} \frac{\theta_{p_n+\lambda}}{2^\lambda} < \frac{1}{2} + \frac{m_n}{2^{q_n}}.$$

Choisissons q_n pour que $\frac{m_n}{2^{q_n}} < \frac{1}{4}$. Alors

$$|\sin 2^{p_n} m_n \pi\alpha| > \sin \frac{3\pi}{4}.$$

A chaque p_n nous faisons correspondre un nombre q_n minimum, soit $q_n^\star$. Restreignons la suite des $\{p_n\}$ de façon que $p_{n+1} - p_n > q_n^\star$ et prenons $q_n = p_{n+1} - p_n$. Il est clair que la suite restreinte que nous désignons encore par p_n n'est pas de limite nulle pour

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_n+1}}.$$

c. Reste à voir que l'on peut trouver un tel $\alpha \in G$. Soit r un entier quelconque tel que

$$p_{n-1} < r < p_n,$$

$$2^r \alpha = 2^r \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_s+1}} = 2^r \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{2^{p_s+1}} \qquad (\text{mod } 1).$$

Ce dernier terme est visiblement inférieur à $\frac{1}{2^{p_n-r}} \leq 1$.

Donc

$$|\sin 2^r \pi \alpha| \leq \sin \frac{\pi}{2^{p_n-r}} \leq \frac{\pi}{2^{p_n-r}}$$

(inégalité qui reste vraie si $r = p_n$).

Par suite,

$$\sum_{r=p_{n-1}+1}^{p_n} \frac{|\sin 2^r \pi \alpha|}{r} < \frac{\pi}{p_{n-1}} \sum_{\rho=0}^{q_{n-1}} \frac{1}{2^\rho} < \frac{2\pi}{p_{n-1}}.$$

On voit qu'en restreignant au besoin la suite donnée p_n pour que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge, on $\alpha \in G$.

Corollaires. — *a. L'ensemble* G *a la puissance du continu.*

Alors qu'en (1^{re} partie, chap. I, § 4) nous avons vu que $\Sigma |\sin 2^n \pi x|$ ne converge qu'aux points $\frac{p}{2^q}$, la série du théorème précédent converge sur un ensemble non dénombrable, sans quoi le théorème précédent serait faux.

b. Il existe des N-*ensembles qui ne sont pas d'un type* N_0^f *quelle que soit la fonction f. En particulier, l'ensemble* G *n'est pas* N_0.

Ceci constitue une réponse négative au problème A.

1 *bis. Remarques.* — *a.* La démonstration du théorème précédent reste valable pour une série $\Sigma \rho_n |\sin 2^n \pi x|$ sous la condition que ρ_n tend vers o avec $\Sigma \rho_n = \infty$. La majoration reste toujours la même, il suffit de supposer la série $\Sigma \rho_{p_n}$ convergente, ce qui est toujours possible par restriction de la suite des indices. Ainsi :

Théorème. — *Quelle que soit la suite* $\{\rho_n\}$ *(avec* ρ_n *tendant vers* o *et* $\Sigma \rho_n = \infty$*) la série* $\Sigma \rho_n |\sin 2^n \pi x|$ *converge sur un ensemble* $\mathcal{E}$ *ayant la puissance du continu.* $\mathcal{E}$ *n'admet aucune suite de limite nulle et n'est d'aucun type* N_0^f.

On peut se demander si la propriété est générale en remplaçant 2^n par une suite quelconque $\{\lambda_n\}$. Il n'en est rien puisqu'en prenant $\lambda_n = n$, on trouve une série quelconque $\Sigma \rho_n |\sin n \pi x|$ qui peut ne converger nulle part, même avec ρ_n tendant vers o. Même si l'on suppose que la suite $\{\lambda_n\}$ est de convergence pour un dénombrable — pouvant être infini — la propriété peut être en défaut comme le montre l'exemple $\mathfrak{S}_2$ de (1^{re} partie, chap. II, § 12)

$$\mathfrak{S}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{p \leq n^2} \sin p n\,!\, \pi x.$$

Le raisonnement qui a servi sur cet exemple, s'applique de la même façon pour la série

$$\mathfrak{S}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \leq n^2} |\sin 2^n (2k+1) \pi x|$$

qui ne converge que pour les points dyadiques $\frac{p}{2^q}$, bien que le coefficient tende vers o.

b. Dans la démonstration du théorème du paragraphe 1, nous avons associé un point α à chaque suite $\{k_n\}$ et vérifié ensuite que $\alpha \in G$, ce qui est entraîné par $\sum \frac{1}{p_n} < \infty$. Soit $\{\gamma_n\}$ une suite arbitraire telle que $\sum \frac{1}{\gamma_n} < \infty$ et considérons les points

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^{\delta_n}}, \qquad \text{avec} \quad \alpha_n = 0 \text{ ou } 1,$$
$$\gamma_n \leqq \delta_n < \gamma_{n+1}.$$

Tout α, défini comme ci-dessus, est un point β. Ce point est défini par une propriété de ses chiffres, un seul au plus étant égal à 1 entre les ordres γ_n et γ_{n+1}. L'ensemble P des points dont les éléments sont les β est donc parfait et sur P, la série $\sum \frac{|\sin 2^n \pi x|}{n}$ a une convergence uniforme.

Théorème. — *Il existe des* N-*ensembles parfaits, qui ne sont d'aucun type* N_0^f.

2. Dans ce qui précède, nous avons pu montrer que G n'était pas N_0 en montrant que G n'avait aucune suite de limite nulle. Il est intéressant de se poser la même question pour un groupe G n'ayant plus cette propriété, par exemple pour un module du type N_0^2.

Théorème. — *L'ensemble* G_2, *de convergence de* $\mathfrak{S}_2 = \Sigma |\sin 2^{2^n} \pi x|^2$ *n'est pas du type* N_0.

Nous savons que si G_1 désigne l'ensemble de convergence de $\mathfrak{S}_1 \doteq \Sigma |\sin 2^{2^n} \pi x|$, $G_1 \subset G_2$. Toute suite de limite nulle pour G_2 l'est aussi pour G_1 et nous savons que le terme général d'une telle suite est de la forme (2^e^ partie, chap. II, § 5)

$$\lambda_n = \sum_{i=l_n}^{j_n} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i} \qquad (\alpha_i^{(n)} \text{ borné, } l_n \to \infty).$$

Nous pouvons toujours restreindre la suite λ_n en supposant, par exemple, $l_{n+1} > j_n$.

Soit x, défini par ses chiffres, $\gamma_i = 0$, sauf pour $i = r_n + 1$, $l_n \leqq r_n \leqq j_n$. A un infiniment petit près,

$$\lambda_n x = \alpha_{r_n}^{(n)} \frac{\gamma_{r_n+1}}{2^{2^{r_n}}} \qquad (\text{mod } 1).$$

Nous prenons γ_{r_n+1} du signe de $\alpha_{r_n}^{(n)}$, il est toujours possible de choisir ce nombre, de telle sorte que

$$\sum \left(\frac{\gamma_{r_n+1}}{2^{2^{r_n}}}\right)^2 < \infty, \qquad \sum \frac{|\gamma_{r_n+1}|}{2^{2^{r_n}}} = \infty,$$

de sorte que la série $\Sigma |\sin \lambda_n \pi x|$ diverge, bien $x \in G_2$.

Corollaire. — *Il existe des ensembles du type* N_0^2 *qui ne sont pas* N_0.

2 *bis*. La démonstration précédente subsiste en tout point si l'on remplace l'ensemble G_2 par un ensemble G_p quelconque, ou même par G_f, groupe engendré par l'ensemble où converge $\Sigma f(|\sin 2^{2^n}\pi x|)$, f étant une fonction de Young, G_1 pouvant être remplacé par G_{f_1}, avec $f_1 > f$, inégalité signifiant que $\frac{f_1}{f_0}$ tend vers o. Il suffit de trouver γ_{r_n} tel que

$$\Sigma f\left[\frac{|\gamma_{r_n+1}|}{2^{2^{r_n}}}\right] < \infty, \qquad \Sigma f_1\left[\frac{|\gamma_{r_n+1}|}{2^{2^{r_n}}}\right] = \infty,$$

quelles que soient ces deux fonctions f, f_1, il est toujours possible de déterminer γ_{r_n+1}.

THÉORÈME. — *f et f_1 étant deux fonctions de Young quelconques ($f < f_1$), il existe des ensembles du type N_0^f qui ne sont pas du type $N_0^{f_1}$.*

En particulier, p et q étant deux nombres positifs, $p < q$, il existe des ensembles N_0^q qui ne sont pas N_0^p.

Remarque. — L'ensemble des points où sin $(2^{2^n}\pi x)$ tend vers o contient l'ensemble G_2. Donc il n'est pas N_0. Nous verrons dans la troisième partie qu'il n'est même pas N.

3. THÉORÈME. — *L'espace vectoriel sur les rationnels, $\mathcal{E}$, engendré par l'ensemble de convergence absolue G_1 de la série $\mathfrak{S} = \Sigma|\sin 2^{2^n}\pi x|$ n'admet aucune suite de limite nulle. Il n'est donc d'aucun type N_0^f.*

Démonstration par l'absurde. Une suite $\{k_n\}$ de limite nulle pour $\mathcal{E}$ l'est pour G_1, donc une suite réduite de k_n est de la forme $2^{p_n}m_n$,

$$p_n = 2^{2^{r_n}+d},$$
$$m_n = 2^{2^{r_n}}\mu_n + h \qquad (h \text{ impair}).$$

a. Sin $k_n\pi x$ doit tendre vers o pour tout $x \in \mathcal{E}$, donc en particulier pour tous les points $\frac{1}{q}$ quel que soit q. D'après le lemme 2 du chapitre précédent, il faut donc que $2^{p_n}m_n$ soit divisible par q. Si q désigne un entier quelconque impair, il faut donc que m_n soit divisible à partir d'un certain rang par tout impair.

b. Considérons alors le point $\alpha \in G_1$

$$\alpha = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{r_s}+\omega_s}} \qquad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{2^{\omega_s}} < \infty, \qquad \omega_s < 2^{r_s}.$$

Mais

$$k_n\alpha = k_n \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2^{r_s}+\omega_s}} + k_n \sum_{s=n+1}^{\infty} + \frac{k_n}{2^{2^{r_n}+\omega_n}}$$

est la somme de trois parties I_1, I_2, I_3. La seconde I_2 peut être, en restreignant au besoin la suite $\{k_n\}$, rendue aussi petite que l'on veut. I_1 est un entier divisible par m_n, donc pour tout q impair, à partir d'un certain rang est divisible par q

$$I_3 = \frac{2^{2^{r_n}}\mu_n 2^d}{2^{\omega_n}} + h\frac{2^d}{2^{\omega_n}} = I'_3 + I''_3$$

I''_3 tend vers o. I'_3 est un entier égal au produit de μ_n par une puissance de 2.

Pour que la suite $\{k_n\}$ soit de limite nulle pour tout $\frac{\alpha}{q}$ (q impair), il faut d'après le lemme 2, que la partie entière de $k_n\alpha$ soit à partir d'un certain rang divisible par q. Γ'_3 doit avoir la même propriété, donc μ_n également et, par suite, h, d'où l'absurdité.

3 *bis*. Corollaire. — *Une suite croissante d'ensembles* N_0 *n'est pas nécessairement de type* N_0.

Il suffit, en effet, de considérer les séries

$$\mathfrak{S}^{(i)} = \Sigma \mid \sin i\,!\, 2^{2^n} \pi x \mid \qquad (i = 1, 2, \ldots, p, \ldots)$$

qui convergent sur $G^{(i)}$. Il est évident que $G^{(i)} \subset G^{(i+1)}$ que $\frac{a}{i} \in G^{(i)}$ si $a \in G_1$. La réunion $\mathcal{R}$ des $G^{(i)}$ contient donc tout point $\frac{a}{q}$ quel que soit q, donc $\mathcal{R} \supset \mathcal{E}$, d'où la conclusion :

Remarque. — La démonstration précédente convient encore si l'on remplace l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ par un ensemble E tel que si $a \in G_1$, E contienne tout nombre $\frac{a}{q}$, q appartenant à une suite quelconque non bornée d'impairs. On peut s'abstenir de cette dernière restriction en remarquant que

$$\alpha_1 = \sum \frac{1}{2^{2^{r_s}+d-1}} \in G_1$$

et

$$k_n \alpha_1 = 2\, m_n + \varepsilon_n \qquad (\mathrm{mod}\ 2^2),$$

$\mathcal{E}_n$ tendant vers o.

4. Il existe dans G_1 des points x tels que $\frac{x}{q} \in G_1$ quel que soit q. Reprenons, en effet, le calcul de la convergence de $\mathfrak{S}_1$ faite en (1re partie, chap. I, § 5). Si

$$x = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma_s}{2^{2^s}}, \qquad -(2^{2^{s-1}-1} - 1) \leq \gamma_s \leq 2^{2^{s-1}-1},$$

nous avons vu que $x \in G_1$ si et seulement si

$$\sum \frac{|\gamma_{n+1}|}{2^{2^n}} < \infty.$$

Si cette question est satisfaite,

$$2^{2^n} x = 2^{2^n} \sum_{s=0}^{n} \frac{\gamma_s}{2^{2^s}} + \sigma(1).$$

Pour que $\frac{x}{q} \in G_1$, il faut et il suffit, d'après le lemme 2, que le premier terme α_n de cette expression soit pour n assez grand divisible par q.

Or

$$\alpha_n = \gamma_n + 2^{2^{n-1}} \gamma_{n-1} + \ldots + 2^{2^n-1} \gamma_0,$$
$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} + 2^{2^n-1} \alpha_n$$

qui montre que γ_n doit être, à partir d'un certain rang, divisible par q, α_n ayant la même propriété à partir d'un rang précédent.

Donnons-nous une suite d'entiers $\{n_q\}$ croissante tendant vers l'infini même aussi vite que l'on désire et désignons par A_q le plus petit entier divisible par les q premiers nombres naturels. Supposons que n_q croisse assez vite pour que qA_q soit faible devant $2^{2^{n_{q-1}}}$, de sorte que

$$\sum \frac{q\,A_q}{2^{2^{n_{q-1}}}} < \infty.$$

Considérons le point

$$\theta_{m-1} = \sum_{q=1}^{m-1} \frac{\lambda_q A_q}{2^{2^{n_q}}} \qquad (\lambda_q \text{ entier } \gtrless 0).$$

C'est un dyadique. Supposons le numérateur divisible par A_m, c'est-à-dire divisible par les m premiers entiers.

Posons

$$\theta_m = \theta_{m-1} + \frac{\lambda_m A_m}{2^{2^{n_m}}}.$$

Alors

$$2^{2^{n_m}}\theta_m = A_{m+1}\varpi_m + \omega_m + \lambda_m A_m \qquad (\omega_m < A_{m+1}),$$

ω_m est divisible par A_m, donc

$$\omega_m = A_m \rho_m \qquad \left(\rho_m \leqq \frac{A_{m+1}}{A_m}\right),$$

$$2^{2^{n_m}}\theta_m = A_{m+1}\varpi_m + A_m(\rho_m + \lambda_m);$$

si $\rho_m = 0$, prenons

$$\lambda_m = 0;$$

si $\rho_m \neq 0$, prenons

$$\lambda_m = \frac{A_{m+1}}{A_m} - \rho_m \qquad (\lambda_m \leqq m),$$

de sorte que, quel que soit m, on peut définir la suite des λ de façon que, θ_m soit un dyadique de numérateur divisible par A_{m+1}.

Le point

$$\theta = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\lambda_q A_q}{2^{2^{n_q}}}$$

appartient à G_1; mais aussi $\frac{\theta}{k}$, quel que soit k. L'ensemble des points possédant cette propriété sera désigné par Γ_1, il est évident que l'on peut prendre dans l'exemple précédent des chiffres arbitraires pour θ, jusqu'à un rang fini arbitraire; de plus, on peut remplacer, le chiffre $\lambda_m A_m$ défini plus haut pas $\lambda_m A_m + \mu_m A_{m+1}$, μ_m étant assez faible pour que la série $\sum \frac{|\lambda_m A_m + \mu_m A_{m+1}|}{2^{2^{n_m}}}$ converge, de sorte que Γ_1 a la puissance du continu.

Théorème. — G_1 *étant l'ensemble de convergence de* $\mathfrak{S}_1 = \Sigma\,|\sin 2^{2^n}\pi x|$, *il* *existe un ensemble Γ_1 de points x tels que $\frac{x}{q} \in G_1$ quel que soit q. Γ_1 a la puissance du continu.*

Il est évident que si $x \in \Gamma_1$, $\frac{x}{q} \in \Gamma_1$. Γ_1 contient o, mais ne contient aucun dyadique $\frac{p}{2^q}$. Si $x \in \Gamma_1$, $x + 1 \notin \Gamma_1$, sans quoi $\frac{1}{q}$ appartiendrait à Γ_1, quel que soit q. L'ensemble Γ_1 est donc défini comme partie de la droite R^1 et non comme partie du tore T^1, comme l'est G_1. De plus, Γ_1 est un module même un espace vectoriel sur le corps des rationnels.

Désignons par $\mathcal{G}_1$ le groupe de T^1 congru à Γ_1 modulo 1. A tout point $x \in \mathcal{G}_1$, on peut donc associer un point $y \in \Gamma_1$ tel que $x - y = 0 \pmod 1$ et inversement. Toute série trigonométrique convergente sur Γ_1 l'est aussi sur $\mathcal{G}_1$ qui ne contient aucun point dyadique. L'ensemble $\mathcal{G}_1$, partie de G_1 est aussi N_0.

L'ensemble $\mathcal{G}_1$ n'est pas quasi complet, la suite de terme général $\frac{2^{2^n}}{2^\lambda} 2^{2^n}$, λ constant est de limite nulle pour $\mathcal{G}_1$.

$\mathcal{G}_1$ satisfait à la condition B, mais ne satisfait pas à la condition A. Si la suite α_i considérée est telle que pour certaines valeurs de l'indice i, $\frac{2^{2^i}}{\alpha_i}$ n'est pas entier, il est facile de trouver pour ces valeurs $\gamma^{(1)}_{i_n+1}$ et $\gamma^{(2)}_{i_n+1}$. Mais si $\frac{2^{2^i}}{\alpha_i}$ est toujours un entier, donc si $\alpha_i = 2^{\beta_i}$, le résultat ne vaut plus. Pourtant si β_i est non borné, on peut extraire une suite partielle telle que β_{i_n} augmente indéfiniment. Soit $q_n = 2^{\beta_{i_n+1}}$; Aq_n est alors multiple impair de q_n et, par suite,

$$\alpha_{i_n} \frac{\lambda_{i_n+1} A_{q_n}}{2^{2^{i_n}}} = \frac{\lambda_{i_n+1}}{2} \pmod 1.$$

Il suffit de prendre $\lambda^{(1)}_{i_n+1} = 0$, $\lambda^{(2)}_{i_n+1} = 1$, de sorte qu'il sera possible de définir un point de $\mathcal{G}_1$ pour lequel la suite considérée n'est pas de limite nulle.

Théorème. — *Pour $\mathcal{G}_1$ les suites de limite nulle ont un terme général de la forme*

$$\lambda_n = \sum_{i=l_n}^{j_n} \alpha_i^{(n)} 2^{2^i},$$

où $\alpha_i^{(n)}$ est soit borné, soit égal à $\frac{2^{2^i}}{2^{\beta_i^{(n)}}}$, où $\beta_i^{(n)}$ est borné.

On en déduit encore que l_n tend vers l'infini. Il suffit de reprendre le raisonnement fait en (2ᵉ partie, chap. 2, § 5) qui reste valable à l'exception de la majoration de ω_n dans le cas de $\alpha_i^{(n)}$ non borné, mais alors

$$\frac{\alpha_i^{(n)} \gamma_{i+1}}{2^{2^i}} = \frac{\gamma_{i+1}}{2^{\beta_i^n}}$$

est un entier pour i assez grand, γ_{i+1} devant être divisible par une puissance de 2 aussi grande que l'on veut. Mais

$$\alpha_i^{(n)} \frac{\gamma_{i+2}}{(2^{2^i})^2} = \frac{\gamma_{i+2}}{2^{\beta_i^n} 2^{2^i}}$$

pourra être rendu aussi petit que l'on veut, puisqu'il existe dans $\mathcal{G}_1$ des points pour lesquels γ_{i+2} est inférieur à q_{i+2}, $A_{q_{i+2}}$, q_i tendant vers l'infini aussi lentement que l'on veut.

Il en résulte que toute suite de limite nulle pour $\mathcal{G}_1$ a un terme général de la forme $\lambda_n = 2^{p_n} m_n$, p_n tendant vers l'infini et, par suite, si une série $\Sigma \mid \sin \lambda_n \pi x \mid$ converge sur $\mathcal{G}_1$, elle converge nécessairement aux points dyadiques, bien que $\mathcal{G}_1$ n'en contienne aucun.

THÉORÈME. — *Il existe des groupes* E *de type* N_0, *tels que si*

$$S = \Sigma \mid \sin k_n \pi x \mid$$

(k_n *entier*), *converge au moins sur* E, *et si* G *désigne l'ensemble de convergence de* S, G — E *contienne des points fixes indépendants de la série* S *considérée.*

Remarque. — Au lieu de considérer Γ_1, on aurait pu envisager l'ensemble Γ'_1 des points $x \in \mathcal{G}_1$ tels que $\frac{x}{q} \in \mathcal{G}_1$, quel que soit q impair. Les raisonnements restent les mêmes en remplaçant A_q par A'_q, plus petit entier divisible par les q premiers nombres impairs. Aucun dyadique n'appartient à Γ'_1. Mais l'ensemble Γ'_1 dont Γ_1 est une partie est alors quasi complet et donne un exemple plus simple d'ensemble E satisfaisant au théorème précédent.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA CONVERGENCE.

1. Soit une série trigonométrique $\Sigma \rho_n \sin \pi (k_n x + \varphi_n)$ $(\rho_n \geqq 0)$ qui converge absolument sur un ensemble E. On aura $\Sigma \rho_n = \infty$ si la convergence absolue n'a pas lieu partout. La convergence peut-elle être normale (au sens de Baire) sur une partie $\mathcal{E}$ de E? Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une suite $w_n > 0$, terme général d'une série convergente, telle que pour tout n, et pour $x \in \mathcal{E}$,

$$\rho_n \mid \sin \pi (k_n x + \varphi_n) \mid \leqq w_n, \qquad \Sigma w_n < \infty.$$

Soient deux points x et x_0 de $\mathcal{E}$, nous avons

$$\rho_n \mid \sin k_n \pi (x - x_0) \mid \leqq \rho_n \mid \sin \pi (k_n x + \varphi_n) \mid + \rho_n \mid \sin \pi (k_n x_0 + \varphi_n) \mid \leqq 2 w_n.$$

Donc la série $\Sigma \rho_n \mid \sin n \pi x \mid$ converge normalement sur l'ensemble $\mathcal{E}_1$ déduit de $\mathcal{E}$ par la translation $-x_0$.

Mais, puisque $\Sigma \rho_n$ est divergente, il est nécessaire que $\underline{\lim} \frac{w_n}{\rho_n} = 0$, mieux que pour toute suite d'indices $\{ n_i \}$ telle que $\Sigma \rho_{n_i} = \infty$, $\underline{\lim} \frac{w_{n_i}}{\rho_{n_i}} = 0$, donc il est nécessaire qu'existent une suite $\{ m_r \}$ d'indices telle que $\Sigma \rho_{m_r} = \infty$ et une suite $\{ \varepsilon_r \}$, ε_r tendant vers o, pour lesquelles en tout point de E

$$(1) \qquad \mid \sin \pi (k m_r x + \varphi_{m_r}) \mid \leqq \sin \varepsilon_r \pi.$$

Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ un ensemble de valeurs de x satisfaisant à (1). Nous pouvons extraire de $\{m_r\}$ une suite partielle $m_{r_1}, m_{r_2}, \ldots, m_{r_q}, \ldots$ telle que la série de terme général ε_{r_q} à termes positifs tendant vers o converge. Prenons alors $\rho m_{r_q} = 1$ et $\rho_n = 0$ pour $n \notin \{m_{r_q}\}$. La série $\Sigma \rho_n \sin \pi (k_n x + \psi_n)$, où $\psi_{m_{r_q}} = \varphi_{m_{r_q}}$ converge absolument sur $\mathcal{E}$, la convergence y étant normale, sans converger absolument partout. $\mathcal{E}$ est de type N_0.

Théorème. — *Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une série trigonométrique pour laquelle $\mathcal{E}$ soit ensemble de convergence absolue normale est que l'on puisse trouver deux suites h_k et θ_k telles que sur $\mathcal{E}$, $|\sin \pi (h_k x + \theta_k)|$ tende uniformément vers* o.

En vertu du théorème de translation et de l'adjonction d'un point, il est toujours possible de prendre $\theta_k = 0$.

2. L'ensemble satisfaisant à la relation (1) pour r donné est constitué par une famille de segments égaux. L'ensemble satisfaisant à (1) pour tout r est fermé.

Considérons alors la série

$$\Sigma \rho_n \,|\sin k_n \pi x| \qquad (\Sigma \rho_n = \infty), \tag{2}$$

$\{k_n\}$ étant une suite de nombres réels croissant vers l'infini. Posons $\frac{k_n}{k_{n+1}} = \omega_n$. Supposons $\Sigma \rho_n \omega_n < \infty$ et considérons l'ensemble défini par les inégalités

$$|\sin k_n \pi x| \leq \sin 2\pi\omega_n \quad \text{pour tout } n. \tag{3}$$

Nous pouvons toujours supposer $\omega_n < \frac{1}{4}$.

Cet ensemble est l'intersection d'une famille d'ensembles E_n, chaque E_n est constitué par une famille de segments égaux de longueur $\frac{4\omega_n}{k_n}$ et dont les centres sont distants de $\frac{1}{k_n}$. Considérons un segment de E, soit σ_n^p. Deux segments consécutifs de E_{n+1} se déduisant par la translation $\frac{1}{k_{n+1}}$, à l'intérieur de σ_n^p il y a entièrement au moins trois segments de E_{n+1}; ceci quels que soient n et le segment choisi, on voit donc que l'intersection des E_n comprend un parfait. L'introduction d'une phase dans le terme général ne changerait pas le résultat.

Théorème. — *La série* (2) *converge sur un parfait si $\Sigma \rho_n \frac{k_n}{k_{n+1}} < \infty$. Il en est alors de même de $\Sigma \rho_n |\sin (k_n \pi x + \varphi_n)|$, quels que soient les φ_n.*

Corollaire. — *Si la série $\sum \frac{k_n}{k_{n+1}}$ converge, la série $\Sigma |\sin (k_n \pi x + \varphi_n)|$ converge sur un ensemble ayant la puissance du continu, quelles que soient les phases φ_n.*

Il est intéressant de remarquer que la conclusion peut être fausse si l'hypothèse de convergence de la série $\Sigma \omega_n$ n'est pas satisfaite, même si cette série diverge aussi faiblement qu'une série harmonique. C'est ainsi que la série $\Sigma |\sin n!\, \pi x|$

converge sur un ensemble ayant la puissance du continu, alors que les séries $\Sigma |\cos n\,!\,\pi x|$ et $\Sigma |\sin (n\,! + 1)\,\pi x|$ ne convergent nulle part si ce n'est pour la seconde, au point évident o.

3. **Convergence pseudo-normale.** — Nous n'avons rien supposé quant à la suite $\{ m_r \}$. Il est bien clair que si nous prenons la suite $m_2, m_3, \ldots$, ou une suite m_q, $m_{q+1}, \ldots$, nous obtenons encore des ensembles de convergence normale, contenant l'ensemble $\mathcal{E}$ correspondant à la suite $\{ m_r \}$ complète. Mais alors, si nous considérons la suite $S_q = m_q, m_{q+1}, \ldots$ $(q = 1, 2, \ldots, i, \ldots)$, nous obtenons un ensemble $\mathcal{E}_q$ de convergence absolue normale tel que $\mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q+1}$. La réunion de tous ces ensembles est un ensemble E, de première catégorie sur lequel la série a une convergence absolue pseudo-normale (*cf.* Denjoy, II, p. 183), c'est-à-dire telle que si le terme général est désigné par $u_n(x)$, il existe une série convergente ϖ_n à termes positifs telle que pour tout $x \in E$, $|u_n(x)| \leqq \varpi_n$ à partir d'un rang N dépendant de x.

Si x est un point non rationnel où la série $\Sigma \rho_n |\sin n\pi x|$ converge, la série converge au point λx_0, λ étant un entier arbitraire. La convergence est pseudo-normale; en effet, supposons que $\rho_n |\sin n\pi x_0| \leqq \varpi_n$. Nous avons $\rho_n |\sin n\pi\lambda x_0| \leqq \lambda \varpi_n$ comme $\varpi_n \to 0$, on peut pour tout λ trouver p et N tel que $\varpi_n < \frac{\varpi_p}{\lambda}$ pour tout $n > N$. Le raisonnement est valable si au lieu d'un seul point x_0 on considère un ensemble de convergence normale correspondant à la suite ϖ_n.

Peut-on ainsi obtenir l'ensemble complet de convergence absolue? Nous allons voir, sur un exemple, qu'il n'en est rien. Considérons la série $\Sigma |\sin (2n)\,!\,\pi x|$ qui, en vertu du corollaire ci-dessus, converge sur un ensemble ayant la puissance du continu. Désignons par ϖ_n le terme général d'une série convergente quelconque à termes positifs telle que $n^2 \varpi_n$ augmente indéfiniment. Formons les segments E_n correspondant à $\{ \varepsilon_n \} = \{ 2\varpi_n \}$. La longueur d'un σ_n^p est $\frac{4\varpi_n}{(2n)!}$ et la distance entre les extrémités gauches de deux segments voisins est $\frac{1}{(2n)!}$. Donc à l'intérieur d'un σ_n^p, il y a des σ_{n+1}^q complètement intérieurs, leurs nombre étant au moins égal à

$$\frac{4\varpi_n}{(2n)!} : \frac{1}{(2n+2)!} - 1 = 4\varpi_n (2n+1)(2n+2) - 1,$$

nombre qui augmente indéfiniment avec n. Considérons à l'intérieur d'un σ_n^p donné, le segment d'ordre $n+1$ le plus à gauche complètement intérieur au premier, puis le segment d'ordre $n+2$ le plus à gauche complètement intérieur au second et ainsi de suite indéfiniment. Cette suite de segments emboîtés définit un point ξ où la série converge. Supposons que n ait été pris assez grand pour que, dans la moitié gauche de σ_n^p il y ait au moins deux intervalles d'ordre $n+1$ complets. Il est bien clair que le segment $\sigma_n^{p'}$ correspondant à la suite ϖ_n au lieu de $2\varpi_n$ aura une longueur moitié du precédent, donc que pour le segment le plus à gauche qui entoure ξ, $\Sigma |\sin (2m)\,!\,\pi x| > \varpi_m$ et ceci pour tout m supérieur à N et, par suite dans ces conditions

$$|\sin (2n)\,!\,\pi\xi| > \varpi_n.$$

Ainsi, étant donnée une série S convergente quelconque, dont la convergence est aussi lente que l'on veut, il existe des points d'absolue convergence où la convergence est plus lente que celle de la série S. La convergence de la série $\Sigma\,|\sin(2n)\,!\,\pi x\,|$ ne saurait être pseudo-normale.

Remarque. — Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de convergence normale et G le module qu'il engendre. Pour tout point de $\mathcal{E}$, on a $|\sin k_n \pi x| < \varepsilon_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$; or un point de G est de la forme $a = \Sigma \alpha_i a_i$, $a_i \in \mathcal{E}$, α_i entier et le Σ étant fini. On voit donc que

$$\left|\sin k_n \pi \sum_i \alpha_i a_i\right| \leqq \sum_i |\alpha_i|\,|\sin k_n \pi\, a_i| \leqq \varepsilon_n \sum_i |\alpha_i|.$$

Un point de G étant donné, il lui correspond un entier

$$p = \sum_i |\alpha_i|.$$

Considérons une suite $\{\varepsilon'_n\}$ telle que $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon_n}$ tende vers l'infini, mais assez lentement pour que $\Sigma \rho_n \varepsilon'_n$ converge encore. Posons $\varepsilon'_n = \varepsilon_n \omega_n$. A tout point a de G correspond un entier N tel que pour tout entier $n > N$, $p < \omega_n$. On a alors

$$|\sin k_n \pi\, a| \leqq p\,\varepsilon_n < \omega_n \varepsilon_n < \varepsilon'_n.$$

Par suite, G est un ensemble de convergence absolue pseudo-normale et ne peut donc se confondre avec l'ensemble de convergence absolue de la série.

CHAPITRE II

LA CONVERGENCE SUR UN ENSEMBLE PARFAIT.

1. Convergence sur un parfait. — Soit P un parfait de convergence absolue pour une série $\mathfrak{S}$. P est la réunion des $P_n = E_n \cap P$ sur lesquels $S(x) \leqq n$. Ces P_n sont fermés. Il est impossible, d'après le théorème de Baire que tous ces P_n soient non denses sur P. Comme ces P_n sont croissants ($P_n \subset P_{n+1}$), il existe un entier n_0 tel que pour $n > n_0$, P_n contient toute une portion de P; et ceci peut être dit dans tout intervalle. En définitive, ou bien sur P la somme $S(x)$ est absolument bornée, ou bien il existe un sous-ensemble de P fermé non dense sur P soit $H(P)$ tel que $S(x)$ soit bornée sur toute partie de P sans points adhérents à $H(P)$. On peut dire que sur le parfait P, la somme $S(x)$ est ponctuellement non bornée.

Nous avons défini plus haut (1[re] partie, chap. IV, § 4) un ensemble parfait symétrique. Considérons deux points a et b, origines de segments noirs couvrant une portion de l'ensemble parfait P; on peut réduire au besoin le plus grand de ces segments de façon à les rendre égaux, de sorte que les deux portions de P comprises sur ces segments se déduisent l'une de l'autre par une translation et l'ensemble P peut être recouvert par un nombre fini de translatés d'une de ces portions.

Définition. — Nous dirons qu'un ensemble E est un *ensemble à translations*, si pour tout intervalle ouvert p de E, c'est-à-dire toute intersection non vide de E avec un intervalle ouvert de la droite, l'ensemble E est contenu dans la réunion d'un nombre fini de translatés de p.

THÉORÈME [Malliavin ([1])]. — *Si une série trigonométrique converge absolument sur un parfait à translations, la convergence y est uniforme.*

En effet, soit P un parfait et une série

$$\mathfrak{S} = \Sigma p_n | \sin k_n \pi x |$$

convergente sur P. Désignons par $r_n(x)$ le reste de rang n de $\mathfrak{S}$, par ε un nombre positif donné. En vertu du théorème de Baire, il existe une portion e de P telle que si $x \in e$, $r_n(x) < \varepsilon$, pourvu que $n > N_1$ indépendant de x. Mais P peut être recouvert par un nombre fini de translatés de e. Désignons par α_0 un point quelconque de e, par $\alpha_j (j = 1, 2, \ldots, r)$ les translatés de α_0. Tout point ξ de P peut s'écrire

$$\xi = (\alpha_j - \alpha_0) + \theta \qquad (\theta \in e).$$

La série $\mathfrak{S}$ converge pour $\alpha_j - \alpha_0$ et

$$r_n(\alpha_j - \alpha_0) < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_2.$$

Si $N = \max(N_1, N_2)$, $n > N$ entraîne

$$r_n(\xi) < 2\varepsilon \qquad \text{pour } n > N,$$

d'où le résultat

La démonstration repose sur le fait que la série est à termes positifs et sur la propriété $r_n(a + b) < r_n(a) + r_n(b)$. L'extension est évidente si cette dernière propriété est remplacée par $r_n(a + b) < M[r_n(a) + r_n(b)]$, M étant une constante absolue. On aboutit à l'énoncé :

THÉORÈME. — *Si une série de fonctions f_n continues positives définies sur toute la droite* R *et telles que $f_n(a + b) < M[f_n(a) + f_n(b)]$, M étant une constante absolue, converge sur un parfait* P *à translations, la convergence est uniforme sur* P.

Soit $\{x_n\}$ une suite quelconque décroissante et tendant vers o. Supposons, de plus, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{2}$ sans que l'égalité ait lieu constamment à partir d'un certain rang.

L'ensemble des points $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, où $\alpha_i = 0$ ou 1 est un parfait construit sur le segment o, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Nous dirons d'un tel parfait qu'il est *engendré* par la suite. L'hypothèse faite sur x_n prouve que le reste de rang n de la série x_i est inférieur au dernier terme, de sorte que les points de première espèce gauche ont comme

---

([1]) Cet énoncé a été indiqué par M. Paul Malliavin dans une Note (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1467-1469). J'avais auparavant indiqué que la somme était bornée, ce qui est une conclusion immédiate du resultat de M. Malliavin.

abscisses les nombres $\Sigma\alpha_i x_i$, le Σ étant fini et la translation $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i$ qui amène l'origine en un point de première espèce gauche a amène la portion du parfait comprise entre l'origine et le point $\sum_{N+1}^{\infty} x_i$ sur la portion de même longueur et d'origine a. Un parfait engendré par une suite est donc à translations. Cet ensemble est, du reste, un parfait symétrique construit sur le segment o, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Conséquence. — Soit P un parfait à translations du type N. Soit $\mathfrak{S}$ une série $\Sigma\rho_n|\sin n\pi x|$ convergente sur P. La convergence étant uniforme, la somme $S(x)$ est continue sur P. Si l'origine est dans P, la somme $S(x)$ tend vers o avec x. Sinon, x_0 et x_1 étant deux points quelconques de P, la série converge pour $x_1 - x_0$, donc le groupe G engendré par P converge sur un parfait à translations comprenant l'origine. De toute façon, il est possible de trouver des suites de points $\alpha_i \in G$, telles que $\sum_{1}^{\infty} S(\alpha_i) < \infty$, il suffit pour cela de prendre les α_i tendant vers o assez rapidement. Il en résulte que la série $\mathfrak{S}$ converge au point $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$.

A priori, de tels points n'ont aucune raison de faire partie du groupe G, comme le montre l'exemple suivant.

5. *Exemple.* — Prenons pour P le parfait engendré par la suite $\left\{\frac{1}{2^{2^n}}\right\}$. Un point du parfait est donc de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2^{2^n}} \qquad (\alpha_n = 0 \text{ ou } 1) \tag{1}$$

et un point du groupe G engendré par P est

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{2^{2^n}}, \qquad \text{avec } \lambda_n \text{ entier} \gtreqless 0 \text{ et } \lambda_n \text{ borné}; \tag{2}$$

or, un point quelconque du segment (o, 1) peut s'écrire

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{2^n}} \qquad (0 \leqq a_n < 2^{2^{n-1}}). \tag{3}$$

Il est donc possible de le mettre aussi sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^{2^n}} \qquad (-2^{2^{n-1}-1} < b_n \leqq 2^{2^{n-1}-1}) \tag{4}$$

une infinité dénombrable ayant deux développements possibles. Si l'on enlève assez de termes du début, (2) est un développement de la forme (4).

Ceci étant, parmi les points $u_n = \frac{1}{2^{2^n}}$, il y en a pour lesquels la somme S de la série $\mathfrak{S}$ est inférieure à 1, soit n_0 l'indice du premier, soit n_1 l'indice du premier différent de n_0 pour lequel S est inférieur à $\frac{1}{2}$ et n_p l'indice du premier différent de $n_i (i < p)$ pour lequel la somme est inférieure à $\frac{1}{2^p}$.

Considérons le point

$$(5) \qquad \omega = \sum_{p=1}^{\infty} f_p u_{n_p} \qquad (|f_p| < 2^{2^{p-1}} = u_{n_{p-1}}).$$

En ce point

$$(6) \qquad S(\omega) \leq \sum_{p=1}^{\infty} |f_p| \, S(u_{n_p}) < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|f_p|}{2^p}.$$

Si l'entier f_p est assez petit pour que cette dernière série converge, la série $\mathfrak{S}$ converge au point ω. Ceci est possible avec f_p non borné, alors ω n'appartient pas au groupe G engendré par P.

Nous avions plus haut posé le problème de l'existence de tels points (1[re] partie, chap. II, § 11), où nous posions la question de la fixité de ces points, laquelle peut maintenant être résolue sur l'exemple ci-dessus.

Nous avons vu plus haut que sur P converge la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin 2^{2^n} \pi x|.$$

Donnons-nous un point a quelconque n'appartenant pas à G

$$a = \sum \frac{\alpha_n}{2^{2^n}} \qquad (\alpha_n \text{ entier} \gtrless 0, \ \alpha_n \text{ non borné}),$$
$$(|\alpha_n| < 2^{2^n - 1} - 1).$$

Désignons par K_n l'exposant du premier terme de $\frac{|\alpha_n|}{2^{2^n}}$ dans le développement dyadique, de sorte que

$$(7) \qquad \frac{1}{2^{K_n}} \leq \frac{|\alpha_n|}{2^{2^n}} < \frac{1}{2^{K_n - 1}} \qquad (2^{n-1} < K_n < 2^n).$$

Considérons la série, de terme général

$$(8) \qquad |\sin 2^{K_n - 2} \pi x|.$$

On voit que si $x \in P$,

$$2^{K_n - 2} x \equiv 2^{K_n - 2} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2^r}} = \frac{1}{2^{2^n - K_n + 2}} + \theta_n \qquad (\text{mod } 1),$$

θ_n étant de l'ordre de $\frac{1}{2^{2^n}}$ est le terme général d'une série convergente.

Mais $|\alpha_n|$ est non borné, donc aussi $2^n - K_n$. On peut se limiter à une suite de valeurs de n, soit $\{n_p\}$ pour lesquelles cette quantité augmente indéfiniment, même assez vite pour que la série $\frac{1}{2^{2^n - K_n + 2}}$ converge. Ainsi sur P la série

$$(9) \qquad | \sin 2^{K_{n_p} - 2} \pi x |$$

converge.

Mais on a

$$2^{K_n - 2} a \equiv \frac{|\alpha_n| 2^{K_n - 2}}{2^{2^n}} + \delta'_n \qquad (\text{mod } 1),$$

avec

$$\sum |\theta'_n| < \infty.$$

D'après (7), le premier terme est compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. On voit donc que le terme général de la série (8) ne tend pas vers o, donc que cette série diverge au point a. Ainsi :

Proposition. — *Si une série* $\mathfrak{S}$ *converge sur* P, *elle converge aussi sur le groupe* G *engendré par* P, *mais aussi en d'autres points, de sorte qu'elle a comme ensemble de convergence un sur-groupe* G_1 *de* G. *Les points de* $G_1 - G$ *ne sont pas fixes; ils dépendent de la série* $\mathfrak{S}$ *et, étant donné un point* a *n'appartenant pas à* G, *on peut trouver une série* $\mathfrak{S}$ *convergente sur* P *et divergente en* a.

La relation (6) est vérifiée, en particulier pour $f(p) = p$, de sorte que la série $\mathfrak{S}$ converge en tous les points

$$(5\ bis) \qquad \varpi = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p p u_{n_p} \qquad (\alpha_p = 0 \text{ ou } 1).$$

Mais on voit qu'il y a correspondance biunivoque entre les ϖ et les points

$$(5\ ter) \qquad \theta = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha_p}{2^p},$$

donc entre l'ensemble des ϖ et l'ensemble $[0, 1]$.

Considérons deux points différents ϖ et ϖ' correspondant aux suites $\{\alpha_p\}$ et $\{\alpha'_p\}$ Leur différence s'écrit

$$(10) \qquad \Omega = \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p p u_{n_p},$$

avec

$$\begin{array}{lll} \delta_p = 0 & \text{si } \alpha_p = \alpha'_p, & \\ \delta_p = 1 & \text{si } \alpha'_p = 1, & \alpha_p = 0, \\ \delta_p = -1 & \text{si } \alpha'_p = 0, & \alpha_p = 1. \end{array}$$

De toute façon, Ω est écrit sous la forme (5) et fait partie de l'ensemble des nombres ω avec un coefficient non borné, Ω est donc un point de convergence de $\mathfrak{S}$ sans appartenir au groupe G.

Considérons alors le groupe G_1 de convergence de $\mathfrak{S}$. G_1 étant sur-groupe de G, on peut définir le groupe-quotient G_1/G; une classe de ce quotient est constituée par des points a tels que la différence de deux a appartienne à G. On voit donc que les deux points ϖ et ϖ' définis plus haut appartiennent à deux classes différentes du groupe-quotient. On en conclut le théorème :

THÉORÈME. — *Le groupe-quotient G_1/G a la puissance du continu.*

Envisageons maintenant deux séries $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ qui convergent sur P; leurs ensembles complets de convergence sont deux groupes G_1 et G_2.

Si

$$\mathfrak{S}_1 = \Sigma \rho_n^1 \,|\sin n\pi x\,|, \qquad \mathfrak{S}_2 = \Sigma \rho_n^2 \,|\sin n\pi x\,|,$$

on pose

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = \Sigma(\rho_n^1 + \rho_n^2)\,|\sin n\pi x\,|,$$

il est bien évident que

$$\Sigma \rho_n^1 + \rho_n^2 = \infty.$$

Cette série converge pour tous les points de $G_1 \cap G_2$ et là seulement; elle converge, en particulier sur P, donc d'après la proposition précédente, elle converge sur le groupe $\mathcal{G} = G_1 \cap G_2$, sur-groupe de G, tel que le quotient $\mathcal{G}/G$ a la puissance du continu. Ainsi

THÉORÈME. — *Si deux séries $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ convergent sur* P, *leurs groupes de convergence ont en commun un sur-groupe $\mathcal{G}$ de G tel que $\mathcal{G}/G$ ait la puissance du continu et il existe une série $\mathfrak{S}$ dont le groupe de convergence est $\mathcal{G}$.*

L'extension de cet énoncé à un nombre fini de séries est immédiat. Considérons maintenant une infinité dénombrable de telles séries

$$\mathfrak{S}_n = \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p^n \,|\sin p\pi x\,|.$$

On définit aisément la série :

$$\mathfrak{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{S}_n}{2^n M_n},$$

M_n désignant le maximum de $\mathfrak{S}_n(x)$ sur le parfait P, le coefficient de $|\sin p\pi x|$ dans $\mathfrak{S}$ étant $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_p^n}{2^n M_n}$.

Si $x \in$ P, $\mathfrak{S}_n(x) \leq M_n$, de sorte que $\mathfrak{S}(x)$ converge et, par suite,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_p^n \,|\sin p\pi x\,|}{2^n M_n} < \infty.$$

Il en résulte que

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\sin p\pi x\,| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_p^n}{2^n M_n} < \infty$$

et, par suite,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_p^n}{2^n M_n} < \infty.$$

La série $\mathfrak{S}$ converge sur P, donc d'après la proposition ci-dessus, converge sur un sur-groupe $\mathcal{G}$ de G. Les seuls points possibles de convergence sont ceux qui appartiennent à tous les G_i (G_i groupe de convergence de $\mathfrak{S}_i$), mais rien ne prouve que $\mathfrak{S}$ converge sur $\bigcap_i G_i$. Ainsi,

Théorème. — *Si G_i est le groupe de convergence d'une série $\mathfrak{S}_i$, convergente sur* P, *une infinité dénombrable de G_i ont toujours en commun un sur-groupe $\mathcal{G}$ du groupe* G *engendré par* P, *le groupe-quotient $\mathcal{G}/G$ ayant la puissance du continu.*

6. **Autres conséquences topologiques.** — *a.* Prenons à nouveau un parfait P à translations. Désignons par t_i les translations en les ordonnant. S'il existe une série

$$\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n \,|\sin n\pi x\,|$$

convergente aux points t_i avec une somme bornée sur l'ensemble de ces points, la semi-continuité inférieure de $\mathfrak{S}(x)$ nous montre qu'en tout point de P, la série $\mathfrak{S}$ aura une somme inférieure à la borne. Nous avons vu plus haut que la condition était nécessaire. Ainsi,

Théorème. — *Un parfait* P *à translations t_i est un* N-*ensemble si et seulement si l'on peut trouver une série $\mathfrak{S}$ convergente aux points t_i avec une somme bornée sur l'ensemble des t_i.*

Supposons maintenant qu'une série $\mathfrak{S}$ diverge en un point ξ de P. Cette série diverge sur un ensemble partout dense sur P. Sinon, elle convergerait aux points t_i, sauf peut-être sur un ensemble de ces points non partout dense; mais alors elle divergerait aux points $\xi + t_i$ qui forment un ensemble partout dense sur P.

En particulier, supposons que sur P, la série $\mathfrak{S}$ diverge en un point, mais converge en tous les points de première sorte. On peut affirmer la divergence sur un ensemble partout dense sur P en considérant tous les points ξ_r qui correspondent à ξ dans les translations.

Nous avons un certain nombre de points de premier ordre obtenus pour les translations les plus grandes qui recouvrent l'ensemble en nombre n_1; numérotons ces points ξ_1^i $(i \leqq n_1)$. La série $\mathfrak{S}$ diverge en ces points, nous pouvons trouver un entier p_1 tel que

$$S_{p_1}(\xi_1^i) > u_1,$$

S_k désignant la somme de rang k de la série $\mathfrak{S}$ et u_1 un nombre positif arbitraire.

Puis, nous avons n_2 translations du second ordre qui nous donnent des points ξ_2^i $(i \leqq n_2)$; certains de ces points peuvent avoir été trouvés dans les ξ_1^i. On peut trouver p_2 tel que

$$S_{p_2}(\xi_2^i) > u_2 > u_1 \qquad (p_2 > p_1).$$

A la $r^{\text{ième}}$ opération, nous trouvons n_r points ξ_r^i $(i \leqq n_r)$ non nécessairement tous différents des précédents et il existe un p_r tel que

$$S_{p_r}(\xi_r^i) > u_r > u_{r-1} \qquad (p_r > p_{r-1}).$$

On peut donc trouver une suite p_r augmentant indéfiniment avec r, telle que la suite $S_{p_r}(\xi_r^i)$ soit non bornée en même temps que r, les points ξ_r^i formant une suite de points partout denses sur P.

Or, le terme général $\rho_r|\sin r\pi x|$ est fonction continue de x, de même que la somme $S_r(x)$. On peut donc trouver un intervalle ω_r de centre ξ_r^i, tel que si x est dans $\omega_r^i \cap P$, on a $S_{p_r}(x) > \frac{u_r}{2}$. Or, on sait (Denjoy, II, p. 139 et 178) que si l'on considère sur un parfait P une suite de points a_n partout denses sur P, les points communs à une infinité d'intervalles ouverts dont chacun contient au moins un a_n à l'intérieur forment un résiduel de P, c'est-à-dire l'ensemble qui reste lorsque de P on retranche une infinité d'ensembles de première catégorie sur P. Donc :

THÉORÈME. — *Si une série $\mathfrak{S}$ converge en tous les points de première sorte d'un parfait* P *à translations et diverge en un point, elle diverge sur un résiduel de* P.

L'hypothèse des translations ne joue dans la démonstration que pour affirmer l'existence de points partout denses sur P, où diverge $\mathfrak{S}$; ainsi :

THÉORÈME. — *Si une série $\mathfrak{S}$ diverge en des points partout denses sur un parfait* P, *elle diverge sur un résiduel de* P.

Application. — Considérons un ensemble triadique de Cantor C; on sait que C n'est pas un N-ensemble, mais c'est un parfait à translations, même un parfait symétrique. Toute série $\mathfrak{S}$ diverge sur un ensemble $\gamma \subset C$; si γ contient certains des points de première espèce de C, on peut trouver une série $\mathfrak{S}_1$ qui converge en tout point de convergence de C et aussi en tous les points de première espèce. $\mathfrak{S}_1$ diverge donc sur un résiduel de C et, par suite, $\mathfrak{S}$ diverge sur un ensemble qui contient un tel résiduel et est lui-même un résiduel.

Considérons alors une série $\mathfrak{S}$ convergente sur un sous-ensemble $e \subset C$ et soit η le complément de e dans C, η ne contient pas nécessairement tous les points de première espèce de C. Adjoignons-les de façon à avoir un ensemble η_1.

D'après le paragraphe précédent, η_1 est un résiduel de C. Il est impossible qu'une série converge sur η_1 puisqu'elle ne pourrait diverger sur C qu'au plus en un ensemble de première catégorie sur C contrairement à ce paragraphe, ni sur η qui diffère de η_1 d'au plus un dénombrable. Il est donc impossible de partager C en deux parties C_1 et C_2 qui soient toutes deux des N-ensembles.

THÉORÈME. — *L'ensemble triadique de Cantor n'est pas du type de Marcinkiewicz.*

Le fait que l'ensemble soit de Cantor ne joue aucun rôle. L'essentiel repose dans l'application des théorèmes précédents, donc s'applique à tout ensemble à translations qui est une base de convergence. En particulier.

Un parfait symétrique défini par une suite $\{\xi_n\}$ *avec* $\underline{\lim}\,\xi_n > 0$ *n'est pas du type de Marcinkiewicz.*

On sait que l'intersection d'une infinité dénombrable de résiduels d'un parfait est encore un résiduel. Donc :

Théorème. — *Il est impossible de partager un ensemble triadique de Cantor en une infinité dénombrable de* N-*ensembles dont il soit la réunion.*

CHAPITRE III.

Méthode de l'intégrale de Stieltjes.

1. Au paragraphe 3 du chapitre précédent, nous avons vu que la convergence sur un parfait P engendré par une suite $\{x_n\}\left[\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}\right]$, est uniforme. Ceci est obtenu, en particulier, si $\Sigma S(x_n) < \infty$, $S(x)$ désignant comme d'habitude la somme de la série

$$\mathfrak{S} = \Sigma \rho_n \,|\sin n\pi x\,|.$$

C'est de la réciproque de cette proposition que nous traiterons tout d'abord et pour cela, nous emploierons une méthode déjà utilisée par M. R. Salem. Rappelons les résultats démontrés par cet auteur [*cf.* Salem (*b*), p. 323 et suiv.].

Soit P un parfait construit sur $(0, 2\pi)$ et soit une mesure positive ayant pour support le parfait. Une condition nécessaire pour que P soit un N-ensemble est que

$$\varliminf \int_0^{2\pi} |\sin nx\,|\, df = 0.$$

M. Salem montre, en outre, que si cette condition est satisfaite pour une fonction f donnée continue sur le parfait, P est presque partout de type N (même N_0) c'est-à-dire qu'il existe une série — dont les coefficients peuvent ne pas tendre vers 0 — convergente sur une partie $\mathfrak{E}$ de P telle que

$$\int_{\mathfrak{E}} df = \int_{P} df.$$

Le calcul de l'intégrale $\int_0^{2\pi} |\sin nx\,|\, df$ n'est pas très aisé; par contre, celui de $\int_0^{2\pi} [\sin^2 nx]\, df$ se ramène au calcul de $\int_0^{2\pi} \cos 2nx\, df$ que l'on déduit très facilement de $\int_0^{2\pi} e^{inx}\, df$ selon une méthode indiquée par Hille et Tamarkin et utilisée par M. R. Salem pour l'application à un parfait symétrique.

2. Considérons un parfait P engendré par la suite $\{x_n\}$ et posons $\Sigma x_n = \sigma$; nous pouvons toujours, en enlevant certains termes au début de la suite, supposer $\sigma < \frac{1}{2}$. Il est facile de définir une mesure à support sur P en définissant la fonction $f(x)$, $x \in P$ par

$$f(x_i) = \frac{1}{2^i} \qquad \text{et} \qquad f(\Sigma \alpha_i x_i) = \Sigma \alpha_i f(x_i) \qquad (\alpha_i = 0 \text{ ou } 1).$$

La fonction $f(x)$ ainsi définie est strictement croissante sur P et elle y est continue $f(0) = 0$, $f(\sigma) = 1$. Remarquons qu'il existe une fonction $F(x)$, égale à $f(x)$ si $x \in P$, continue et croissante lorsque x varie continûment entre 0 et σ.

Employons la méthode de Hille et Tamarkin pour calculer

$$\mathcal{J} = 2\int_0^\sigma \sin^2 n\pi x \, dF = 2\int_P \sin^2 n\pi x \, df.$$

Posons

$$I = \int_P e^{in\pi x} \, df(x).$$

Les points $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j$ ($\alpha_j = 0$ ou 1) sont extrémités droites de contigus et extrémités gauches d'un intervalle de longueur

$$x = \sum_{p+1}^{\infty} x_j = \eta_p < x_p$$

recouvrant le parfait dans cet intervalle qui est une portion isolée de P. Désignons ces intervalles par η_{pk} en les numérotant en k de la gauche vers la droite. Sur η_{pk}, la fonction f croît de

$$\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^p}.$$

Nous avons donc une valeur approchée I_p de I

$$I_p = \frac{1}{2^p} \sum \exp\left[\pi n i \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j\right],$$

le premier $\sum$ étant étendu aux 2^p combinaisons possibles des α. On voit donc que

$$I_p = \frac{1}{2^p} \prod_{j=1}^{p} (1 + \exp \pi n i x_j) = \prod_{j=1}^{p} \exp i\pi n \frac{x_j}{2} \cos \pi n \frac{x_j}{2} = \prod_{j=1}^{p} \exp i n\pi \frac{x_j}{2} \prod_{j=1}^{p} \cos \pi n \frac{x_j}{2}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad I = \lim I_p = e^{in\frac{\sigma}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi n \frac{x_j}{2}.$$

Nous en déduisons

$$\int_P \cos 2n\pi x \, df = \mathcal{R}(I) = \cos n\pi\sigma \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi n x_j,$$

donc

$$(2) \qquad \left| \int_P \cos 2n\pi x \, df \right| \leq \prod_{j=1}^{\infty} |\cos \pi n x_j| = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \cos^2 \pi n x_j \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \sin^2 \pi n x_j = \theta_n;$$

la série (3) est convergente pour n donné d'après la définition de x_j. Ceci va nous conduire à une majoration du produit de l'inégalité (2).

(4) $$\prod_{j=1}^{\infty}(1-\sin^2\pi n x_j) < \prod_{j=1}^{j_n}(1-\sin^2\pi n \alpha_j).$$

Choisissons j_n pour que

(5) $$\sum_{j=1}^{j_n}\sin^2\pi n x_j = \omega_n > \frac{\theta_n}{2}.$$

Lemme. — *Soit r nombres positifs $\{a_i\}$, $1 \leqq i \leqq r$ inférieurs à 1 de somme* S. *Le produit* $\prod_{i=1}^{r}(1-a_i)$ *est, si* S *est assez petit, majoré par* $1-\frac{S}{2}$.

Supposons que nous ayons deux nombres a et b de somme S;

$$(1-a)(1-b) = 1 - S + ab$$

est maximum si les deux nombres sont égaux. Le produit $\prod_{i=1}^{r}(1-a_i)$ est donc maximum quand tous les a_i sont égaux à $\frac{S}{r}$.

Cette fonction de r croît avec r et tend vers e^{-S} quand r tend vers l'infini

$$\prod_{i=1}^{r}(1-a_i) \leqq e^{-S}.$$

Mais $e^{-S} = 1 - S + \frac{S^2}{2} + \ldots$ est majoré par $1-\frac{S}{2}$ si S est assez petit (par exemple $S<1$), d'où la majoration indiquée.

Appliquons à la majoration de (5)

$$\left|\int_P \cos 2\pi n x\, df\right|^2 \leqq 1 - \frac{\omega_n}{2} < 1 - \frac{\theta_n}{4}$$

et, par suite,

$$\left|\int_P \cos 2\pi n x\, df\right| \leqq 1 - \frac{\theta_n}{8}.$$

Donc

(6) $$\left|\int_P \sin^2\pi n x\, df\right| \geqq \frac{\theta_n}{16}.$$

Ceci est valable pourvu que θ_n soit assez petit. Si la condition n'est pas remplie, on peut majorer e^{-S} par un nombre fixe, de sorte qu'il existe un nombre α fixe tel que

$$\left|\int_P \sin^2\pi n x\, df\right| \geqq \alpha \qquad \text{si} \quad \theta_n > 1.$$

3. Supposons qu'il existe une série

$$S = \Sigma \rho_n \sin^2 n\pi x$$

convergente sur P, avec $\Sigma\rho_n = \infty$, donc non convergente partout, de somme $S(x)$. P est un ensemble à translations et, par suite, la série S converge uniformément sur P et $S(x)$ est bornée sur P par le nombre M. Nous pouvons donc intégrer S sur P par rapport à la fonction $f(x)$.

$$\Sigma \rho_n \int_P \sin^2 n\pi x \, df < M, \tag{7}$$

de sorte que si l'on pose

$$\int_P \sin^2 n\pi x \, df = \varepsilon_n, \qquad \text{il résulte} \quad \Sigma\rho_n \varepsilon_n < \infty.$$

Les valeurs de n pour lesquelles $\theta_n > 1$, forment une suite $\{n_i\}$ telle que $\Sigma\rho_{n_i} < \infty$; retirons ces termes de la série S et soit S′ la nouvelle série

$$S' = \Sigma\rho_{n_k} \sin^2 n_k \pi x.$$

La majoration (6) nous indique que

$$\Sigma\rho_{n_k} \theta_{n_k} < \infty.$$

donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{n_k} \sum_{i} \sin^2 n_k \pi x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \sin^2 n_k \pi x_i = \sum_{i=1}^{\infty} S'(x_i) < \infty.$$

Théorème. — *P désignant le parfait engendré par une suite* $\{x_i\}$, $\dfrac{x_{i+1}}{x_i} < \dfrac{1}{2}$; *si une série* $S = \Sigma\rho_n \sin^2 n\pi x$ *converge sur* P, *il existe une série* $S' = \Sigma\rho_{n_k} \sin^2 n_k \pi x$ *extraite de la précédente, telle que* $\sum_{i=1}^{\infty} S'(x_i)$ *converge.*

Remarquons que le résultat n'est pas nécessairement vrai pour la série S de départ, car il peut être faux pour une série convergente partout ($\Sigma\rho_n < \infty$).

Étant donnée une série du type S′ convergente sur un ensemble $\mathcal{E}$ de type N^2, nous savons (2ᵉ partie, chap. I, § 4) qu'il existe une série

$$\mathfrak{S}_1 = \Sigma u_k \,|\sin n_k \pi x|$$

converge sur $\mathcal{E}$ de somme $\mathfrak{S}_1(x)$ telle que

$$\mathfrak{S}_1(x) < A[S'(x)]^{\frac{1}{2}},$$

A étant un nombre fixe. On voit ainsi que, s'il existe une série

$$\mathfrak{S} = \Sigma\rho_n \sin|n\pi x|$$

convergente sur P, la série

$$S = \Sigma\rho_n \sin^2 n\pi x$$

converge aussi sur P; on peut appliquer le résultat précédent et en conclure qu'il existe $\mathfrak{S}_1$ convergente sur P telle que $\Sigma[\mathfrak{S}_1(x)]^2$ converge.

Théorème. — *Si le parfait* P *engendré par une suite* $\{x_i\}$ *est un* N*-ensemble, il existe une série* $\mathfrak{S}_1$ *convergente sur* P *telle que* $\Sigma[\mathfrak{S}_1(x_i)]^2$ *converge.*

4. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite quelconque croissante telle que

$$\lambda_n = 2^{a_n} + r_n, \qquad \lambda_n < 2^{a_n+1} - 1,$$

a_n et r_n tendant vers l'infini, Le parfait P engendré par la suite $\left\{\frac{1}{2^{\lambda_n+1}}\right\}$ admet $\{2^{2^n}\}$ comme suite de limite nulle puisque

$$2^{2^n}\sum_i \frac{\alpha_i}{2^{\lambda_i+1}} = \sum_i \frac{\alpha_i}{2^{2^{a_i}+r_i+1-2^n}}$$

n fixé, les premiers termes sont entiers; les termes non entiers sont obtenus pour les i tels que $a_i \geqq n$, donc pour $i \geqq i_n$, le Σ est donc, modulo 1, inférieur à $\frac{2}{2^{r_{i_n}+1}}$, donc tend vers 0.

Considérons alors $\mathfrak{G}$ l'ensemble des x pour lesquels $\sin 2^{2^n}\pi x$ tend vers 0, avec $\frac{1}{n}$. $\mathfrak{G}$ contient les points diadiques; s'il est de type N, il existe donc une série convergente sur $\mathfrak{G}$ de la forme

$$\mathfrak{S} = \Sigma \rho_n \mid \sin 2^{k_n} m_n \pi x \mid,$$

k_n tend vers l'infini, m_n est impair.

On peut toujours supposer

$$k_n = 2^{\alpha_n} + \mu_n < 2^{\alpha_n+1} - 1$$

et μ_n tendant vers l'infini, sinon en désignant par $\{\mu'_n\}$ une suite de plus grande limite infinie

$$\sum \frac{\rho_n}{2^{\mu'_n}} \mid \sin 2^{k_n+\mu'_n} m_n \pi x \mid < \Sigma \rho_n \mid \sin 2^{k_n} m_n \pi x \mid.$$

Il suffit de choisir μ'_n pour que $\frac{\rho_n}{2^{\mu'_n}}$ diverge encore.

$\{k_n\}$ n'est pas forcément croissante, certains k_n pouvant être égaux. Considérons la suite des k_n, chaque valeur n'étant prise qu'une seule fois. Le parfait P engendré par la suite $\frac{1}{2^{k_n}}$ est partie de $\mathfrak{G}$, donc $\mathfrak{S}$ converge sur P. On peut donc trouver, d'après le théorème du paragraphe **3**, une série S de la forme

$$\Sigma \rho'_n \sin^2 2^{k_n} m_n \pi x \qquad (\Sigma \rho'_n = \infty);$$

$\rho'_n = \rho_n$, sauf peut-être pour certaines valeurs de l'indice pour lesquelles $\rho'_n = 0$, telle que

$$\Sigma\, \mathrm{S}\left(\frac{1}{2^{k_n+1}}\right) < \infty.$$

Mais

$$\left| \sin 2^{k_n} m_n \pi \frac{1}{2^{k_n+1}} \right| = \left| \sin m_n \frac{\pi}{2} \right| = 1$$

et, par suite,

$$\mathrm{S}\left(\frac{1}{2^{k_n+1}}\right) \geqq \Sigma \rho'_n,$$

le sigma étant étendu aux valeurs de r qui donnent le même k et, par suite,

$$\Sigma S\left(\frac{1}{2^{k_n+1}}\right) \geqq \Sigma \rho'_n = \infty,$$

d'où contradiction. Nous répondons ainsi au problème posé à la fin du premier chapitre de la deuxième partie

THÉORÈME. — *Le groupe* $\mathfrak{G}$ *des points* x *où* $\sin 2^{2^n}\pi x$ *tend vers* o *n'est pas un* N-*ensemble.*

Si H_ε est l'ensemble des x tels que $|\sin 2^{2^n}\pi x| < \varepsilon$ à partir d'un rang n_0 variable avec x, H_ε est un F_σ de première catégorie. $\mathfrak{G}$ apparaît comme l'intersection des ensembles $\mathcal{H}_p = H_{\frac{1}{p}}$, donc est un $F_{\sigma\delta}$ de première catégorie. Il est contenu dans un F_σ de première catégorie (par exemple $\mathcal{H}_p$). Un tel F_σ contenant $\mathfrak{G}$ qui serait un groupe donnerait un exemple de groupe F_σ base de convergence, mais la question reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE.

Les abréviations sont celles de *Mathematical Reviews.*

J. ARBAULT. *a. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 592); *b. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 224, 1947, p. 630).

BIRKHOFF. *Lattices theory* (*Amer. Math. Soc.*, *Colloquium Publ.*, vol. 25, New-York, 1948.

A. DENJOY. *a. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 155, 1912, p. 135); *b. Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, 2ᵉ partie, Paris, 1941.

FATOU. *a. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 41, 1913, p. 47); *b. Thèse*, Paris, 1906; *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta Math.*, t. 30, 1906, p. 335).

LOEMICKI. *Sur les fonctions multipériodiques uniformes d'une variable réelle* (*C. R. Soc. Sc.*, Varsovie, 1918).

LUSIN. *a. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 155, 1912, p. 580); *b. Intégrales et séries trigonométriques* (en russe). Moscou, 1915, p. 1-242.

P. MALLIAVIN. *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1467).

MARCINKIEWICZ. (*Trav. Soc. Sc. Lettres Wilno*, Cl. *Sc. Math. Nat.*, t. 12, 1937, p. 1).

NIEMYTZKI. *Sur quelques classes d'ensembles linéaires avec applications aux séries trigonométriques absolument convergentes*, *Rec. Soc. Math.*, Moscou, t. 33, 1926, p. 5, en russe avec, résumé en français).

R. SALEM. *a. On some properties of symmetrical perfect sets* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 47, 1941, p. 820); *b. The absolute convergence of trigonometrical series* (*Duke math. J.*, t. 8, 1941, p. 317).

SIERPINSKI. *Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel* (*Fund. Math.*, t. 1, 1920, p. 105).

STEINHAUS. *a. Sur les distances des points des ensembles de mesure positive* (*Fund. Math.* t. 1, 1920, p. 93); *b. Une nouvelle propriété de l'ensemble de Cantor* (en polonais), 1917.

YOUNG. *The fundamental theorems of the differential Calculus*, Cambridge, 1910.

ZYGMUND. *Trigonometrical series*, Varsovie, 1935, chap. VI, p. 131.